Дальневосточный математический журнал. 2019. Т. 19. № 1. С. 96–107

УДК 517.958
MSC2010 35Q60 35R30

© И. П. Яровенко[1]

Однозначная разрешимость краевой задачи для полихроматического уравнения переноса излучения

Работа посвящена исследованию разрешимости краевой задачи для полихроматического уравнения переноса излучения, учитывающего рассеяние по закону Комптона. Краевая задача для уравнения переноса излучения сводится к эквивалентному интегральному уравнению второго рода типа Вольтерра. Итогом работы является теорема существования и единственности решения краевой задачи.

Ключевые слова: *теория переноса излучения, комптоновское рассеяние*

Введение

В работе исследуется разрешимость прямой задачи для полихроматического уравнения переноса излучения, описывающего процесс распространения излучения в веществе. Предполагается, что среди всех видов взаимодействия излучения с веществом преобладает некогерентное комптоновское рассеяние. Комптон-эффект, открытый около века назад, характеризуется наличием жесткой связи между углом рассеяния фотона и энергией, которую он потерял в результате взаимодействия. Наличие такой связи, выражаемой соотношением Комптона, приводит к тому, что область интегрирования в интеграле столкновений изменяется в зависимости от энергии излучения. Последнее обстоятельство позволяет свести краевую задачу для уравнения переноса излучения к эквивалентному интегральному уравнению второго рода типа Вольтерра. В итоге удается провести доказательство однозначной разрешимости краевой задачи для уравнения переноса излучения при довольно общих ограничениях на его коэффициенты. В частности, не требуется выполнения характерных в теории переноса излучения неравенств для коэффицентов ослабления и рассеяния. Отсутствие условий малости впервые было отмечено в работах Д. С. Аниконова и Д. С. Коноваловой [1, 2].

[1] Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8; Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: yarovenko@iam.dvo.ru

В пионерских работах [1,2] авторами использовались классы непрерывных функций, вследствие чего налагались довольно жесткие ограничения на коэффиценты уравнения переноса излучения. Исследование разрешимости краевой задачи в классах функций интегрируемых с квадратом было проведено в работе автора [3]. Также отметим работу [4], где доказана разрешимость полулинейного интегро-дифференциального уравнения переноса излучения с комптоновской индикатрисой рассеяния.

В данной работе результаты, полученные в [3], обобщаются на случай функций, интегрируемых с p-ой степенью модуля. В работе используется стандартная в теории переноса техника, заключающаяся в сведении интегро-дифференциального уравнения к интегральному и применении принципа сжимающих отображений. Подобные исследования для монохроматического уравнения переноса излучения были проведены в работах В. С. Владимирова [5], Т. А. Гермогеновой [6] и В. И. Агошкова [7].

1. Основные определения и ограничения

Пусть G — некоторая ограниченная область с гладкой границей ∂G, удовлетворяющая условию Липшица. Рассмотрим полихроматическое уравнение переноса излучения, учитывающее комптоновское рассеяние [1, 2]:

$$\begin{gathered}\omega\cdot\nabla_r f(r,\omega,\alpha)+\mu(r,\alpha)f(r,\omega,\alpha)=\\ =\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} k(r,\omega,\omega',\alpha)f(r,\omega',\mathrm{g}(\omega\cdot\omega',\alpha))d\omega'+J(r,\omega,\alpha).\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь $f(r,\omega,\alpha)$ — плотность потока излучения в точке $r\in G$, распространяющегося в направлении $\omega\in\Omega$ и имеющего энергию $\alpha\in[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]$; $\mu(r,\alpha)$ — коэффициент полного взаимодействия излучения со средой в точке r при энергии α; $J(r,\omega,\alpha)$ — плотность внутренних источников излучения. Функция $k(r,\omega,\omega',\alpha)$ называется дифференциальным сечением рассеяния и определяется формулой Кляйна – Нишины – Тамма [1, 2].

Функция g определяется соотношением Комптона [1, 2] и выражает связь между энергией фотона до рассеяния α' и энергией после рассеяния α:

$$\alpha'=\mathrm{g}(\omega\cdot\omega',\alpha),\qquad \mathrm{g}(\omega\cdot\omega',\alpha)=\frac{\alpha}{1+\alpha(\omega\cdot\omega'-1)},\tag{2}$$

где $\omega\cdot\omega'$ означает скалярное произведение векторов ω' и ω, описывающих направления распространения фотона до и после рассеяния соответственно. Переменная ω изменяется на единичной сфере Ω. Величина ω' принадлежит подмножеству единичной сферы $\Omega_{\omega,\alpha}=\{\omega':\omega'\in\Omega,\omega\cdot\omega'\geqslant 1-1/\alpha+1/\overline{\alpha}\}$, и верны неравенства $\alpha\leqslant\mathrm{g}(\omega\cdot\omega',\alpha)\leqslant\overline{\alpha}$, где $\overline{\alpha}$ — максимальная энергия излучения, испускаемая источниками. Данные неравенства непосредственно вытекают из соотношения Комптона, связывающего энергии фотона до и после рассеяния с косинусом угла рассеяния, и выражают тот факт, что энергия фотона в результате рассеяния может только уменьшиться.

Введем основные обозначения. Пусть для любого измеримого по Лебегу множества $Y\subset\mathrm{R}^m$ его m-мерная мера обозначается $mes_m Y$. Интегрирование функции $\zeta(\omega)$

по сфере Ω понимается в следующем смысле (см. [8]). Пусть θ,γ — сферические углы вектора ω, т.е. $\omega(\theta,\gamma)=(\sin\theta\cos\gamma,\sin\theta\sin\gamma,\cos\theta)$, $0<\theta<\pi$, $0\leqslant\gamma<2\pi$, тогда

$$\int\limits_{\Omega}\zeta(\omega)d\omega=\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\zeta(\omega(\theta,\gamma))\sin\theta d\theta d\gamma.$$

Если Ω_0 — подмножество Ω, то для трактовки интеграла $\zeta(\omega)$ по Ω_0 достаточно в последнем равенстве умножить подынтегральные выражения на характеристическую функцию $\chi(\omega)$ множества Ω_0, выражая ее справа через углы θ,γ. Следуя [8], определим двумерную меру множества Ω_0 как интеграл от $\chi(\omega)$ по Ω.

Пусть $L_{r,\omega}=\{r+\omega t,t=[0,\infty)\}$ — луч из точки $r\in G$ в направлении ω. Обозначим $d(r,\omega)=mes_1(L_{r,\omega}\cap\overline{G})$, $r\in\overline{G}$, $\omega\in\Omega$. Функция $d(r,\omega)$ выражает длину отрезка луча $L_{r,\omega}$ от точки $r\in G$ до ∂G в направлении ω. Ясно, что $\xi=r-d(r,-\omega)\omega\in\partial G,r\in G$.

Для заданного направления ω обозначим через $\Gamma_{-\omega}$ подмножество ∂G , состоящее из точек $\xi\in\partial G$ таких, что $\{\xi+t\omega:0<t<d(\xi,\omega)\}\subset G$, и пусть $\Gamma^{-}=\Gamma_{-\omega}\times\Omega\times[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]$.

Присоединим к (1) следующее граничное условие:

$$f(\xi,\omega,\alpha)=h(\xi,\omega,\alpha),\quad(\xi,\omega,\alpha)\in\Gamma^{-}.\tag{3}$$

Функция $h(\xi,\omega,\alpha)$ описывает плотность потока частиц, испускаемых внешними источниками, проникающих в среду G через граничную точку ξ, в направлении ω и имеющих энергию α. Везде далее для краткости будем использовать обозначения $x=(r,\omega,\alpha)$, $X=G\times\Omega\times[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]$, $(x\in X)$.

Введем необходимые функциональные пространства. Через $L^p(X)$ обозначим пространство функций, модуль которых суммируем со степенью p по Лебегу. Норму в данном пространстве определим, как обычно, $\|\varphi\|_{L^p(X)}=(\int\limits_X|\varphi(x)|^pdx)^{1/p}$. Через $L^\infty(X)$ обозначим банахово пространство измеримых ограниченных почти всюду функций с нормой $\|\varphi\|_{L^\infty(X)}=\operatorname{vraisup}\limits_X|\varphi(x)|$.

Обобщенной производной по направлению ω функции $f\in L^1(X)$ назовем функцию $w\in L^1(X)$, такую, что

$$\int\limits_X(f(r,\omega,\alpha)\omega\cdot\nabla\varphi(r)+w(r,\omega,\alpha)\varphi(r))\psi(\omega,\alpha)drd\omega d\alpha=0\tag{4}$$

для всех $\varphi\in C_0^\infty(G)$ и $\psi\in L^\infty(\Omega\times[\underline{\alpha},\overline{\alpha}])$. Здесь $C_0^\infty(G)$ — множество бесконечно дифференцируемых финитных на G функций. Дифференциальное выражение в левой части уравнения (1) будем понимать как обобщенную производную по направлению и будем использовать обозначение $w=\omega\cdot\nabla_rf$.

Обозначим через $W^p(X)$ линейное пространство функций $f\in L^p(X)$, обладающих обобщенной производной $\omega\cdot\nabla_rf\in L^p(X)$. Вводя в данном пространстве норму при помощи соотношения

$$\|f\|_{W^p(X)}=\left(\|f\|^p_{L^p(X)}+\|\nabla_rf\|^p_{L^p(X)}\right)^{1/p},$$

получим банахово пространство [9].

Для областей с гладкой липшицевой границей существование интегрируемой производной по направлению у функций $f \in W^p(X)$, $1 \leqslant p < \infty$, позволяет ввести оператор следа $f \to f|_{\Gamma^-}$. Данный оператор будет линейным и непрерывным оператором из $W_p(X) \to L^p_{loc}(\Gamma^-)$. Известно, что следы функции $f \in W^p(X)$, $1 \leqslant p < \infty$ не обязаны принадлежать $L^p(\Gamma^-)$, простой контрпример может быть найден в [9]. Введем класс функций, в котором будем искать решение задачи (1), (3). Для $1 \leqslant p < \infty$ определим следующие пространства $\widehat{W}^p(X) = \{f \in W^p(X) : f|_{\Gamma^-} \in L^p(\Gamma^-)\}$, с нормой

$$\|f\|_{\widehat{W}^p(X)} = \left(\|f|_{\Gamma^-}\|^p_{L^p(\Gamma^-)} + \|\nabla_r f\|^p_{L^p(X)}\right)^{1/p}. \tag{5}$$

Известно [9], что данные пространства будут банаховыми и справедлива оценка

$$\|f\|_{L^p(X)} \leqslant d^{1/p}\|f|_{\Gamma^-}\|_{L^p(\Gamma^-)} + d\|\omega \cdot \nabla_r f\|_{L^p(X)}, \ \forall f \in \widehat{W}^p(X),$$

где d — диаметр области G. Из последнего неравенства и определения нормы в пространстве $\widehat{W}^p(X)$ непосредственно вытекает оценка

$$\|f\|_{L^p(X)} \leqslant (d^{1/p} + d)\|f\|_{\widehat{W}^p(X)}. \tag{6}$$

Сформулируем основные ограничения на коэффициенты краевой задачи (1), (3). Пусть функции μ, S, J, h неотрицательны и $\mu \in L^\infty(G \times [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}])$, $\mu \geqslant \mu_{min} > 0$, $k \in L^\infty(G \times \times [-1,1] \times [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}])$, $J \in L^p(X)$, $h \in L^p(\Gamma^-)$. Для сокращения записи будем использовать обозначения $\|\mu\|_{L^\infty(G \times [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}])} = \|\mu\|_{L^\infty}$, $\|k\|_{L^\infty(G \times [-1,1] \times I)} = \|k\|_{L^\infty}$.

Определим оптическое расстояние между точками r и $r - t\omega$

$$\tau(r, \omega, \alpha, t) = \int_0^t \mu(r - t'\omega, \alpha)dt',$$

и обозначим

$$\tau(r, \omega, \alpha) = \tau(r, \omega, \alpha, d(r, -\omega)).$$

2. Постановка и исследование задачи

Рассмотрим выражения

$$(L\varphi)(r, \omega, \alpha) = \omega \cdot \nabla_r \varphi(r, \omega, \alpha) + \mu(r, \alpha)\varphi(r, \omega, \alpha), \tag{7}$$

$$(A\varphi)(r, \omega, \alpha) = \int_0^{d(r, -\omega)} \exp(-\tau(r, \omega, \alpha, t))\varphi(r - t\omega, \omega, \alpha)dt, \tag{8}$$

$$(S\varphi)(r, \omega, \alpha) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_{\omega,\alpha}} k(r, \omega, \omega', \alpha)\varphi(r, \omega', \mathrm{g}(\omega \cdot \omega', \alpha))d\omega'. \tag{9}$$

Лемма 1. *Выражение* (7) *определяет линейный ограниченный оператор, действующий из* $\widehat{W}^p(X)$ *в* $L^p(X)$.

Доказательство. Утверждение леммы очевидным образом вытекает из определения оператора L и ограничений на функции φ и μ. $\square$

Лемма 2. *Выражение* (8) *определяет линейный ограниченный оператор, действующий из* $L^p(X)$ *в* $\widehat{W}^p(X)$.

Доказательство. Линейность введенного оператора очевидна. Покажем его ограниченность. Для удобства обозначим $w(x) = w(r,\omega,\alpha) = (A\varphi)(r,\omega,\alpha)$. Оценим норму функции w в пространстве $L^p(X)$:

$$\|w\|^p_{L^p(X)} = \int\limits_X \left| \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\,\tau(r,\omega,\alpha,t))\varphi(r-t\omega,\omega,\alpha)dt \right|^p dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_X \left(\int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp\left(-\,\frac{p}{p-1}\tau(r,\omega,\alpha,t)\right) dt \right)^{p-1} \int\limits_0^{d(r,-\omega)} |\varphi|^p(r-t\omega,\omega,\alpha)dtdx \leqslant \tag{10}$$
$$\leqslant d^p\|\varphi\|^p_{L^p(X)}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Гельдера и очевидным неравенством $\exp(-\,\tau(r,\omega,\alpha,t)) \leqslant 1$ почти всюду на $G\times\Omega\times[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]\times[0,d]$.

Непосредственно из определения операторов A и L, вытекают равенства

$$w|_{\Gamma^-} = (A\varphi)|_{\Gamma^-} = 0,\ LA\varphi = \varphi.$$

Из последнего соотношения получаем

$$\omega\cdot\nabla_r(A\varphi)(r,\omega,\alpha) = \varphi(r,\omega,\alpha) - \mu(r,\alpha)A\varphi(r,\omega,\alpha)$$

Применяя неравенство Минковского и неравенство (10), можно записать оценку

$$\begin{aligned}\|\omega\cdot\nabla_r(A\varphi)\|_{L^p(X)} &\leqslant \||\varphi| + |\mu A\varphi|\|_{L^p(X)} \leqslant\\ \leqslant \|\varphi\|_{L^p(X)} + \|\mu A\varphi\|_{L^p(X)} &\leqslant \|\varphi\|_{L^p(X)} + \|\mu\|_{L^\infty}\|A\varphi\|_{L^p(X)} \leqslant\\ \leqslant \|\varphi\|_{L^p(X)} + d\|\mu\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^p(X)} &= (1+d\|\mu\|_{L^\infty})\|\varphi\|_{L^p(X)}.\end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, из соотношения (11) и неравенства (6) вытекает цепочка неравенств, из которой следует ограниченность оператора A:

$$\begin{aligned}\|A\varphi\|^p_{\widehat{W}^p(X)} &= \|(A\varphi)|_{\Gamma^-}\|^p_{L^p(\Gamma^-)} + \|\omega\cdot\nabla_r(A\varphi)\|^p_{L^p(X)} \leqslant\\ \leqslant (1+d\|\mu\|_{L^\infty})^p\|\varphi\|^p_{L^p(X)} &\leqslant (1+d\|\mu\|_{L^\infty})^p(d^{1/p}+d)^p\|\varphi\|^p_{\widehat{W}^p(X)}.\end{aligned} \tag{12}$$

$\square$

Лемма 3. *Выражение* (9) *определяет линейный ограниченный оператор, действующий из* $L^p(X)$ *в* $L^p(X)$.

Доказательство. Для удобства обозначим $w(x) = w(r,\omega,\alpha) = (S\varphi)(r,\omega,\alpha)$. Сначала покажем суммируемость функции $w(x)$. Для этого нам достаточно показать, что якобиан отображения $F:\Omega\times[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]\times\Omega_{\omega,\alpha}\to\Omega\times[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]\times\Omega'_{\omega,\alpha}$, определяемого равенством $F(\omega, \omega', \alpha) = (\omega', \mathrm{g}(\omega\cdot\omega', \alpha))$, будет ограничен и отделен от нуля. Здесь $\Omega'_{\omega,\alpha}$ — образ множества $\Omega_{\omega,\alpha}$ при отображении F.

Обозначая через $s = (\theta, \gamma)$ и $s' = (\theta', \gamma')$ сферические углы для переменных ω, ω' соответственно. Получим отображение

$$F(s, s', \alpha) = \Big(\theta, \gamma, \theta', \gamma'), \mathrm{g}(s, s', \alpha)\Big),$$

с якобианом

$$J(F) = \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \alpha} = \frac{1}{\Big(1 + \alpha(\omega\cdot\omega' - 1)\Big)^2}. \tag{13}$$

Из последнего равенства и определения множества $\Omega_{\alpha,\omega}$ вытекает, что при почти всех $\omega,\alpha,\omega' \in \Omega\times[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]\times\Omega_{\omega,\alpha}$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{(1+2\overline{\alpha})^2} \leqslant \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \alpha} \leqslant \left(\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\alpha}}\right)^2. \tag{14}$$

Таким образом, отображение F имеет отделенный от нуля, ограниченный якобиан и, следовательно, переводит измеримые множества в измеримые. Отсюда вытекает суммируемость функции $w(x)$. Ограниченность нормы оператора S следует из соотношений (14) и неравенства Гельдера

$$\|S\varphi\|^p_{L^p(X)} \leqslant \int\limits_X |w(x)|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_X \left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} |k|^{p/(p-1)}(r,\omega,\omega',\alpha)d\omega'\right)^{p-1} \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} |\varphi|^p(r,\omega',\mathrm{g}(\omega\cdot\omega',\alpha))d\omega' dx \leqslant \tag{15}$$

$$\leqslant \|k\|^p_{L^\infty}\frac{1}{4\pi}\int\limits_X\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} |\varphi|^p(r,\omega',\mathrm{g}(\omega\cdot\omega',\alpha))d\omega' dx \leqslant \|k\|^p_{L^\infty}\left(\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\alpha}}\right)^2 \|\varphi\|^p_{L^p(X)}.$$

□

Определение 1. Функцию $f \in \widehat{W}^p(X)$ назовем решением краевой задачи (1), (3) если:

1. при почти всех $(r, \omega, \alpha) \in X$, она удовлетворяет уравнению

$$(Lf)(r, \omega, \alpha) = (Sf)(r, \omega, \alpha) + J(r, \omega, \alpha); \tag{16}$$

2. удовлетворяет граничному условию $f|_{\Gamma^-}(\chi,\omega,\alpha) = h(\chi,\omega,\alpha)$ почти всюду на Γ^-.

Лемма 4. *Для того чтобы функция f была решением задачи* (1), (3), *необходимо и достаточно, чтобы f для почти всех $(r, \omega, \alpha) \in X$ удовлетворяла уравнению*

$$\begin{gathered} f = f_0 + (AS)f, \\ f_0(r, \omega, \alpha) = h(r - d(r, -\,\omega)\omega, \omega, \alpha)\exp(-\,\tau(r, \omega, \alpha)) + \widehat{A}J(r, \omega, \alpha) \end{gathered} \tag{17}$$

в классе функций $\widehat{W}^p(X)$.

Доказательство. Пусть функция $f \in \widehat{W}^p(X)$ — решение краевой задачи (1), (3). Покажем, что она при почти всех $(r,\omega,\alpha) \in X$ удовлетворяет операторному уравнению (17). Применив к обеим частям уравнения (16) оператор A, получаем

$$(ALf)(r,\omega,\alpha) = (ASf)(r,\omega,\alpha) + (AJ)(r,\omega,\alpha). \tag{18}$$

Распишем подробно левую часть данного равенства:

$$\begin{gathered}(ALf)(r,\omega,\alpha) = \\ = \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\tau(r,\omega,\alpha,t))\Big(\omega\cdot\nabla_r f(r-\omega t,\omega,\alpha) + \mu(r-\omega t,\alpha)f(r-\omega t,\omega,\alpha)\Big)dt = \\ = \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\,\tau(r,\omega,\alpha,t))\Big(\frac{\partial f}{\partial t}(r-\omega t,\omega,\alpha) + \mu(r-\omega t,\alpha)f(r-\omega t,\omega,\alpha)\Big)dt.\end{gathered} \tag{19}$$

Учитывая, что при почти всех $(r,\omega,\alpha)\in X$ функция $\tau(r,\omega,\alpha,t)$ будет абсолютно непрерывна по переменной t, как интеграл с переменным верхним пределом интегрирования, а величина $\frac{\partial f}{\partial t}(r-\omega t,\omega,\alpha)$ интегрируема по t, для них справедлива формула интегрирования по частям [10]:

$$\begin{gathered}(ALf)(r,\omega,\alpha) = f(r,\omega,\alpha) - f(r-d(r,-\,\omega),\omega,\alpha)\exp(-\,\tau(r,\omega,\alpha)) - \\ - \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\,\tau(r,\omega,\alpha,t))\Big(-\,\mu(r-\omega t,\alpha)f(r-\omega t,\omega,\alpha) + \\ +\mu(r-\omega t,\alpha)f(r-\omega t,\omega,\alpha)\Big)dt.\end{gathered} \tag{20}$$

Отсюда, подставляя граничное условие (3) приходим к справедливости утверждения леммы. Пусть, теперь, функция $f\in\widehat{W}^p(X)$ удовлетворяет уравнению (17). Покажем, что она будет решением задачи (1), (3).

Нетрудно заметить, что преобразование $\xi = r - d(r,-\,\omega)\omega$ любой точке (r,ω,α) ставит в соответствие единственную точку $(\xi,\omega,\alpha)\in\Gamma^-$. Справедливо и обратное утверждение, что любая точка $(\xi+\omega t,\omega,\alpha)$ при таких t, что $\xi+\omega t\in G$, определяет единственным образом точку $(r,\omega,\alpha)\in X$, при этом $d(r,-\omega)=t$. Пользуясь данными соотношениями, перепишем уравнение (17) в виде

$$\begin{gathered}f(\xi+\omega t,\omega,\alpha) = h(\xi,\omega,\alpha)\exp(-\,\tau(\xi,\omega,\alpha,t)) + \\ + \int\limits_0^t \exp\left(-\int\limits_{t'}^t \mu(\xi+\nu\omega)d\nu\right)(Sf+J)(\xi+\omega t',\omega,\alpha)dt, \\ (\xi,\omega,\alpha)\in\Gamma^-, \qquad t\in[0,d(\xi,\omega)].\end{gathered} \tag{21}$$

Из последнего соотношения при $t{=}0$ очевидным образом вытекает, что $f|_{\Gamma^-}(\xi,\omega,\alpha) = h(\xi,\omega,\alpha)$ почти всюду на Γ^-. Покажем теперь, что функция f удовлетворяет уравнению (2). Дифференцируя тождество (21) по переменной t, имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t} f(\xi+\omega t,\omega,\alpha)=(Sf)(\xi+\omega t,\omega,\alpha)+J(\xi+\omega t,\omega,\alpha)-\\ -\mu(\xi+\omega t,\alpha)\Bigg[h(\xi,\omega,\alpha)\exp(-\tau(\xi,\omega,\alpha,t))+\\ +\int\limits_0^t \exp\left(-\int\limits_{t'}^t \mu(\xi+\nu\omega)d\nu\right)(Sf+J)(\xi+\omega t',\omega,\alpha)dt\Bigg].\end{gathered} \tag{22}$$

Заменяя выражение в квадратных скобках на $f(\xi+\omega t,\omega,\alpha)$ приходим к выводу, что функция f удовлетворяет уравнению (16). Лемма доказана полностью. □

Везде далее для сокращения записи будем обозначать $T=AS$.

Лемма 5. *Для оператора T справедлива оценка*

$$\begin{gathered}|(T^n\varphi)(r_0,\omega_0,\alpha_0)|^p\leqslant\\ \leqslant\frac{d^{n(p-1)}\|k\|^{pn}_{L^\infty}}{(4\pi)^n}\int\limits_0^{d_0}\int\limits_{\Omega_0}\ldots\int\limits_0^{d_{n-1}}\int\limits_{\Omega_{n-1}}|\varphi|^p\,(r_n,\omega_n,\alpha_n)\,d\omega_n dt_n\ldots d\omega_1 dt_1,\end{gathered} \tag{23}$$

где $\Omega_i=\Omega_{\omega_i,\alpha_i}$ $\alpha_i=\mathrm{g}(\omega_{i-1}\cdot\omega_i,\alpha_{i-1})$, $d_i=d(r_i,-\omega_i)$, $r_i=r_{i-1}-\omega_{i-1}t_i$, $i=1,...,n$.

Доказательство. Доказательство леммы проведем методом математической индукции. Для начала проверим базу индукции. Применяя неравенство Гельдера и очевидные оценки $\exp\{-\tau(r,\omega_0,\alpha_0,t)\}\leqslant 1$, $mes_2\Omega_0\leqslant 4\pi$, получаем цепочку неравенств:

$$\begin{gathered}|(T\varphi)(r_0,\omega_0,\alpha_0)|^p=\\ =\left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{d_0}\exp\{-\tau(r_0,\omega_0,\alpha_0,t_1)\}\int\limits_{\Omega_0}k(r_0-\omega_0 t_1,\omega_0\cdot\omega_1,\alpha_0)\varphi(r_0-\omega_0 t_1,\omega_1,\alpha_1)d\omega_1 dt_1\right|^p\leqslant\\ \leqslant\left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{d_0}\int\limits_{\Omega_0}k^{p/(p-1)}(r_0-\omega_0 t_1,\omega_0\cdot\omega_1,\alpha_0)d\omega_1 dt_1\right)^{p-1}\times\\ \times\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{d_0}\int\limits_{\Omega_0}|\varphi|^p(r_0-\omega_0 t_1,\omega_1,\alpha_0)d\omega_1 dt_1\leqslant\frac{d^{p-1}\|k\|^p_{L^\infty}}{4\pi}\int\limits_0^{d_0}\int\limits_{\Omega_0}|\varphi|^p(r_1,\omega_1,\alpha_0)d\omega_1 dt_1.\end{gathered} \tag{24}$$

Таким образом, справедливость оценки (23) при $n=1$ доказана. Пусть теперь оценка

(23) справедлива при $n=m$. Покажем ее справедливость при $n=m+1$.

$$
\begin{gathered}
|(T^{m+1}\varphi)(r_0,\omega_0,\alpha_0)|^p = |(T(T^m\varphi)(r_0,\omega_0,\alpha_0)|^p = \\
= \left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{d_0}\exp\{-\,\tau(r_0,\omega_0,\alpha_0,t_1)\}\int\limits_{\Omega_0} k(r_1,\omega_0\cdot\omega_1,\alpha_0)(T^m\varphi)(r_1,\omega_1,\alpha_1)d\omega_1 dt_1\right|^p \leqslant \\
\leqslant \left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{d_0}\int\limits_{\Omega_0} k^{p/(p-1)}(r_1,\omega_0\cdot\omega_1,\alpha_0)d\omega_1 dt_1\right)^{p-1}\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{d_0}\int\limits_{\Omega_0}|T^m\varphi|^p(r_1,\omega_1,\alpha_0)d\omega_1 dt_1 \leqslant \\
\leqslant \frac{d^{p-1}\|k\|^p_{L^\infty}}{4\pi}\int\limits_0^{d_0}\int\limits_{\Omega_0}|T^m\varphi|^p(r_1,\omega_1,\alpha_0)d\omega_1 dt_1.
\end{gathered}
\tag{25}
$$

Применяя в последнем интеграле гипотезу индукции, после переобозначений приходим к выводу о справедливости оценки (23). □

Сформулируем еще одну лемму, которая нам понадобится при доказательстве разрешимости краевой задачи (1), (3). Ее доказательство может быть найдено в работе [2].

Лемма 6. *Справедливы следующие неравенства:*

$$
\begin{gathered}
0 \leqslant \omega\cdot\omega' - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\overline{\alpha}}, \qquad \omega' \in \Omega_{\omega,\alpha} \\
\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}}\left(\omega\cdot\omega' - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^m d\omega' \leqslant \frac{2\pi}{m+1}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^{m+1}, \qquad m = 0,1,\ldots.
\end{gathered}
$$

Сформулируем основную теорему, устанавливающую разрешимость краевой задачи (1), (3).

Теорема 1. *Решение краевой задачи* (1), (3) *существует и единственно.*

Доказательство. Для доказательства теоремы покажем, что начиная с некоторого номера n_0 будет справедлива оценка $\|T^n\| < 1$, $n \geqslant n_0$, то есть оператор T^n будет сжимающим. Оценим норму оператора T^n в пространстве $L^p(X)$. Используя оценку (23), имеем

$$
\begin{gathered}
\|T^n\varphi\|^p_{L^p(X)} = \int\limits_G\int\limits_\Omega\int\limits_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}}|T^n\varphi|^p(r_0,\omega_0,\alpha_0)dr_0 d\omega_0 d\alpha_0 \leqslant \\
\leqslant \frac{d^{n(p-1)}\|k\|^{pn}_{L^\infty}}{(4\pi)^n}\int\limits_G\int\limits_\Omega\int\limits_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}}\int\limits_0^{d_0}\int\limits_{\Omega_0}\ldots\int\limits_0^{d_{n-1}}\int\limits_{\Omega_{n-1}}|\varphi|^p\left(r_n,\omega_n,\alpha_n\right)d\omega_n dt_n\ldots d\omega_1 dt_1 d\alpha_0 d\omega_0 dr_0.
\end{gathered}
\tag{26}
$$

Обозначим через $\chi_G(r)$ характеристическую функцию множества G и перепишем

(26) в виде

$$\|T^n\varphi\|^p_{L^p(X)} \leqslant \frac{d^{n(p-1)}\|k\|^{pn}_{L^\infty}}{(2\pi)^n}\times$$

$$\times\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}}\int\limits_{0}^{d}\int\limits_{\Omega_0}\ldots\int\limits_{0}^{d}\int\limits_{\Omega_{n-1}}\int\limits_{G}\chi_G(r_1)\ldots\chi_G(r_n)|\varphi|^p\,(r_n,\omega_n,\alpha_n)\,dr_0d\omega_ndt_n\ldots d\omega_1dt_1d\alpha_0d\omega_0. \tag{27}$$

Рассмотрим интеграл по области G более подробно. Вводя замену переменных $z=r_n$ с единичным якобианом, получим оценку

$$\int\limits_{G}\chi_G(r_1)\ldots\chi_G(r_n)|\varphi|^p\,(r_n,\omega_n,\alpha_n)\,dr_0 \leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{G}\chi_G(r_n)|\varphi|^p\,(r_n,\omega_n,\alpha_n)\,dr_0 \leqslant \int\limits_{G}|\varphi|^p\,(z,\omega_n,\alpha_n)\,dz.$$

С учетом последнего неравенства можно переписать оценку (27) в виде

$$\|T^n\varphi\|^p_{L^p(X)} \leqslant \frac{d^{np}\|k\|^{pn}_{L^\infty}}{(4\pi)^n}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}}\int\limits_{\Omega_0}\cdots\int\limits_{\Omega_{n-1}}\int\limits_{G}|\varphi|^p\,(z,\omega_n,\alpha_n)\,dzd\omega_n\ldots d\omega_1d\alpha_0d\omega_0. \tag{28}$$

Введем в рассмотрение величины $\underline{\alpha}_i=\mathrm{g}(\omega_{i-1}\cdot\omega_i,\underline{\alpha}_{i-1}),\underline{\alpha}_0=\underline{\alpha}$ и соответствующие им множества $\underline{\Omega}_i=\Omega_{\omega_i,\underline{\alpha}_i}$, $i=0,..,n-1$.

Непосредственно из определения множества $\Omega_{\omega,\alpha}$ вытекает, что для любого фиксированного направления $\omega\in\Omega$ и энергий $\alpha_1,\alpha_2\in[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]$ таких, что $\alpha_1<\alpha_2$, следует, что $\Omega_{\omega,\alpha_2}\subset\Omega_{\omega,\alpha_1}$. Кроме того, для любых $\alpha_1,\alpha_2\in[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]$ таких, что $\alpha_1<\alpha_2$, и для любого $\omega'\in\Omega_{\omega,\alpha_1}\bigcap\Omega_{\omega,\alpha_2}$ справедливо неравенство $\mathrm{g}(\omega\cdot\omega',\alpha_2)\leqslant\mathrm{g}(\omega\cdot\omega',\alpha_1)$. Справедливость данного замечания вытекает непосредственным образом из строгой положительности производной функции g, которая следует из (14). Таким образом, справедливы неравенства и включения

$$\underline{\alpha}_i\leqslant\alpha_i,\quad \Omega_i\subset\underline{\Omega}_i,\qquad i=1,...,n-1,$$

учитывая которые мы можем преобразовать (28) к виду

$$\|T^n\varphi\|^p_{L^p(X)} \leqslant \frac{d^{pn}\|k\|^{pn}_{L^\infty}}{(4\pi)^n}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\underline{\Omega}_0}\cdots\int\limits_{\underline{\Omega}_{n-1}}\int\limits_{G}\int\limits_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}}|\varphi|^p\,(z,\omega_n,\alpha_n)\,d\alpha_0dzd\omega_n\ldots d\omega_1d\omega_0.$$

Делая замену переменных $\alpha'=\alpha_n$ и учитывая неравенство (14), приходим к оценке

$$\|T^n\varphi\|^p_{L^p(X)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{d^{pn}\|k\|^{pn}_{L^\infty}}{(4\pi)^n}\left(\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\alpha}}\right)^2\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\underline{\Omega}_0}\ldots\int\limits_{\underline{\Omega}_{n-2}}d\omega_{n-2}\ldots d\omega_1d\omega_0\int\limits_{G}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}}|\varphi|^p\,(z,\omega_n,\alpha')\,d\alpha'd\omega_ndz\leqslant$$

$$\leqslant\frac{d^{pn}\|k\|^{pn}_{L^\infty}}{(4\pi)^n}\left(\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\alpha}}\right)^2\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\underline{\Omega}_0}\cdots\int\limits_{\underline{\Omega}_{n-2}}d\omega_{n-2}\ldots d\omega_1d\omega_0\|\varphi\|^p_{L^p(X)}$$

Вычисляя последовательно при помощи леммы 6 оставшиеся интегралы аналитически, окончательно приходим к неравенству

$$\|T^n\varphi\|^p_{L^p(X)} \leqslant \frac{d^{pn}\|k\|^{pn}_{L^\infty}}{2^n n!}\left(\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\alpha}}\right)^2\left(\frac{1}{\underline{\alpha}}-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^n\|\varphi\|^p_{L^p(X)}.$$

Оценим норму оператора T^n в пространстве $\widehat{W}^p(X)$

$$\|T^n\varphi\|^p_{\widehat{W}^p(X)} = \Big(\|(T^n\varphi)|_{\Gamma^-}\|_{L^p(\Gamma^-)} + \|\omega\cdot\nabla_r T^n\varphi\|^p_{L^p(X)}\Big) = \|\omega\cdot\nabla_r T^n\varphi\|^p_{L^p(X)} =$$
$$= \int\limits_X |\omega\cdot\nabla_r(AST^{n-1}\varphi)(r,\omega,\alpha)|^p dx \leqslant (1+d\|\mu\|_{L^\infty})^p\|ST^{n-1}\varphi\|^p_{L^p(X)} \leqslant$$
$$\leqslant (1+d\|\mu\|_{L^\infty})^p\|k\|^p_{L^\infty}\left(\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\alpha}}\right)^2\|T^{n-1}\varphi\|^p_{L^p(X)} \leqslant$$
$$\leqslant (1+d\|\mu\|_{L^\infty})^p\frac{d^{p(n-1)}\|k\|^{pn}_{L^\infty}}{2^{n-1}(n-1)!}\left(\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\alpha}}\right)^2\left(\frac{1}{\underline{\alpha}}-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^{n-1}\|\varphi\|^p_{L^p(X)} \leqslant$$
$$\leqslant (1+d\|\mu\|_{L^\infty})^p\frac{d^{p(n-1)}\|k\|^{pn}_{L^\infty}}{2^{n-1}(n-1)!}\left(\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\alpha}}\right)^2\left(\frac{1}{\underline{\alpha}}-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^{n-1}(d^{1/p}+d)^p\|f\|^p_{\widehat{W}^p(X)}.$$

Из последней оценки вытекает, что найдется такой номер n, начиная с которого будет выполняться неравенство $\|T^n\| < 1$.Таким образом, n-ая степень оператора T будет сжимающим оператором. Отсюда на основании теоремы о неподвижной точке для сжимающих отображений, переводящих банахово пространство в себя [11], следует, что уравнение (17), а значит, и краевая задача (2), (3) имеет единственное решение в классе $\widehat{W}^p(X)$.

□

Список литературы

[1] Д. С. Аниконов, Д. С. Коновалова, “Кинетическое уравнение переноса для случая комптоновского рассеяния”, *Сибирский математический журнал*, **43**:5, (2002), 987–1001.

[2] Д. С. Аниконов, Д. С. Коновалова, “Краевая задача для уравнения переноса с чисто комптоновским рассеянием”, *Сибирский математический журнал*, **46**:1, (2005), 3–16.

[3] И. П. Яровенко, “О разрешимости краевой задачи для уравнения переноса излучения с учетом комптоновского рассеяния”, *Дальневост. матем. журн.*, **14**:1, (2014), 109–121.

[4] А. В. Чернов, “Об одном мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемых распределенных систем”, *Дифференциальные уравнения*, **52**:1, (2016), 112.

[5] В. С. Владимиров, *Математические задачи односкоростной теории переноса частиц*, Тр. МИАН СССР, , Изд-во АН СССР, М., 1961, 61 с.

[6] Т. А. Гермогенова, “Обобщенные решения краевых задач для уравнения переноса”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **9**:3, (1969), 605—625.

[7] В. И. Агошков, *Обобщенные решения уравнения переноса и свойства их гладкости*, Наука, М., 1988.

[8] В. А. Зорич, *Математический анализ*, Наука, М., 1984.

[9] А. А. Амосов, *Краевые задачи для уравнения переноса излучения с условиями отражения и преломления*, Тамара Рожковская, Новосибирск., 2017.

[10] С. М. Никольский, *Курс математического анализа*, Наука, М., 1975.

[11] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Физматлит, М., 2004.

Поступила в редакцию
2 ноября 2018 г.

Yarovenko I. P. Unique solvability of boundary value problem for a polychromatic radiation transfer equation. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2019. V. 19. No 1. P. 96–107.

ABSTRACT

The paper deals with a boundary value problem for a radiation transfer equation. It's assumed that Compton scattering is predominant effect in media. The boundary value problem is reduced to an integral equation of Volterra type. The result of the work is the theorem provides existence and uniqueness of solution for the boundary value problem of the radiative transfer equation.

Key words: *radiation transfer theory, Compton scattering.*