Дальневосточный математический журнал. 2019. Т. 19. № 1. С. 114–118

УДК 519.873+519.876
MSC2010 62N05+90B25

© Г. Ш. Цициашвили[1]

Логико-вероятностное моделирование по модульному принципу

Целью настоящей работы является определение системы, сконструированной по модульному принципу, и построение рекурсивного алгоритма вычисления ее надежности.

Ключевые слова: *булева функция, рекурсивное определение, надежность, модульный принцип.*

Введение

В работе [1] излагаются основы логико-вероятностного моделирования сложных систем, используемые в задачах надежности. В последнее время появляется все больше технических конструкций, основанных на модульном принципе. Модульный принцип применяется при проектировании вычислительной техники [2], станков с программным управлением и промышленных роботов [3], при моделировании процессов промышленного производства, в частности, в нефтехимии [4] и т.д. Однако математического эквивалента понятию модульного принципа в этих задачах нет.

В настоящей работе дается определение системы, построенной по модульному принципу. Для этой цели система описывается с помощью монотонной булевой функции, характеризующей ее работоспособность. Булевой функции (характеризующей работоспособность) сопоставляется ориентированное дерево. От любого листа этого дерева существует (единственный) путь к его корню. Полагаем, что все ребра этого пути направлены в сторону корня. Строится рекурсивный алгоритм вычисления булевой функции и надежности системы, описываемой этой функцией. Доказывается, что число арифметических операций для вычисления булевой функции, построенной по модульному принципу, и надежности системы зависит линейно от числа листьев в дереве. Тогда как для систем общего вида эта зависимость является экспоненциальной.

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7; Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8; Электронная почта: `guram@iam.dvo.ru`

1. Основные результаты

Пусть работоспособность системы определяется булевой функцией $A(x_1,\dots,x_n)$, где $x_1,\dots,x_n$ — булевы переменные, характеризующие работоспособность отдельных элементов системы: если $x_k=1$, то элемент k находится в рабочем состоянии, иначе элемент k отказывает, $k=1,\dots,n$. Предположим, что булевы переменные $x_1,\dots,x_n$ являются независимыми случайными величинами, $P(x_1=1)=p_1,\dots,P(x_n=1)=p_n$.

Естественно предположить, что булева функция A, описывающая состояние системы, является монотонной. Иными словами, для любых наборов булевых переменных $(x_1,\dots,x_n)$, $(x_1^*,\dots,x_n^*)$ из соотношений $x_1^*\leqslant x_1,\dots,x_n^*\leqslant x_n$ следует неравенство $A(x_1^*,\dots,x_n^*)\leqslant A(x_1,\dots,x_n)$. Известно, что любая монотонная булева функция $A(x_1,\dots,x_n)$ может быть определена с помощью суперпозиции операций конъюнкции и дизъюнкции [5].

Скажем, что монотонная булева функция $A(x_1,\dots,x_n)$, представимая в виде суперпозиции операций конъюнкции и дизъюнкции, подчиняется модульному принципу, если она определяется дизъюнкцией или конъюнкцией булевых функций только от непересекающихся наборов булевых переменных

$$A_1(x_k:\ k\in K_1),\ A_2(x_k:\ k\in K_2),\ K_1,K_2\subseteq\{1,\dots,n\},\ K_1\cap K_2=\emptyset. \tag{1}$$

Для этого монотонную булеву функцию $A(x_1,\dots,x_n)$ представим с помощью ориентированного дерева D с n листьями, в которых находятся булевы переменные $x_1,\dots,x_n$. Ребра дерева D направлены от листьев к корню дерева. В каждой вершине дерева D, не являющейся листом, помещен значок конъюнкции или дизъюнкции. В каждую такую вершину входит два ребра, и из нее выходит одно ребро. Методом математической индукции несложно доказать, что в дереве D число вершин, не являющихся листьями, равно $n-1$.

На каждом шаге алгоритма определения булевой функции $A(x_1,\dots,x_n)$ выделяются два листа, от которых ребра направлены непосредственно к одной вершине, содержащей операцию конъюнкции или дизъюнкции. После вычисления этой булевой операции над переменными, находящимися в листьях, образуется новый лист и в результате общее число листьев уменьшается на единицу. Данный алгоритм состоит из $n-1$ шагов и продолжается до тех пор, пока у дерева не останется ровно одна вершина. Один шаг вычисления булевой функции $A(x_1,\dots,x_n)$ представлен на рис. 1. Индукцией по n можно доказать, что такое определение булевой функции $A(x_1,\dots,x_n)$ является корректным, т.е. не зависит от порядка выделения пар листов, операция конъюнкции или дизъюнкции которых приводит к образованию нового листа (см. рис. 1).

Перейдем теперь к описанию алгоритма последовательного вычисления вероятности $P(A(x_1,\dots,x_n)=1)$. Для этого в листьях дерева D заменим булевы переменные $x_1,\dots,x_n$ на вероятности $p_1,\dots,p_n$. В свою очередь, операцию конъюнкции $x_1\wedge x_2$ заменим на операцию $p_1\otimes p_2=p_1\cdot p_2$, а операцию дизъюнкции $x_1\vee x_2$ – на операцию $p_1\oplus p_2=p_1+p_2-p_1p_2$. В результате такой замены алгоритм вычисления булевой функции $A(x_1,\dots,x_n)$ преобразуется в алгоритм вычисления функции надежности $P(A(x_1,\dots,x_n)=1)$.

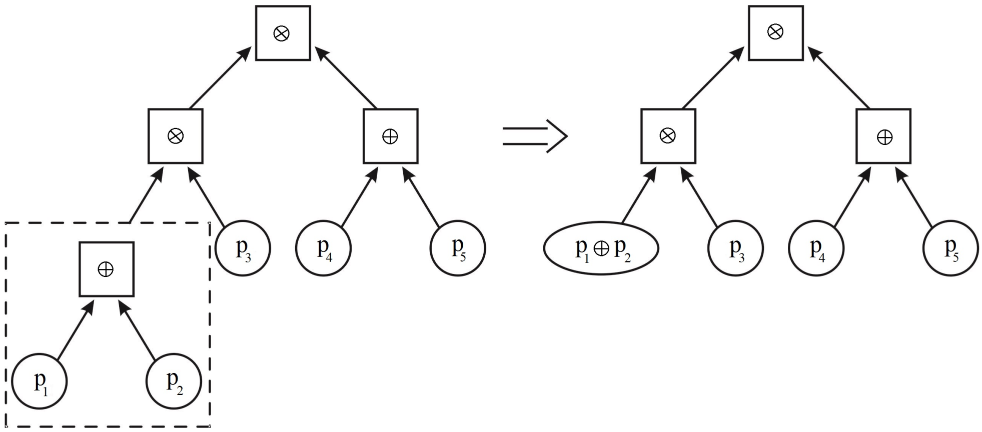

Рис. 1. Ориентированные деревья, изображающие построение функции $A(x_1, ..., x_n)$.

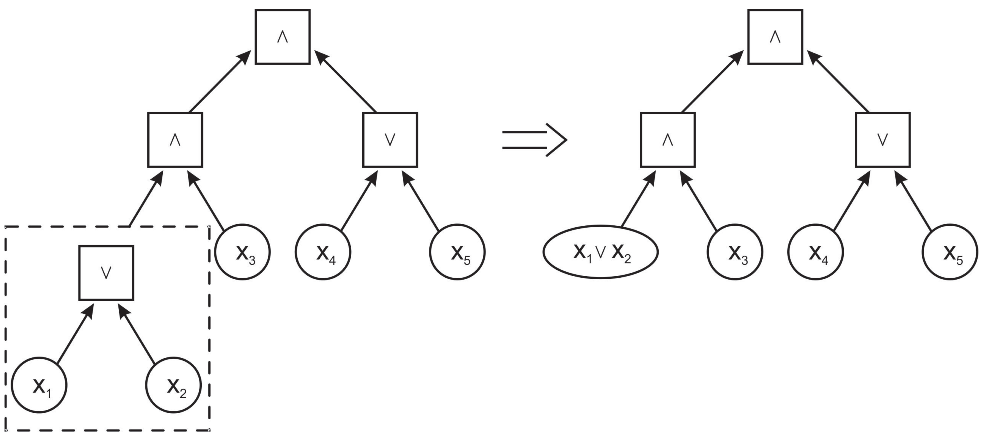

Рис. 2. Ориентированные деревья, изображающие последовательность операций вычисления надежности $P(A(x_1, \ldots, x_n) = 1)$.

Следует отметить, что количество арифметических операций N_1 для вычисления вероятности $P(A(x_1, ..., x_n) = 1)$ в случае, когда система подчиняется модульному принципу, определяется равенством $N_1 = 3n_{\oplus} + n_{\otimes} = O(n)$, где $n_{\oplus}$ — число вершин вида $\oplus$, $n_{\otimes}$ – число вершин вида $\otimes$ в дереве D, $n_{\oplus} + n_{\otimes} = n-1$. Для сравнения заметим, что в общем случае, когда булева функция $A(x_1, ..., x_n)$ не подчиняется модульному принципу, вероятность $P(A(x_1, ..., x_n) = 1)$ определяется равенством

$$P(A(x_1, \ldots, x_n) = 1) = \sum_{x_1, ..., x_n = 0}^{1} A(x_1, \ldots, x_n) \prod_{k=1}^{n} p_k^{x_k}. \tag{2}$$

В формуле (2) величина p^x, $0 \leqslant p \leqslant 1$, $x = 0, 1$, определяется соотношениями: если

$x=1$, то $p^x=p$, если $x=0$, то $p^x=1-p$. В правой части формулы (2) содержится 2^n слагаемых, поэтому количество N_2 арифметических операций для вычисления вероятности $P(A(x_1,\dots,x_n)=1)$ удовлетворяет неравенству $N_2 \geqslant 2^n$.

Булеву функцию $A(x_1,\dots,x_n)$, удовлетворяющую модульному принципу, можно представить как индикатор соединения начальной и конечной вершин двухполюсника с n ребрами. Для этого листья дерева D заменяются на двухполюсники, изображающие отдельные элементы системы.

Далее заменяем два листа, соединенных в дереве D булевой операцией конъюнкции или дизъюнкции (см. рис. 1), на последовательное или параллельное соединение двухполюсников (см. рис. 3), помещенных вместо этих листов. Данная процедура рекурсивно продолжается до построения двухполюсника, соответствующего логической функции A.

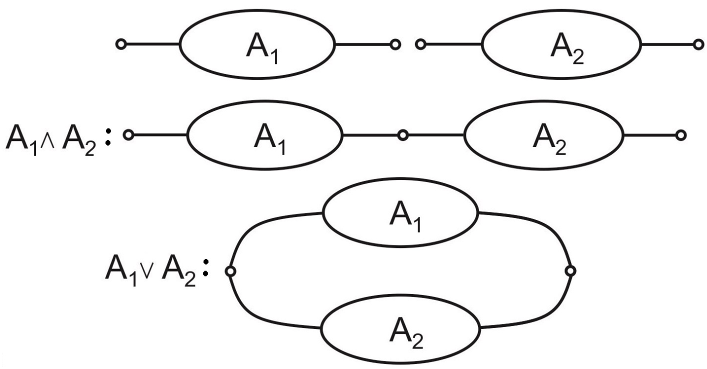

Рис. 3. Двухполюсники, изображающие булевы функции $A_1,\ A_2,\ A_1 \wedge A_2,\ A_1 \vee A_2$.

Следовательно, если известны вероятности p_k, $k=1,\dots,n$, работоспособности отдельных элементов, то можно вычислить вероятность работоспособности всей системы с помощью рекурсивных формул для вероятности работы последовательных и параллельных соединений отдельных элементов.

Автор благодарит О. В. Абрамова за полезное обсуждение постановки задачи.

Список литературы

[1] И. А. Рябинин, “Логико-вероятностное исчисление как аппарат исследования надежности и безопасности структурно-сложных систем”, *Автоматика и телемеханика*, **7**, (2003), 178—186.

[2] Л. А. Малинина, В. В. Лысенко, М. А. Беляев, *Основы информатики*, Феникс, Ростов н/Д, 2006.

[3] С. Е. Локтева, *Станки с программным управлением и промышленные роботы*, Машиностроение, Москва, 1986.

[4] С. Ф. Ким, Н. В. Ушева, М. А. Самборская, О. Е. Мойзес, Е. А. Кузьменко, “Модульный принцип построения математических моделей аппаратов и технологических схем промысловой подготовки нефти”, *Нефтепереработка и нефтехимия*, **10**, (2013), 41—44.

[5] Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флёров, О. С. Федько, *Дискретный анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов. Учеб. пособие.*, МФТИ, Москва, 2012.

Поступила в редакцию
21 мая 2019 г.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-07-00177, программы «Дальний Восток» ДВО РАН, проект № 18-5-044).

Tsitsiashvili G. Sh. Logical-probabilistic modeling on the modular principle. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2019. V. 19. No 1. P. 114–118.

ABSTRACT

The purpose of this note is to define a system built on a modular principle and to construct a recursive algorithm for calculating its reliability.

Key words: *Boolean function, recursive definition, reliability, modular principle.*