Дальневосточный математический журнал. 2019. Т. 19. № 1. С. 119–124

УДК 517.95
MSC2010 35J61, 35Q79

© А. Ю. Чеботарев[1,2], А. Г. Колобов[1], Т. В. Пак[1]

Задача радиационного теплообмена без краевых условий для интенсивности излучения

Рассмотрена стационарная задача радиационно-диффузионного теплообмена в трехмерной области в рамках P_1-приближения уравнения переноса излучения. Краевые условия для интенсивности излучения не задаются, но есть дополнительное краевое условие для температурного поля. Установлена нелокальная разрешимость задачи и показано, что множество решений гомеоморфно конечномерному компакту. Представлено условие единственности решения.

Ключевые слова: *уравнения радиационного теплообмена, диффузионное приближение, нелокальная разрешимость.*

Введение

Система нелинейных эллиптических уравнений, описывающая радиационно-диффузионный теплообмен в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ имеет вид [1]:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \ x \in \Omega. \tag{1}$$

Здесь θ — нормализованная температура, φ — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные физические параметры a, b, κ_a и α, описывающие свойства среды, определяются стандартным образом [2].

Предполагается, что функция θ удовлетворяют следующему условию на границе $\Gamma=\partial\Omega$:

$$\theta = \theta_b. \tag{2}$$

Для того, чтобы задать стандартное краевое условие для интенсивности излучения

$$\alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0,$$

требуется знать функцию $\gamma=\gamma(x), x\in\Gamma$, описывающую отражающие свойства границы. Здесь через ∂_n обозначаем производную по направлению внешней нормали $\mathbf{n}$.

[1] Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8.
[2] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7.
Электронная почта: cheb@iam.dvo.ru (А. Ю. Чеботарев).

Рассмотрим постановку краевой задачи, предполагая, что функция γ неизвестна и вместо краевого условия для интенсивности излучения будет задана нормальная производная температуры, определяющая тепловые потоки на границе

$$\partial_n \theta = q_b. \tag{3}$$

Отметим, что, зная решение задачи (1)–(3), можно вычислить неизвестную функцию γ, используя краевое условие для интенсивности излучения.

Теоретический и численный анализ краевых и обратных задач, а также задач управления для уравнений радиационного теплообмена в рамках P_1-приближения для уравнения переноса излучения представлен в [3]– [25]. Различные краевые задачи, связанные с радиационным теплообменом, изучены в [26]– [29].

Вопрос о корректности сформулированной задачи без краевых условий на интенсивность излучения является открытым. В данной заметке анонсируются результаты, связанные с изучением множества решений. Представлена теорема о нелокальной разрешимости задачи (1)–(3). Показано, что множество решений гомеоморфно компакту в конечномерном пространстве, и получено достаточное условие единственности решения.

1. Слабая формулировка задачи

В дальнейшем считаем, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная строго липшицева область, граница Γ которой состоит из конечного числа гладких кусков. Более точно, будем предполагать, что для области Ω справедливы свойства 1,2 из [30, гл.3, §8]. Через L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ обозначаем пространство Лебега, а через H^s — пространство Соболева W_2^s. $H_0^s(\Omega)$ — замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства $H^s(\Omega)$. Скалярное произведение и норма в $L^2(\Omega)$ определяются стандартным образом:

$$(f, \mathrm{g}) = \int\limits_\Omega f(x)\mathrm{g}(x)dx, \quad \|f\|^2 = (f, f).$$

Пусть $V = H_0^2(\Omega)$. Условия на область Ω позволяют выбрать скалярное произведение в V в виде $[u,v] = (\Delta u, \Delta v)$, $\|f\|_V = \|\Delta f\|$.

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям

$$(i) \qquad \theta_b = \hat{\theta}|_\Gamma,\ q_b = \partial_n \hat{\theta}|_\Gamma, \quad \text{где } \hat{\theta} \in H^2(\Omega),$$

Получим слабую формулировку задачи. Из уравнений (1) следует равенство

$$\Delta(a\theta + \alpha b\varphi) = 0.$$

Первое уравнение в (1) запишем в виде

$$-\,a\Delta\theta + b\kappa_a|\theta|\theta^3 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta = \frac{\kappa_a}{\alpha}(a\theta + \alpha b\varphi).$$

Умножим это уравнение на функцию Δv, где $v \in H_0^2(\Omega)$, и проинтегрируем по области Ω. Тогда

$$(-\,a\Delta\theta + b\kappa_a|\theta|\theta^3 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta, \Delta v) = \frac{\kappa_a}{\alpha}(a\theta + \alpha b\varphi, \Delta v) = 0.$$

Определение. Пара $\theta \in H^2(\Omega)$, $\varphi \in L^2(\Omega)$ называется слабым решением задачи (1)–(3), если

$$(-\,a\Delta\theta + \mathrm{g}(\theta), \Delta v) = 0 \quad \forall v \in H_0^2(\Omega); \quad \theta|_\Gamma = \theta_b,\ \partial_n\theta|_\Gamma = q_b; \tag{4}$$
$$b\kappa_a\varphi = \,-\,a\Delta\theta + b\kappa_a|\theta|\theta^3 \text{ п.в. в } \Omega.$$

Здесь $\mathrm{g}(\theta) = b\kappa_a|\theta|\theta^3 + \frac{a\kappa_a}{\alpha}\theta$.

2. Непустота множества решений и его структура

Пусть θ, φ — слабое решение задачи (1)–(3). Тогда $\theta = \hat{\theta} + \zeta$, где $\zeta \in V$ и ζ является решением задачи

$$a(\Delta\zeta, \Delta v) = (\mathrm{g}(\hat{\theta} + \zeta) - a\Delta\hat{\theta}, \Delta v) \quad \forall v \in V. \tag{5}$$

Определим нелинейный оператор $A: V \to V$,

$$[Au, v] = (\frac{1}{a}\mathrm{g}(\hat{\theta} + u) - \Delta\hat{\theta}, \Delta v) \quad \forall v \in V.$$

Тогда задача (5) равносильна отысканию неподвижной точки оператора A, $\zeta = A\zeta$. Нетрудно проверить, что, в силу компактности вложения $V \subset L^2(\Omega)$, оператор A вполне непрерывен. Таким образом, для доказательства разрешимости задачи (5) достаточно, на основании принципа Лере–Шаудера доказать равномерную по $\lambda \in (0,1]$ ограниченность в V множества решений операторного уравнения $\zeta = \lambda A\zeta$. Свойство строгой монотонности функции $t \in \mathbb{R} \to \mathrm{g}(t)$ и положительность производной g' позволяют получить априорную оценку $\|\Delta\theta\| \leqslant C$. Постоянная C здесь зависит только от области Ω, функций $\theta_b, \hat{\theta}$ и не зависит от $\lambda \in (0,1]$. Поэтому

$$\|\zeta\|_V = \|\theta - \hat{\theta}\|_V \leqslant \|\Delta\theta\| + \|\Delta\hat{\theta}\| \leqslant C.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (i). Тогда существует слабое решение задачи* (1)–(3).

Из теоремы 1 следует, при выполнении условий (i), что множество решений задачи (1)–(3) ограничено в пространстве $H^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Соответственно множество $\mathcal{R}$ решений задачи (5) ограничено в V и в пространстве $C(\bar{\Omega})$. Пусть $M = \sup\{4\|\theta^3\|_{C(\bar{\Omega})}, \theta = \hat{\theta} + \zeta, \zeta \in \mathcal{R}\} < +\infty$. Тогда справедлива оценка

$$a\|\Delta\zeta\| \leqslant b\kappa_a M\|\zeta\|. \tag{6}$$

В силу теоремы Гильберта–Шмидта, собственные функции $\{w_j\} \subset V$, определяемые из условий

$$(\Delta w_j, \Delta v) = \lambda_j(w_j, v) \quad \forall v \in V,\ j = 1, 2, \ldots,\ (w_i, w_j) = \delta_{ij},\ 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots,$$

образуют базис пространств $L^2(\Omega)$ и V, причем $\lambda_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Поскольку $\lambda_1\|\zeta\|^2 \leqslant \|\Delta\zeta\|^2$, то из оценки (6) следует единственность решения задачи (5), если выполняется условие

$$a\sqrt{\lambda_1} > b\kappa_a M. \tag{7}$$

В общем случае из оценки (6), аналогично [24], выводится существование проектора, который осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{R}$ и некоторым компактом в конечномерном пространстве, причем непрерывность обратного отображения вытекает из компактности множества $\mathcal{R}$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (i). Тогда множество решений задачи* (1)–(3) *непусто и гомеоморфно компакту, лежащему в конечномерном пространстве, а если выполняется условие* (7)*, то решение единственно.*

Список литературы

[1] M. F. Modest, *Radiative Heat Transfer*, Academic Press, 2003.

[2] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **20**:2, (2015), 776–784.

[3] R. Pinnau, "Analysis of Optimal Boundary Control for Radiative Heat Transfer Modelled by the SP_1-System", *Comm. Math. Sci.*, **5**:4, (2007), 951–969.

[4] P.-E. Druet, "Existence of weak solutions to the time-dependent MHD-equations coupled to heat transfer with nonlocal radiation boundary conditions", *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, **10**:5, (2009), 2914–2936.

[5] O. Tse, R. Pinnau, N. Siedow, "Identification of temperature dependent parameters in laser–interstitial thermo therapy", *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **22**:9, (2012), 1–29.

[6] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, "An iterative method for solving a complex heat transfer problem", *Appl. Math. Comput.*, **219**, (2013), 9356–9362.

[7] А. Е. Ковтанюк, А. Ю. Чеботарев, "Стационарная задача сложного теплообмена", *Ж. вычисл. матем. физ.*, **54**:4, (2014), 191–199.

[8] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Solvability of P1 approximation of a conductive-radiative heat transfer problem", *Appl. Math. Comput.*, **249**, (2014), 247–252.

[9] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem", *J. Math. Anal. Appl.*, **409**:2, (2014), 808–815.

[10] А. Е. Ковтанюк, А. Ю. Чеботарев, "Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом", *Дифференциальные уравнения*, **50**:12, (2014), 1590–1597.

[11] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, "Устойчивость стационарных решений диффузионной модели сложного теплообмена", *Дальневосточный математический журнал*, **14**:1, (2014), 18–32.

[12] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, "Нестационарная задача сложного теплообмена", *Ж. вычисл. матем. физ.*, **54**:11, (2014), 1806–1816.

[13] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer", *J. Math. Anal. Appl.*, **412**, (2014), 520–528.

[14] Г. В. Гренкин, "Оптимальное управление в нестационарной задаче сложного теплообмена", *Дальневосточный математический журнал*, **14**:2, (2014), 160–172.

[15] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, "Неоднородная нестационарная задача сложного теплообмена", *Сибирские электронные математические известия*, **12**:11, (2015), 562–576.

[16] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, "Нестационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом", *Ж. вычисл. матем. физ.*, **56**:2, (2016), 275–282.

[17] G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Boundary optimal control problem of complex heat transfer model”, *J. Math. Anal. Appl.*, **433**, (2016), 1243–1260.

[18] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects”, *J. Math. Anal. Appl.*, **439**, (2016), 678–689.

[19] A. Yu. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk, G. V. Grenkin, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model”, *Applied Mathematics and Computation*, **289**, (2016), 371–380.

[20] Г. В. Гренкин, “Алгоритм решения задачи граничного оптимального управления в модели сложного теплообмена”, *Дальневосточный математический журнал*, **16**:1, (2016), 24–38.

[21] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, “Управление сложным теплообменом при создании экстремальных полей”, *Ж. вычисл. матем. физ.*, **56**:10, (2016), 1725–1732.

[22] А. Е. Ковтанюк, А. Ю. Чеботарев, “Нелокальная однозначная разрешимость стационарной задачи сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. физ.*, **56**:5, (2016), 816–823.

[23] A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, “Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer”, *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, **51**:6, (2017), 2511–2519.

[24] A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange”, *J. Math. Anal. Appl.*, **460**:2, (2018), 737–744.

[25] A. Yu. Chebotarev, R. Pinnau, “An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer”, *J. Math. Anal. Appl.*, **472**:1, (2019), 737–744.

[26] А. А. Амосов, “Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальным краевым условием типа теплообмена излучением”, *Дифференциальные уравнения*, **41**:1, (2005), 93–104.

[27] A. A. Amosov, “Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency”, *Journal of Mathematical Sciences*, **164**:3, (2010), 309–344.

[28] A. A. Amosov, “Nonstationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency”, *Journal of Mathematical Sciences*, **165**:1, (2010), 1–41.

[29] А. А. Амосов, “Стационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения”, *Ж. вычисл. матем. физ.*, **57**:3, (2017), 510–535.

[30] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.

Поступила в редакцию
11 февраля 2019 г.

Работа выполнена в соответствии с госзаданием ИПМ ДВО РАН.

Chebotarev A. Yu., Kolobov A. G., Park T. V. The problem of radiative heat transfer without boundary conditions for the intensity of radiation. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2019. V. 19. No 1. P. 119–124.

ABSTRACT

The stationary problem of radiation-diffusion heat transfer in three-dimensional domain within the P_1 - approximations of the radiation transfer equation is considered. The boundary conditions for the intensity of radiation are not specified, but there is an additional boundary condition for the temperature field. The non-local solvability of the problem is established and it is shown that the set of solutions is homeomorphic to a finite-dimensional compact. Submitted condition uniqueness of the solution. The conditions for the uniqueness of the solution are presented.

Key words: *radiation heat transfer, diffusion approximation, non-local solvability.*