Дальневосточный математический журнал. 2019. Т. 19. № 2. С. 129–137

УДК 514.112
MSC2010 52A38, 52A40

© Н. С. Астапов[1], И. С. Астапов[2]

Многообразие обобщений теоремы Птолемея

В статье исследуются метрические свойства общего четырехвершинника (тетрона), частными случаями которого являются треугольник, плоский и пространственный четырехугольники, а также тетраэдр. Доказана основная теорема о связи длин сторон, величин плоских углов и величины двугранного угла тетрона. Следствиями этой теоремы являются многие замечательные теоремы о треугольниках, четырехугольниках и тетраэдрах. Отдельное внимание уделено равногранным тетраэдрам.

Ключевые слова: *площадь произвольного четырехугольника, равногранный тетраэдр, теорема о четырехвершиннике, теорема Бретшнейдера, неравенство Птолемея, неравенство Брахмагупты.*

Теорема Птолемея. *В выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон*

$$mn = ac + bd, \tag{1}$$

где $a{=}AB$, $b{=}BC$, $c{=}CD$ и $d{=}DA$ — последовательные стороны, $m{=}AC$ и $n{=}BD$ — диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$.

Доказательства этой теоремы в литературе чаще всего повторяют доказательство самого Птолемея (ок. 100 – ок. 178), приведенное учёным в книге “Альмагест”. Существуют и другие доказательства, например, непосредственно с помощью выражения диагоналей через стороны четырехугольника, с помощью инверсии, с помощью прямой Симсона [1, с. 55], с применением теоремы косинусов, с помощью комплексных чисел и, наконец, как следствие теоремы Бретшнейдера.

Известно, что для теоремы Птолемея выполняется обратная теорема. Поэтому справедливо утверждение: для того чтобы около выпуклого четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы произведение диагоналей было равно сумме произведений противоположных сторон.

[1] Новосибирский государственный университет, 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 1; Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090, г. Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, 15.
[2] НИИ механики МГУ, 119192, г. Москва, Мичуринский проспект, д. 1.
Электронная почта: nika@hydro.nsc.ru (Н. С. Астапов), velais@imec.msu.ru (И. С. Астапов).

Отметим, что для выпуклого четырехугольника, вписанного в окружность, кроме равенства (1) выполняются также равенства

$$m^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}, \tag{2}$$

$$n^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}, \tag{3}$$

$$m(ab+cd) = n(ad+bc). \tag{4}$$

Оказывается, что и здесь справедливы обратные утверждения: выполнения всего лишь одного из равенств (2), (3) или (4) для плоского выпуклого четырехугольника достаточно, чтобы около него можно было описать окружность.

В [2, с. 278] с помощью комплексных чисел для произвольных четырех точек плоскости доказаны теорема Бретшнейдера, неравенство Птолемея

$$mn \leqslant ac + bd \tag{5}$$

и обобщение этого неравенства для произвольных шести точек плоскости. В [3, с. 283] с помощью кватернионов доказано неравенство (5) для любых четырех точек пространства и методами линейной алгебры дано обобщение теоремы Птолемея для k точек, расположенных на одной окружности [3, с. 77]. Подробное доказательство и обсуждение неравенства (5) для плоскости приведены в [1, с. 127-131]. В [4] неравенство Птолемея для любых четырех точек пространства доказано методом координат, причем полностью дан ответ на вопрос о взаимном расположении точек в случае выполнения равенства. Так, если в (5) выполняется равенство, то все точки лежат на одной прямой или на одной окружности, причем в последнем случае точки A, B, C и D расположены на окружности именно в этом порядке, то есть, если все они различны, то $ABCD$ является выпуклым четырехугольником. Интересно отметить, что выполнение любых двух из трех равенств (2)–(4) для четырех точек пространства также влечет за собой либо принадлежность всех точек одной прямой, либо выпуклость и вписанность в окружность пространственного четырехугольника $ABCD$.

Заметим, что в формулировках обобщенной обратной теоремы Птолемея для плоскости иногда встречаются ошибки, особенно при доказательствах с использованием инверсии. Например, в [2, с. 234, №28.24], [4, с. 44], [Квант, 1972, № 4, с. 45, решение задачи М99], [5, с. 44], [6, с. 54] утверждается, что для произвольных четырех точек плоскости равенство $mn = ac + bd$ выполняется только в том случае, если все точки лежат на одной окружности. То есть не учитывается случай, когда все четыре точки расположены на одной прямой. Этой ошибки легко избежать, если пользоваться теоремой Бретшнейдера (второй теоремой косинусов для четырехугольника): произведение квадратов диагоналей четырехугольника равно сумме произведений квадратов противоположных сторон без удвоенного произведения всех четырех сторон на косинус суммы противоположных углов.

Дальнейшее обобщение теоремы Птолемея было сделано в [7, 8]. Приведем здесь улучшенное доказательство основной теоремы. Сначала напомним определение тетрона (четырехвершинника).

Определение. Назовем тетроном $ABCD$ произвольные четыре точки A, B, C и D пространства, последовательно соединенные отрезками AB, BC, CD и DA.

Тетрон может быть пространственным четырехугольником (частью "каркаса" тетраэдра), четырехугольником с самопересечением сторон и вырожденным, часть или все вершины которого совпадают друг с другом или лежат на одной прямой. Тетрон — естественное обобщение понятия четырехугольника: произвольный выпуклый и вогнутый четырехугольники являются плоскими тетронами. Поэтому утверждения, верные для любых тетронов, справедливы также для любых четырехугольников и треугольников (вырожденных тетронов). Отрезки, соединяющие соседние вершины тетрона, назовем сторонами, а соединяющие не соседние — диагоналями. Далее будем считать, что тетрон $ABCD$ задан порядком обхода вершин A, B, C и D, причем $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=m$, $BD=n$, $\angle BAD=\angle A$, $\angle BCD==\angle C$, $\angle ADB=\angle\delta_1$, $\angle BDC=\angle\delta_2$, $\angle ADC=\angle\delta$ и $\widehat{n}$ — величина двугранного угла при ребре n.

Теперь сформулируем и докажем теорему, следствиями которой являются теорема Бретшнейдера, теорема и неравенство Птолемея, неравенство Брахмагупты, формула Герона, формула для площади произвольного четырехугольника и много других полезных утверждений.

Теорема о тетроне. *Для любого тетрона справедливо равенство*

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd(\cos\angle A\cos\angle C + \sin\angle A\sin\angle C\cos\widehat{n}). \tag{6}$$

Доказательство. Возможны следующие случаи взаимного расположения вершин тетрона в пространстве.

1) Часть вершин совпадает. В этом случае справедливость равенства (6) проверяется подстановкой длин сторон и величин углов непосредственно в равенство. Например, рассмотрим тетрон, у которого совпадают ровно две вершины A и C. Подставляя $b=a$, $d=c$, $m=0$, $\angle A=\angle C$ и $\widehat{n}=0$ в равенство (6), убеждаемся в его справедливости. Если величины углов не определены, то их можно выбрать (доопределить) соответствующим образом, например, если $a=b=c=d=0$, то можно считать $\angle A=\angle C=\widehat{n}=0$ или $\angle A=\angle C=\pi/2$, $\widehat{n}=\pi$.

2) Все вершины различны. Запишем аналог теоремы косинусов для трехгранного угла при вершине D:

$$\cos\delta - \cos\delta_1\cos\delta_2 = \sin\delta_1\sin\delta_2\cos\widehat{n}. \tag{7}$$

Заметим, что формула (7) справедлива для любого расположения лучей DA, DB и DC в пространстве. Так, если все три луча лежат в одной плоскости, то есть $\cos\widehat{n}==\pm1$, то формула (7) превращается в формулу сложения для косинусов. Пользуясь теоремой косинусов в левой части и теоремой синусов для треугольников ABD и BCD в правой части равенства (7), получим равенство

$$\frac{c^2+d^2-m^2}{2cd} - \frac{n^2+d^2-a^2}{2nd}\cdot\frac{n^2+c^2-b^2}{2nc} = \frac{ab}{n^2}\sin\angle A\sin\angle C\cos\widehat{n},$$

которое после упрощений можно записать в виде

$$a^2c^2 + b^2d^2 - 2m^2n^2 + n^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - n^2) - a^2b^2 - c^2d^2 = \\ = 4abcd \sin\angle A \sin\angle C \cos\widehat{n}. \tag{8}$$

Так как $n^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\angle A = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle C$, то

$$n^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - n^2) = n^2(a^2 + d^2 - n^2 + b^2 + c^2 - n^2 + n^2) = \\ = n^2(2ad\cos\angle A + 2bc\cos\angle C + n^2) = (n^2 + 2ad\cos\angle A)(n^2 + 2bc\cos\angle C) - \\ - 4abcd\cos\angle A\cos\angle C = (b^2 + c^2)(a^2 + d^2) - 4abcd\cos\angle A\cos\angle C.$$

Подставив последнее выражение в (8), после сокращений получим требуемое равенство (6).

Для любого тетрона справедливо неравенство [8]

$$a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\angle A - \angle C) \leqslant m^2n^2 \leqslant a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\angle A + \angle C), \tag{9}$$

где хотя бы одно из двух равенств выполняется тогда и только тогда, когда тетрон является плоским. Из неравенства (9) следует неравенство Птолемея

$$|ac - bd| \leqslant mn \leqslant ac + bd, \tag{10}$$

причем ровно одно равенство в этой цепочке достигается в том и только в том случае, если все вершины тетрона лежат на одной прямой или на одной окружности, а двойное равенство — когда совпадают по крайней мере две вершины тетрона. Поэтому из отрезков, длины которых численно равны ac, bd и mn всегда можно построить треугольник (возможно, вырожденный), в котором угол α, противолежащий стороне mn, вычисляется по формуле $\cos\alpha = \cos\angle A\cos\angle C + \sin\angle A\sin\angle C\cos\widehat{n}$, что следует из равенства (6). Сравните полученное решение с чисто геометрическим решением задачи 159 в [9, с. 286]. □

Векторным методом можно доказать следующую теорему [4, 10].

Теорема. *Для любого тетрона выполняются равенства*

$$\overrightarrow{m}\,\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{d}, \tag{11}$$

$$\overrightarrow{m}\,\overrightarrow{n} = (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)/2, \tag{12}$$

где $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{m}\,\overrightarrow{n}$ *— скалярное произведение векторов* $\overrightarrow{m}$ *и* $\overrightarrow{n}$.

Так как $|\overrightarrow{m}\,\overrightarrow{n}| \leqslant mn$, то из равенства (12) с учетом неравенств (10) получим цепочку неравенств

$$|a^2 + c^2 - b^2 - d^2|/2 \leqslant mn \leqslant ac + bd, \tag{13}$$

причем двойное равенство выполняется в том и только в том случае, если все вершины лежат на одной прямой и длина какой-то одной стороны тетрона равна сумме длин остальных трех сторон тетрона. Заметим, что геометрически неравенство

$|a^2+c^2-b^2-d^2|/2 \leqslant ac+bd$ означает следующее: длина ломаной, соединяющей концы отрезка, не больше длины этого отрезка. Если представить тетрон с фиксированными длинами сторон в виде шарнирной стержневой модели, то равенство (12) можно интерпретировать так: как бы мы ни двигали вершины модели, величина $I=\overrightarrow{m}\,\overrightarrow{n}=mn\cos\varphi$ будет оставаться постоянной (несмотря на то, что длины диагоналей и угол между ними по отдельности будут изменяться). Это свойство тетрона может быть полезным при проектировании шарнирно-стержневых механизмов. Угол ψ между диагоналями m и n тетрона (и, следовательно, произвольного четырехугольника) находится из равенства (12) по формуле $\cos\psi=|a^2+c^2-b^2-d^2|/(2mn)$. Отсюда следует, что угол между противоположными ребрами тетраэдра не меняется, если поменять местами два противоположных ребра тетраэдра. Оказывается [4], что площадь S произвольного, в том числе и невыпуклого, четырехугольника выражается через длины его сторон и диагоналей формулой $S=\sqrt{m^2n^2/4-(a^2+c^2-b^2-d^2)^2/16}$ и тем самым характеризует разницу левого неравенства в (13). С помощью этой формулы легко доказать, что из всех четырехугольников с заданными сторонами наибольшую площадь имеет четырехугольник, вписанный в окружность. Если диагонали m и n вписанного в окружность четырехугольника с противоположными сторонами a и c, b и d перпендикулярны, то длины диагоналей выражаются [4] формулами $m=(ad+bc)/\sqrt{a^2+c^2}$, $n=(ab+cd)/\sqrt{a^2+c^2}$, а площадь — формулой $S=(ac+$ $+bd)/2$. Из формулы для площади произвольного четырехугольника (в том числе и невыпуклого, но без пересечения сторон) получим, пользуясь теоремой Бретшнейдера $m^2n^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(\angle A+\angle C)$, другое выражение площади $S^2=(p-$ $-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2((\angle A+\angle C)/2)$, где $p=(a+b+c+d)/2$ — полупериметр четырехугольника [2, 7]. Следствиями этого равенства являются формула Герона и неравенство Брахмагупты.

Неравенство Брахмагупты. *Площадь любого четырехугольника удовлетворяет неравенству $S\leqslant\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, причем если достигается равенство, то все вершины лежат на одной окружности или на одной прямой (в этом случае четырехугольник является вырожденным).*

Формулы (6)–(8) можно применять для вычисления двугранных углов в тетраэдре. Представим формулу (8) еще в двух различных видах

$$(a^2-d^2)(c^2-b^2)-2m^2n^2+n^2(a^2+b^2+c^2+d^2-n^2)=16S_{adn}S_{bcn}\cos\widehat{n}, \tag{14}$$

$$2S_{adn}S_{bcn}\cos\widehat{n}=S_{adn}^2+S_{bcn}^2-(m^2n^2/4-(a^2+c^2-b^2-d^2)^2/16). \tag{15}$$

Отсюда находим, что косинус двугранного угла $\cos\widehat{n}$ тетраэдра при ребре n полностью определяется, если задать длины шести ребер тетраэдра и порядок взаимного расположения ребер (в рассматриваемом случае ребра a и c, b и d, m и n — противоположные ребра тетраэдра, причем a, b, c и d — последовательные стороны соответствующего тетрона). Так, например, выражение $\cos\widehat{n}$ для косинуса двугранного угла при ребре n равногранного тетраэдра, все грани которого являются равными остроугольными треугольниками со сторонами n, k, l, можно получить из симметричного относительно k и l соотношения

$$\sin^2\widehat{n}=\frac{8n^2(n^2-k^2+l^2)(n^2+k^2-l^2)(-n^2+k^2+l^2)}{(n+k+l)^2(n-k+l)^2(n+k-l)^2(-n+k+l)^2}.$$

Из формулы (14) получим необходимое и достаточное условие для того, чтобы двугранный угол при ребре n произвольного тетраэдра был острым

$$(a^2-d^2)(c^2-b^2)-2m^2n^2+n^2(a^2+b^2+c^2+d^2-n^2)>0.$$

Если отождествлять зеркальные отражения, то из трех отрезков различной длины можно построить единственный треугольник. Однако из шести отрезков различной длины можно построить до 30 различных тетраэдров и различить их можно с помощью порядка обхода вершин, который определяет пары противоположных ребер [11, с. 22]. Выполнение неравенства (13) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы из шести отрезков можно было построить тетраэдр (возможно, вырожденный). Объем рассматриваемого тетраэдра равен $V = S_{adn}S_{bcn}\sin\widehat{n}/(3n)$, и он также может быть выражен только через длины ребер. Так, из шести отрезков, длины которых равны 11, 12, 13, 14, 15 и 16, можно построить 30 (максимально возможное число) различных неравновеликих тетраэдров. Среди них максимальный объем $V\approx 288$ имеет тетраэдр, которому соответствует тетрон $a=16$, $b=13$, $c=12$, $d=14$, $m=11$, $n=15$, а минимальный объем $V\approx 213$ — у тетраэдра с ребрами $a=11$, $b=16$, $c=14$, $d=13$, $m=12$, $n=15$. Интересно отметить, что объем правильного тетраэдра с ребрами $a=b=c=d=m=n=13{,}5$ равен $V\approx 290$. Для равногранного тетраэдра имеем выражение для объема $V^2=(n^2+k^2-l^2)(n^2-k^2+l^2)(-n^2+k^2+l^2)/72$, симметричное относительно длин ребер n, k, l [11, с. 88-90]. Так, для равногранного тетраэдра, все грани которого являются равнобедренными треугольниками со сторонами $n=k=13$, $l=26/\sqrt{3}$, получим $V\approx 282$. Отметим, что у этого тетраэдра два двугранных угла при противоположных ребрах l прямые. Однако неравногранный тетраэдр с такими же ребрами $a=b=c=m=13$, $d=n=26/\sqrt{3}$ (средняя длина ребра равна $\approx 13{,}7$) имеет объем $V\approx 296$.

Интересно, какой из возможных тридцати различных тетраэдров, ребрами которого являются шесть заданных отрезков, обладает наибольшим объемом? Авторам не известно простое решение этой задачи, её можно назвать задачей о вигваме. Однако в частном случае определение наибольшего объема тетраэдра, у которого заданы длины a, b, c трех ребер, выходящих из одной вершины, очевидно. Плоские углы этого трехгранного угла должны быть прямыми и объем такого тетраэдра равен $V=abc/6$. Расстояние ρ между противоположными ребрами m и n произвольного тетраэдра (длину общего перпендикуляра) можно вычислить, пользуясь формулой для объема произвольного тетраэдра $V=\rho mn\sin\psi/6$, где ψ — угол между ребрами m и n. Так, для расстояния между противоположными и равными l ребрами равногранного тетраэдра получим простое выражение $\rho^2=(n^2+k^2-l^2)/2$.

Радиусы вписанной в тетраэдр и описанной около тетраэдра сфер выражаются формулами $r=3V/S$ и $R=S_{mn}/(6V)$, где S — площадь поверхности тетраэдра, а S_{mn} — площадь треугольника со сторонами ac, bd и mn (формула Крелле [10, с. 101]. Например, для равногранного тетраэдра с ребрами n, k, l получим

$$r^2=\frac{(n^2+k^2-l^2)(n^2-k^2+l^2)(-n^2+k^2+l^2)}{8(n+k+l)(n+k-l)(n-k+l)(-n+k+l)},\qquad R^2=\frac{n^2+k^2+l^2}{8}.$$

Сравнивая выражения $\sin^2\widehat{n}$ и r^2, находим, что для равногранного тетраэдра с ребрами n, k, l справедливо равенство $r=S_{nkl}\sin\widehat{n}/(2n)$, из которого следует равенство

$n/\sin\widehat{n}=k/\sin\widehat{k}=l/\sin\widehat{l}$ — частный случай теоремы синусов для тетраэдра [10, с. 100]. Кроме того, из формулы $r=S_{nkl}\sin\widehat{n}/(2n)$ следует равенство $r=h\sin\widehat{n}/4=H/4$, где h — высота грани, проведенная к ребру n, а H — высота равногранного тетраэдра. То есть радиус сферы, вписанной в равногранный тетраэдр, равен одной четвертой высоты тетраэдра. Заметим, что этот вывод можно получить из формулы $r=3V/S$ для произвольного тетраэдра или из следующего свойства: в равногранном тетраэдре центр масс, центр вписанной и центр описанной сфер совпадают.

С помощью теоремы о тетроне удалось провести классификацию различных четырехугольников, в том числе невыпуклых и с самопересечением сторон. Так, в [7] доказано следующее утверждение.

Для любого плоского тетрона, ни одна из сторон которого не равна нулю, выполняется равенство $\cos(\angle A\pm\angle C)=\cos(\angle B\pm\angle D)$, *где надо выбрать один из двух знаков по одному из правил:*

оба знака $+\Longleftrightarrow ABCD$ — *выпуклый четырехугольник;*

разные знаки $\Longleftrightarrow ABCD$ — *невыпуклый четырехугольник без самопересечения сторон;*

оба знака $-\Longleftrightarrow$ *тетрон* $ABCD$ *является плоским невыпуклым с пересечением сторон, причем если* $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$, *то пересекаются стороны* AD *и* BC, *а если* $\angle A+\angle D=\angle B+\angle C$, *то пересекаются стороны* AB *и* CD.

Формула (6) оказалась богатой следствиями, поэтому естественно появляется желание воспользоваться другими формулами сферической тригонометрии для вывода метрических соотношений в тетроне. Или, например, для произвольного треугольника ABC со сторонами $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, лежащего в плоскости Лобачевского с радиусом кривизны r, применить теорему косинусов и теорему синусов

$$\operatorname{ch}\frac{c}{r}=\operatorname{ch}\frac{a}{r}\operatorname{ch}\frac{b}{r}-\operatorname{sh}\frac{a}{r}\operatorname{sh}\frac{b}{r}\cos\angle C,$$
$$\operatorname{sh}\frac{a}{r}/\sin\angle A=\operatorname{sh}\frac{b}{r}/\sin\angle B=\operatorname{sh}\frac{c}{r}/\sin\angle C$$

для доказательства аналога теоремы Бретшнейдера в гиперболической геометрии.

Другое обобщение теоремы Птолемея — теорема Кэзи (Cascy) — подробно рассмотрено в [12, с. 243], [13, с. 101], [14, с. 285]: *если окружности* S_1, S_2, S_3 *и* S_4 *касаются в том же порядке одной и той же пятой окружности (или прямой)* S *или все проходят через одну точку, то имеет место соотношение*

$$t_{12}t_{34}+t_{14}t_{23}=t_{13}t_{24}, \tag{16}$$

где t_{12} *есть отрезок общей касательной окружностей* S_1 *и* S_2 *и аналогичный смысл имеют величины* t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24} *и* t_{34}. Если все окружности S_i заменить точками, то мы прийдем к теореме Птолемея. В [12, с. 267] для этой теоремы приведена обратная: если касательные расстояния четырех окружностей связаны соотношением (16), то эти окружности или все касаются одной и той же пятой окружности, или касаются одной прямой, или проходят через одну точку. Приложение обобщенной таким образом теоремы Птолемея для решения остававшейся на протяжении 45 лет нерешенной проблемы бельгийского математика В. Тебольта (1882—1960) дано в [15]. Отметим, что такое обобщение теоремы Птолемея сделано только для плоскости, поэтому возникает вопрос: а нельзя ли обобщить ее на пространство? Более того, нельзя ли объединить оба эти обобщения в одной теореме?

И, наконец, приведем некоторое обобщение теоремы о тетроне. Так как расстояние между центрами двух сфер с равными радиусами равно расстоянию между точками касания общей внешней касательной плоскости (в этом случае обе сферы лежат по одну сторону от плоскости), то справедливо следующее утверждение. *Для произвольно расположенных в пространстве четырех равных сфер* S_1, S_2, S_3 *и* S_4 *с центрами в точках* A, B, C *и* D *справедливо равенство (6), где* $\angle BAD = \angle A$, $\angle BCD = \angle C$, $\widehat{n}$ *— величина двугранного угла между плоскостями* BAD *и* BCD, a *— расстояние между точками касания общей внешней касательной плоскости к сферам* S_1 *и* S_2*; такой же смысл имеют величины* b, c, d, m *и* n.

Заключение

Таким образом, с помощью теоремы о тетроне однотипно доказываются разнородные, казалось бы, утверждения: теорема Бретшнейдера, обратная теорема Птолемея, формула для площади произвольного четырехугольника, неравенство Брахмагупты. Тетрон оказывается полезным инструментом для составления и решения различных геометрических задач. Теорема о тетроне позволяет единообразно отвечать на некоторые вопросы относительно треугольников, четырехугольников и тетраэдров и поэтому является еще одним связующим звеном между задачами планиметрии и стереометрии.

Список литературы

[1] Г. С. М. Кокстер, С. Л. Грейтцер, *Новые встречи с геометрией*, Наука, М., 1978.

[2] В. В. Прасолов, *Задачи по планиметрии*, Ч. II, Наука, М., 1986.

[3] В. В. Прасолов, *Задачи и теоремы линейной алгебры*, Наука, Физматлит, М., 1996.

[4] Н. С. Астапов, А. В. Жуков, “Замечательный четырехвершинник”, *Квант*, **1**, (1996), 45–47.

[5] Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, *Избранные задачи и теоремы планиметрии*, Наука, М., 1967.

[6] И. Я. Бакельман, *Инверсия*, Наука, М., 1966.

[7] Н. С. Астапов, “Теорема о четырехвершиннике”, *Математическое образование*, **2**, (2000), 22–28.

[8] N. S. Astapov, N. C. Noland, “The Remarkable Tetron”, *American Mathematical Monthly*, **108**:4, (2001), 368–370.

[9] С. Страшевич, Е. Бровкин, *Польские математические олимпиады*, Мир, М., 1978.

[10] В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин, *Задачи по стереометрии*, Наука, Физматлит, М., 1989.

[11] Г. Штейнгауз, *Сто задач*, Наука, Физматлит, М., 1976.

[12] И. М. Яглом, *Геометрические преобразования*, т. II, Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, М., 1956.

[13] Д. Ефремов, *Новая геометрия треугольника*, Типография М. Шпенцера, Одесса, 1902.

[14] *Элементы математики в задачах. Через олимпиады и кружки — к профессии*, ред. А. А. Заславского, А. Б. Скопенкова и М. Б. Скопенкова, МЦНМО, М., 2018.

[15] Shay Gueron, "Two Applications of the Generalized Ptolemy Theorem", *American Mathematical Monthly*, **109**:4, (2002), 362–370.

Поступила в редакцию
11 октября 2019 г.

Astapov N. S., Astapov I. S. The variety of generalizations of the Ptolemy's theorem. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2019. V. 19. No 2. P. 129–137.

ABSTRACT

The article examines the metric properties of a tetron. In particular case a tetron is a triangle, flat or spatial quadrangle, and also a tetrahedron. The main theorem is proved about the connection of the lengths of the sides, the magnitudes of the plane angles and the magnitude of the dihedral angle of the tetron is proved. Many remarkable theorems about triangles, quadrangles, and tetrahedra are the corollaries of this theorem. Special attention given to equihedral tetrahedra.

Key words: *area of an arbitrary quadrilateral, equihedral tetrahedron, tetron theorem, Bretschneider theorem, Ptolemy's inequality, Brahmagupta's inequality.*