Дальневосточный математический журнал. 2019. Т. 19. № 1. С. 108–113

Краткие сообщения

УДК 517.9
MSC2010 76B47

© А. Б. Моргулис[1]

Стабилизация вихревых течений сквозь кольцевую область

В заметке рассмотрена плоская нестационарная задача протекания идеальной несжимаемой и однородной жидкости сквозь кольцевую область, и дано описание поведения её решений при $t \to +\infty$.

Ключевые слова: *идеальная жидкость, задача протекания, вихревые потоки, стабилизация.*

Введение

Г. В. Алексеев [1], по-видимому, первым указал на возможность стабилизации стационарного решения уравнений динамики идеальной несжимаемой жидкости. Он рассмотрел задачу протекания жидкости сквозь плоский канал, и установил, что при нагнетании в канал безвихревой жидкости и при выполнении некоторых дополнительных условий согласования все достаточно малые вихревые возмущения, первоначально локализованные внутри канала, выносятся из него за конечное время, так что установившийся режим течения оказывается потенциальным. Дальнейшее развитие этого результата, в частности, его обобщение на вихревые потоки в канале см. в [2–5]. В данной заметке речь идёт о течениях, вызываемых нагнетанием завихренной жидкости в кольцевую область. В этом случае установившееся течение невозможно [2]. Тем не менее мы указываем некую «асимптотику» при $t \to +\infty$.

1. Задача протекания

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — кусочно-гладкая область, $S = \partial D$, $S_* \subset S$ — множество «вершин», в которых нормаль к границе не определена, $\mathbf{n}$ — орт *внешней* нормали на $S \setminus S_*$. Пусть в области $D_0 \supset \overline{D}$ заданы функции $\gamma = \gamma(x), \omega^+ = \omega^+(x)$, причём $\gamma \in \mathrm{C}(D_0)$,

[1] ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ и ЮФУ, 344002, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а. Электронная почта: `morgulisandrey@gmail.com`

$\omega^+ \in \mathrm{C}(D_0)$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\mathbf{v}_t + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla H; \quad H = P + \mathbf{v}^2/2; \quad \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v} \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \tag{2}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{S \setminus S_*} = \gamma; \tag{3}$$

$$\omega|_{S^+} = \omega^+, \quad S^+ = \{x \in S \setminus S_* : \ \gamma(x) < 0\}; \tag{4}$$

здесь уравнения Эйлера (1)–(2) рассматриваются в цилиндре $D \times \{t > 0\}$; неизвестные — векторное поле (скорость) $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,t)$ и скалярное поле (давление) $P = P(x,t)$; так как поле плоское, $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3$, $\omega = v_{2x_1} - v_{1x_2}$, где нижние индексы x_1, x_2 обозначают частные производные по одноименным декартовым координатам, а v_1, v_2 — соответствующие проекции поля скорости. Предполагается, что заданная нормальная скорость γ согласуется с уравнением (2), выражающим несжимаемость жидкости. Множество S^+ представляет собой вход потока в канал. Наряду со входом, нормальная скорость определяет выход потока $S^- = \{x \in S \setminus S_* : \gamma(x) > 0\}$, и непроницаемые стенки $S^0 = \{x \in S \setminus S_* : \gamma(x) = 0\}$. В общем случае $\gamma = \gamma(x,t)$ и $\omega^+ = \omega^+(x,t)$, но мы не рассматриваем здесь эту возможность.

Существование глобального классического решения задачи (1)–(4) при заданном начальном условии $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0$ при $t = 0$ установил В. И. Юдович [6], при этом область и другие данные считались достаточно гладкими, а вход, выход и непроницаемые стенки — объединениями компонент связности границы. Обобщения см. в [7, 8].

В цитированной выше работе Алексеева под каналом понимается криволинейный четырёхугольник с ненулевыми углами при вершинах, причём одна пара противоположных сторон представляет собой вход и выход, а другая — непроницаемые стенки. Если D — канал, и $\omega^+ = 0$ (безвихревой вход), то задача (1)–(4) имеет потенциальное стационарное решение $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, где $\Delta\varphi = 0$ в D, $d\varphi/dn = \gamma$ на S. Стабилизация заключается в том, что для любого решения задачи (1)–(4), удовлетворяющего определённым условиям малости и согласования, найдётся $T \in (0, +\infty)$, такое, что это нестационарное решение совпадает с потенциальным при всех $t > T$.

2. Вспомогательные конструкции

С целью описания движения материальных частиц потока жидкости, рассматриваемого в заданной области D при $t > 0$, поставим задачу Коши

$$\partial_s X = \mathbf{v}(X, s); \quad X|_{s\,=\,t} = x, \tag{5}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,t)$ – поле скорости течения. Предположим, что $\mathbf{v} \in \mathrm{C}^1(\overline{D \times \{t > 0\}})$. Найдутся $\tau_1 = \tau_1(x,t) \in (0,t)$ и $\tau_2 = \tau_2(x,t) > t$ такие, что решение $X = X(s,x,t)$ определено для всех $s \in (\tau_1(x,t), \tau_2(x,t))$. Отображение $s \mapsto X(s,x,t)$ указанной задачи параметризует путь материальной частицы, находящейся в момент времени $t > 0$ в точке $x \in D$. Этот путь — характеристика уравнений движения (1)–(2).

Определение 1. Временем, местом рождения и возрастом материальной частицы назовём, соответственно, функции τ, a, δ, определённые равенствами

$$\tau(x,t) = \inf\{s > 0 : \ X(s,x,t) \in D\}; \ a(x,t) = \lim_{s \to \tau(x,t)} X(s,x,t); \ \delta = t - \tau.$$

Если граница S области течения D полностью непроницаема для всех $t>0$, то $\tau(x,t)=0$, $\delta(x,t)=t$ для всех $x\in D\cup S$ и $t>0$ и $a(\cdot,t)=X(0,\cdot,t)$ — диффеоморфизм $D\to D$ и $S\to S$ для всех $t>0$. Если же $\tau(x,t)>0$, то $a(x,t)=X(\tau(x,t),x,t)\in S^+$.

Пример (Течение в круговом кольце). *Пусть $\rho=|x|$, $D=\{1<\rho<\rho_0\}$ и θ — азимутальная координата. Пусть $\mathbf{v}=(u,v)$ в полярных координатах ρ,θ. Полагаем*

$$u=\frac{q}{2\pi\rho},\ v=\frac{\kappa t+\kappa_0}{2\pi\rho}-\frac{\Omega\rho}{2},\ q,\kappa,\kappa_0,\Omega=\ \mathrm{const},\ q>0,\ \kappa=q\Omega. \tag{6}$$

Непосредственная проверка показывает, что поле (6) — точное решение задачи (1)–(4) в круговом кольце $D=\{1<\rho<\rho_0\}$, где следует положить

$$\gamma|_{\rho\,=\,1}=\ -\frac{q}{2\pi},\ \gamma|_{\rho\,=\,\rho_0}=\frac{q}{2\pi\rho_0},\ \omega^+=\Omega.$$

(мы не приводим выражение давления). Таким образом, $S^+=\{\rho=1\}$, $S^-=\{\rho=\rho_0\}$; при этом азимутальная скорость линейно растёт со временем. Движение $X=(R,\Theta)(s,\rho,\theta,t)$ определяет задача Коши

$$R_s=\frac{q}{2\pi R},\quad \Theta_s=\frac{\kappa s+\kappa_0}{2\pi R^2}-\frac{\Omega}{2},\quad R|_{s\,=\,t}=\rho,\ \Theta|_{s\,=\,t}=\theta.$$

Время рождения и возраст материальных частиц распределены так

$$\tau(x,t)=\ \max\left(t-\frac{\pi(\rho^2-1)}{q},0\right),\quad \delta(x,t)=\ \min\left(\frac{\pi(\rho^2-1)}{q},t\right).$$

Определение 2. Гладкую ограниченную двусвязную область плоскости $\mathbb{R}^2$ назовём кольцевой.

Оказывается, в произвольной кольцевой области определено течение типа (6).

Предложение 1. *Пусть в кольцевой области D поставлена задача (1)–(4), причём $\omega^+=\mathrm{const}$, а нормальная скорость γ задана так, что S^+ и S^- совпадают с компонентами связности $S=\partial D$. Тогда задача (1)–(4) имеет решение $\mathbf{V}$, линейно растущее со временем. Это решение выражается следующим образом:*

$$\mathbf{V}=(t\kappa+\kappa_0)\mathbf{h}+q\nabla\psi_h+\nabla^\perp\psi,\quad \text{где } \nabla^\perp=(\partial_{x_2},-\partial_{x_1}); \tag{7}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{h}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{h}=0\ \text{в}\ D,\quad \mathbf{h}\cdot\mathbf{n}|_S=0;\quad \oint\limits_{S^+}\mathbf{h}\cdot\mathbf{dx}=1;$$

$$\mathbf{h}=\nabla^\perp\psi_h:\ \Delta\psi_h=0\ \text{ в } D,\ \psi_h|_{S^+}=c^+=\ \mathrm{const},\ \psi_h|_{S^-}=0,\ \int\limits_{S^+}\frac{d\psi_h}{dn}ds=\ -1; \tag{8}$$

$$\kappa=\ -\int\limits_{S^+}\omega^+\gamma\,ds;\ q=\ -\int\limits_{S^+}\gamma\,ds;\ \kappa_0=\int\limits_{S^+}\mathbf{v}^0\cdot\mathbf{dx}; \tag{9}$$

$$-\Delta\psi=\omega^+\ \text{в}\ D,\ \psi|_{S^+}=\psi^+,\ \psi|_{S^-}=\psi^-,\quad d\psi^\pm=\left(\gamma-q\frac{d\psi_h}{dn}\right)ds\ \text{на}\ S^\pm; \tag{10}$$

Доказательство. Утверждение проверяется непосредственно. При этом полезно заметить, что нормировка функции ψ_h, указанная в (8) достигается выбором константы c^+, а однозначность функций $\psi^\pm$ — равенствами $\int\limits_{S^\pm} d\psi^\pm = 0$. (см. (10)) □

Замечание 1. Из выражений коэффициента κ, данного в (9), видно, что решение (7) задачи (1)–(4) растёт линейно при любых данных, удовлетворяющих условию $\omega^+ = \mathrm{const}$, за исключением $\omega^+ = 0$. В последнем случае решение (7) стационарно.

3. Основной результат

Теорема 1. *Пусть в кольцевой области D поставлена задача* (1)–(4), *причём* $\omega^+ = \mathrm{const}$, *а нормальная скорость γ задана так, что S^+ и S^- совпадают с компонентами связности $S = \partial D$. Пусть, кроме того, задано начальное условие: $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0$ при $t = 0$ и выполнены все условия гладкости и согласования данных, достаточные для существования классического решения $\mathbf{v}$ указанной начально-краевой задачи. Тогда $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{u}$, где поле $\mathbf{V}$ — точное решение задачи* (1)–(4), *введённое предложением 1, а возмущение $\mathbf{u}$ удовлетворяет условиям:*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ на } S; \quad \oint\limits_{S^+} \mathbf{u}\cdot\mathbf{dx} = 0; \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_D f(\mathrm{rot}\,\mathbf{u})\,dx = -\int\limits_{S^-} f(\mathrm{rot}\,\mathbf{u})\gamma\,ds \leqslant 0, \quad \forall f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}) : f(0) = 0. \tag{12}$$

где $\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = u_{2x_1} - u_{1x_2}$. *Если, к тому же, поле $\mathbf{V}$ удовлетворяет условию*

$$\sup\{\delta(x,t),\ x \in D,\ t > 0\} = t_* < \infty, \tag{13}$$

то найдётся $\epsilon = \epsilon(\mathbf{V}) > 0$ такое, что для любого течения $\mathbf{v}$ с начальной скоростью $\mathbf{v}_0 : \sup_D |\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_0 - \omega^+| < \epsilon$ найдётся $T = T(\mathbf{v}, \mathbf{V}) :\ \mathbf{v}(\cdot, t) = \mathbf{V}\ \forall t > T$.

Итак, теорема 1 даёт достаточные условия существования режима протекания идеальной несжимаемой жидкости сквозь кольцевую область, обладающего своего рода «нильпотентной устойчивостью»: возмущения, созданные однажды, полностью затухают *за конечное* время. Существенное отличие теоремы 1 от аналогичных утверждений, относящихся к задаче протекания в плоском канале (см. [1–5]) заключается в том, что нильпотетно устойчивое движение жидкости в канале стационарно, а в кольце — нестационарно с доминированием равномерно ускоряющегося безвихревого вращения.

Замечание 2. Из (12) явствует, что система (1)–(4) имеет невозрастающие функционалы Ляпунова, в частности, не возрастают нормы $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ в $\mathrm{L_p}(D)$, $p \in (1, \infty)$, причём эта монотонность не зависит ни от условий малости возмущения, ни от условия (13). Отсюда, с учётом равенств (11), вытекает равномерная по времени априорная оценка нормы $\mathbf{u}$ в $\mathrm{W}^{1,\mathrm{p}}(D)$. Поэтому рост частного решения $\mathbf{V}$ определяет рост общего решения $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{u}$, причём последний всегда линеен (за исключением случая $\omega^+ = 0$, когда решение $\mathbf{V}$ стационарно).

Замечание 3. Пусть область течения – круговое кольцо. Тогда решение $\mathbf{V}$ имеет вид (6), и такое поле $\mathbf{V}$ удовлетворяет условию (13) при любых значениях параметров. В случае общей кольцевой области поле $\mathbf{V}$, указанное в предложении 1, удовлетворяет условию (13), если данные γ, ω^+ таковы, что решение ψ задачи Дирихле (10) достаточно мало по норме $\mathrm{C}^1(\bar{D})$.

Замечание 4. Если поле $\mathbf{V}$ удовлетворяет условию (13), то $\tau(x,t) > 0$ для всех $x \in D \cup S$ при всех $t > t_*$, так что поток полностью состоит из «новых» частиц, прошедших через вход. Более того, условие (13) влечёт компактность *всех* характеристик уравнений Эйлера (1)–(4) в цилиндре $(D \cup S) \times \{t > 0\}$.

Замечание 5. Доказательство теоремы 1 проводится по схеме, использованной в работах [1], [4]. Поскольку частное решение $\mathbf{V}$ имеет постоянный вихрь, вихрь возмущения $\mathbf{u}$ переносится течением $\mathbf{v} = \mathbf{V} + u$ как пассивный скаляр. Отсюда вытекает существование функционалов Ляпунова и априорная оценка, о которой говорилось в замечании 2. Эта оценка позволяет доказать, что условие (13) сохраняется при достаточно малом начальном возмущении поля $\mathbf{V}$. Соответствующее условие малости в теореме 1 сформулировано довольно грубо ради простоты и наглядности, и может быть значительно ослаблено.

Список литературы

[1] Г. В. Алексеев, “О стабилизации решений двумерных уравнений динамики идеальной жидкости”, *Прикл. мех. техн. физ.*, **102**:2, (1977), 85—92.

[2] А. Б. Моргулис, В. И. Юдович, “Асимптотическая устойчивость стационарного режима протекания идеальной несжимаемой жидкости”, *Сиб. матем. журн.*, **43**:4, 840–857.

[3] A. Morgulis, V. Yudovich, “Arnold’s method for asymptotic stability of steady inviscid incompressible flow through a fixed domain with permeable boundary”, Chaos, **12**:2, 356–371.

[4] A. B. Morgulis, “Non-linear Asymptotic Stability for the Through-Passing Flows of Inviscid Incompressible Fluid”, *Asymptotic Analysis*, **66**, 229–247.

[5] А. Б. Моргулис, “Вариационные принципы и устойчивость открытых течений идеальной несжимаемой жидкости”, *Сибирские электронные математические известия*, **14**, 218—251.

[6] В. И. Юдович., “Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости через заданную область”, *Матем. сборник*, **64 (106)**:4, (1964), 562–588.

[7] Г. В. Алексеев, “О разрешимости неоднородной краевой задачи для двумерных нестационарных уравнений динамики идеальной жидкости”, *Динамика сплошной среды*, **24**, (1976), 15–35.

[8] C. Bardos, “Existence et Unicite de la Solution de l’Equation d’Euler en Dimention Deux”, *J. Math. Analysis Appl.*, **40**, (1972), 769—790.

Поступила в редакцию
20 апреля 2019 г.

Morgulis A. B. Stabilization of vortex flows through an annular domain. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2019. V. 19. No 1. P. 108–113.

ABSTRACT

In this note, we consider the planar nonstationary through-flow problem for ideal incompressible and homogeneous fluid in an annular domain and describe the behavior of its solutions when $t \to +\infty$.

Key words: *inviscid fluid flow, vortex flow, through flow, stabilization.*