Дальневосточный математический журнал. 2019. Т. 19. № 2. С. 138–172

УДК 517.923
MSC2010 44A20

© В. А. Быковский[1]

Разложения по специальным функциям

В теории автоморфных функций возникают интегральные преобразования со специальными функциями в ядрах. В работе развивается универсальный метод для построения формул обращения. Рассмотрены многочисленные примеры.

Ключевые слова: *специальные функции, формулы обращения, разложения по специальным функциям.*

Введение

В монографии Титчмарша [1] подробно рассмотрен универсальный метод построения формул обращения вида

$$f(y) = \int_0^\infty K(yu)\mathrm{g}(u)\,du, \tag{1}$$

$$\mathrm{g}(u) = \int_0^\infty K^*(uy)f(y)\,dy. \tag{2}$$

Он основан на следующем простом наблюдении. Выполнив преобразование Меллина (формально) в обеих частях (1) и (2), получим

$$\widehat{f}(s) = \theta(s)\widehat{\mathrm{g}}(1-s), \qquad \widehat{\mathrm{g}}(s) = \theta^*(s)\hat{f}(1-s),$$

где $\widehat{f}, \widehat{\mathrm{g}}, \theta, \theta^*$ — преобразование Меллина f, g, K, K^* соответственно. Из этих равенств следует, что

$$\theta(s)\theta^*(1-s) \equiv 1.$$

Обратно, отправляясь от голоморфной достаточно быстро убывающей в некоторой вертикальной полосе функции $\theta(s)$, и полагая

$$K(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \theta(s)y^{-s}\,ds, \qquad K^*(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{1}{\theta(1-s)}y^{-s}\,ds,$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: `vab@iam.khv.ru`

приходим к формулам обращения (1), (2). Если $\theta(s)\theta(1-s)\equiv 1$, то $K=K^*$. В эту схему укладывается классическое разложение Ганкеля с $K(y)=K^*(y)=\sqrt{y}J_\nu(y)$ (при $\nu=-1/2$ и $\nu=1/2$ косинусное и синусное разложения Фурье). Разными авторами изучено большое количество других примеров, реализующих эту идею.

В работе [2] был предложен новый метод, позволяющий получить целую серию формул обращения вида

$$f(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(y,r)\mathrm{g}(r)\,dr,\qquad \mathrm{g}(r)=\int\limits_{0}^{\infty}K^*(y,r)f(y)\,\frac{dy}{y},$$

не укладывающихся в вышеупомянутую схему. Он основан на формулах обращения голоморфных в некоторых полюсах $-\delta<\mathrm{Re}(s)<\delta, -\mu<\mathrm{Re}(\varkappa)<\mu$ функций $\psi(s)$ и $h(\varkappa)$ для $|\mathrm{Re}(\varkappa)|<\alpha/2<2\delta$

$$h(\varkappa)=-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\alpha}\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\psi(-s)\,ds,$$

$$\psi(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\varkappa\sin(\pi\varkappa)\,d\varkappa. \tag{3}$$

Метод Уимпа позволяет с единой точки зрения рассмотреть преобразования Мелера–Фока и Канторовича–Лебедева (см. [1]), а также аналогичные интегральные преобразования из работ [3–5].

В работе [6] Н. В. Кузнецов построил формулу обращения для интегрального преобразования

$$h(\varkappa)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos(\pi k/2-\pi\varkappa)J_{-2\varkappa}(y)-\cos(\pi k/2+\pi\varkappa)J_{2\varkappa}(y)}{\sin(2\pi\varkappa)}\,\frac{\varphi(y)}{y}\,dy,$$

которое не укладывается в схему Уимпа. Для $-1<k\leqslant 1$ формула обращения имеет вид

$$\varphi(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\frac{4\pi J_{2\varkappa}(y)}{\cos(\pi k/2-\pi\varkappa)}\varkappa h(\varkappa)\,d\varkappa+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{k-1}{2}+m\right)4J_{k-1+2m}(y)h\left(\frac{k-1}{2}+m\right).$$

Таким образом, $\varphi(y)$ однозначно восстанавливается по h, если она ортогональна функциям Бесселя $J_{k-1+2m}(y)$ $(m=1,2,\ldots)$ по мультипликативной мере $y^{-1}dy$. Если формально выполнять в обеих частях этих неравенств преобразование Меллина, то мы придем к следующей паре формул обращения голоморфных в некоторой полосе функций.

Для $-1<\mathrm{Re}(k)\leqslant 1$ и $|\mathrm{Re}(\varkappa)|<\alpha/2<2\delta$

$$\begin{gathered}\psi(s)=\pi\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)\,=\,0}\frac{\Gamma(\varkappa+s/2)}{\Gamma(1+\varkappa-s/2)}\cdot\frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos(\pi k/2-\pi\varkappa)}\,d\varkappa+\\+\sum_{m\,=\,1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{k-1}{2}+m\right)h\left(\frac{k-1}{2}+m\right)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+m+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+m-\frac{s}{2}\right)},\\h(\varkappa)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)\,=\,\alpha}\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\cos(\pi k/2-\pi s/2)\psi(-s)\,ds.\end{gathered}\tag{4}$$

Если в (4) задана четная $h(\varkappa)$ с $h(\varkappa)=0$ в точках $\varkappa$, для которых $\cos(\pi k/2-\pi\varkappa)=0$, то в определении $\psi(s)$ ряд отсутствует. С их помощью можно обратить много других интегральных преобразований. Вводя в $\psi(s)$ весовые множители из произведений гамма-функций и применяя обратное преобразование Меллина, получим формулы обращения для интегральных преобразований со специальными функциями, в некотором смысле подобные преобразованиям Мелера – Фока, Канторовича – Лебедева и др. Отметим, что эти вопросы можно изучать методами гармонического анализа на симметрических пространствах (см. обзор [7]).

Преобразования (3) и (4) исследуются в пп. 1, 2, 3. В п. 4 доказываются формулы обращения для функций Уиттекера, построенные Брюггеманом в [5]. В частном случае они соответствуют формулам обращения Канторовича – Лебедева. В п. 5 исследуется разложение по индексу функции Бесселя, построенное Н. В. Кузнецовым в [6]. В п. 6 и п. 7 строятся разложения по индексам гипергеометрических функций из [4], содержащие в частном случае преобразование Мелера – Фока. И, наконец, в п. 8 построены разложения по индексам произведений функций Бесселя, содержащие в качестве частного случая результат из [3]. Смешанное разложение по индексу произведения функций Бесселя позволяет обратить формулу следа из [8]. Отметим, что в п. 7 и п. 8 мы ограничились формальными выкладками при их выводе. В заключительном п. 9 построен интегральный оператор проектирования, позволяющий выделить из заданной функции компоненту, которая разлагается в ряд (смешанные разложения).

Мы придерживаемся обозначений для специальных функций, принятых в справочнике [9].

Автор благодарен Н. В. Кузнецову за дискуссии по рассматриваемому кругу вопросов и Р. Брюггеману за многочисленные замечания по тексту рукописи.

1. Разложение в ряд по гамма-функциям

Пусть $\mu,\delta\in(0,\infty)$. Через $\mathcal{B}_\mu(\delta)$ обозначим линейное пространство голоморфных в полосе $-\mu<\mathrm{Re}(s)<\mu$ функций $\psi(s)$, таких что $\forall\mu'\in(0,\mu)$ и $\forall\delta'\in(0,\mu)$ в полосе $-\mu'<\mathrm{Re}(s)<\mu'$ справедлива оценка

$$\psi(s)\underset{\mu',\,\delta'}{\ll}(1+|s|)^{-\delta'}.\tag{5}$$

Определим на $\mathcal{B}_\mu(\delta)$ операторы $T^{(+)}$ и $T^{(-)}$, положив
а) в полосе $-\mu<\mathrm{Re}(s)<\infty$ для $\alpha\in(-\mu,\mu)$ с $\alpha<\mathrm{Re}(s)$

$$\left(T^{(+)}\psi\right)(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w)=\alpha}\frac{\psi(w)\,dw}{s-w}=\psi^{(+)}(s);\tag{6}$$

б) в полосе $-\infty<\mathrm{Re}(s)<\mu$ для $\alpha\in(-\mu,\mu)$ с $\mathrm{Re}(s)<\alpha$

$$\left(T^{(-)}\psi\right)(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w)=\alpha}\frac{\psi(w)\,dw}{w-s}=\psi^{(-)}(s).\tag{7}$$

По теореме о вычетах

$$\psi(s)=\psi^{(+)}(s)+\psi^{(-)}(s).\tag{8}$$

То есть $T^{(+)}+T^{(-)}=E$, где E — тождественный оператор.

Лемма 1. *Пусть* $\delta\in(0,1]$, $\psi\in\mathcal{B}_\mu(\delta)$. *Тогда* $\psi^{(+)}$, $\psi^{(-)}\in\mathcal{B}_\mu(\delta)$.

Доказательство. Пусть $\mu'\in(0,\mu)$, $2\varepsilon=\mu-\mu'$. Тогда в полосе $-\mu'\leqslant\mathrm{Re}(s)\leqslant\mu'$ для $\delta'\in(0,\delta)$ и $\mathrm{Im}(s)=r$ находим

$$\psi^{(+)}(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w)\,=\,-\mu'-\varepsilon}\frac{\psi(w)\,dw}{s-w}\underset{\mu',\delta'}{\ll}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|t|)^{-\delta'}(1+|t-r|)^{-1}\,dt=I_1+I_2+I_3,$$

где $I_1,I_2\,I_3$ — интегралы с тем же самым подынтегральным выражением. При этом интегрирование в I_1 ведется по отрезку $|t-r|\leqslant|r|/2$, в I_2 по $|t|\leqslant|r|/2$, а в I_3 по оставшейся части вещественной прямой. Очевидно, что

$$I_1+I_2+I_3\underset{\delta'}{\ll}(1+|r|)^{-\delta'}\int\limits_0^{|r|/2}\frac{du}{1+u}+(1+|r|)^{-1}\int\limits_0^{|r|/2}\frac{du}{(1+u)^{\delta'}}+\int\limits_{|r|/2}^{\infty}\frac{du}{(1+u)^{1+\delta'}}.$$

Поэтому в полосе $-\mu'\leqslant\mathrm{Re}(s)\leqslant\mu'$

$$\psi^{(+)}(s)\underset{\mu',\delta'}{\ll}(1+|s|)^{-\delta'}\log(2+|s|).\tag{9}$$

Точно так же доказывается оценка

$$\psi^{(-)}(s)\underset{\mu',\delta'}{\ll}(1+|s|)^{-\delta'}\log(2+|s|).\tag{10}$$

Осталось только заметить, что $\forall\delta''<\delta'<\delta$

$$(1+|s|)^{-\delta'}\log(2+|s|)\underset{\delta''}{\ll}(1+|s|)^{-\delta''}.$$

Лемма 1 доказана. □

Определим еще два пространства, положив

$$\mathcal{B}_\mu^{(+)}(\delta)=T^{(+)}\left(\mathcal{B}_\mu(\delta)\right),\qquad\mathcal{B}_\mu^{(-)}(\delta)=T^{(-)}\left(\mathcal{B}_\mu(\delta)\right).$$

Из леммы 1 следует, что для $\delta\in(0{,}1]$ $\mathcal{B}_\mu^{(+)}(\delta)$ и $\mathcal{B}_\mu^{(-)}(\delta)$ подпространства в $\mathcal{B}_\mu(\delta)$.

Лемма 2. *Операторы* $T^{(+)}$ *и* $T^{(-)}$ *тождественны на подпространствах* $\mathcal{B}_\mu^{(+)}(\delta)$ *и* $\mathcal{B}_\mu^{(-)}(\delta)$ *соответственно.*

Доказательство. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (1+|t_1|)^{-1}(1+|t_1-t_2|)^{-1}(1+|t_2|)^{-\delta}\,dt_1\,dt_2$$

абсолютно сходится $\forall\delta\in(0,\infty)$. По теореме о вычетах в полосе $-\mu<\mathrm{Re}(s)<\infty$ для $\alpha,\beta\in(-\mu,\mu)$ с $\alpha<\beta<\mathrm{Re}(s)$ и $\mathrm{Re}(w_2)=\alpha$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w_1)=\beta}\frac{dw_1}{(w_1-w_2)\,(s-w_1)}=\frac{1}{s-w_2}.$$

Поэтому

$$\psi^{(+)(+)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w_1)=\beta}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w_2)=\alpha}\frac{\psi\,(w_2)\,dw_2}{w_1-w_2}\right)\frac{dw_1}{s-w_1}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w_2)=\alpha}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w_1)=\beta}\frac{dw_1}{(w_1-w_2)\,(s-w_1)}\right)\psi\,(w_2)\,dw_2=\psi^{(+)}(s).$$

Точно так же доказывается равенство $\psi^{(-)(-)}=\psi^{(-)}$. Лемма 2 доказана. □

Для $\delta\in(1/2,\infty)$ определим в $\mathcal{B}_\mu(\delta)$ скалярное произведение по формуле

$$\langle\psi_1,\psi_2\rangle=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)\,=\,0}\psi_1(s)\psi_2(-s)\,ds. \tag{11}$$

Лемма 3. *Для* $\delta\in(1/2,\,1]$ *имеет место ортогональное разложение*

$$\mathcal{B}_\mu(\delta)=\mathcal{B}_\mu^{(+)}(\delta)\oplus\mathcal{B}_\mu^{(-)}(\delta)$$

относительно скалярного произведения (11).

Доказательство. Так как $\forall\delta\in(1/2,\,\infty)$, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|t_1|)^{-\delta}(1+|t_2|)^{-\delta}(1+|t-t_1|)^{-1}(1+|t+t_2|)^{-1}\,dt\,dt_1\,dt_2$$

абсолютно сходится, то для $\alpha\in(0,\mu)$ и $\forall\psi_1,\psi_2\in\mathcal{B}_\mu(\delta)$ получим

$$\left\langle\psi_1^{(+)},\psi_2^{(-)}\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=0}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w_1)=-\alpha}\frac{\psi_1\,(w_1)\;dw_1}{s-w_1}\right)\times\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w_2)=\alpha}\frac{\psi_2\,(w_2)\;dw_2}{w_2+s}\right)ds=0,$$

поскольку

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=0}\frac{ds}{(s-w_1)\,(w_2+s)}=0.$$

Лемма 3 полностью доказана. □

Пусть $\mathrm{Re}(\varkappa)\in(\mu/2,\infty)$. Для любого $m=0,1,2,...$ функция

$$\gamma_m(\varkappa;s)=\frac{\Gamma(\varkappa-s/2)}{\Gamma(\varkappa+s/2)}\cdot\frac{\Gamma(\varkappa+m+s/2)}{\Gamma(1+\varkappa+m-s/2)}\tag{12}$$

рациональна по s и

$$\gamma_m(\varkappa;s)=\frac{\mathcal{P}_m(\varkappa;s)}{\mathcal{P}_m(\varkappa;-s)}\cdot\frac{1}{(\varkappa+m-s/2)},$$

где

$$\mathcal{P}_{\mathrm{m}}(\varkappa;s)=\frac{\Gamma(\varkappa+m+s/2)}{\Gamma(\varkappa+s/2)}$$

полином по s степени m. В частности,

$$\mathcal{P}_0(\varkappa;s)=1,\quad \mathcal{P}_1(\varkappa;s)=(\varkappa+s/2),\quad \mathcal{P}_2(\varkappa;s)=(\varkappa+s/2)(1+\varkappa+s/2).$$

Очевидно, что $\gamma_m(\varkappa;...)\in\mathcal{B}_\mu(1)$.

В полуплоскости $-\infty<\mathrm{Re}(s)<\mu$ у $\gamma_m(\varkappa;s)$ отсутствуют полюсы. Отсюда с помощью теоремы о вычетах получаем соотношение ортогональности

$$\langle\gamma_m(\varkappa;\ldots),\gamma_n(\varkappa;\ldots)\rangle\;=\delta_{m,n}(\varkappa+m)^{-1}.\tag{13}$$

Лемма 4. *Пусть* $\mathrm{Re}(\varkappa)\in(\mu/2,\infty)$. *Тогда для* $m=0,\,1,\,2,\ldots\quad\gamma_m(\varkappa;\ldots)\in\mathcal{B}_\mu^{(-)}(1)$.

Доказательство. По определению, для $\alpha\in(\mu/2,\,\mu)$ и $\mathrm{Re}(s)<\alpha$

$$\gamma_m^{(-)}(\varkappa;s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w)=\alpha}\gamma_m(\varkappa;w)\frac{dw}{w-s}.$$

Подынтегральное выражение слева от прямой $\mathrm{Re}(w)=\alpha$ оценивается как $O\left(|w|^{-2}\right)$ при $|w|\to\infty$ и имеет единственный полюс в точке $w=s$ с вычетом $\gamma_m(\varkappa;s)$. Поэтому $\gamma_m^{(-)}(\varkappa;s)=\gamma_m(\varkappa;s)$. Лемма 4 доказана. □

Для доказательства полноты ортогональной системы $\{\gamma_m(\varkappa;s)\}$ нам потребуется следующая техническая лемма.

Лемма 5. *Пусть* $\mu,\delta\in(0,\infty)\quad\mathrm{Re}(\varkappa)\in(\mu/2,\infty)$ *и* $\eta(s)$ — *интегрируемая по Лебегу комплекснозначная функция на прямой* $\mathrm{Re}(s)=\mu$, *для которой*

$$\eta(s)\ll\left(1+|s|^{-\delta}\right).$$

Тогда для $m\in[1,\,\infty)$ *и* $\mathrm{Re}(s)\neq\mu$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w)=\mu}\frac{\Gamma(\varkappa+w/2)}{\Gamma(\varkappa-w/2)}\cdot\frac{\Gamma(\varkappa+m-w/2)}{\Gamma(\varkappa+m+w/2)}\cdot\frac{\eta(w)\,dw}{s-w}\ll_s m^{-\delta}+m^{-\mu}\log(m).$$

Доказательство. В любом фиксированном угле $-\pi + \theta \leqslant \arg(s) \leqslant \pi - \theta$ (для $\theta \in (0, \pi)$) при $|s| \to \infty$

$$s^{-\alpha}\frac{\Gamma(s+\alpha)}{\Gamma(s)} \ll_{\alpha} 1. \tag{14}$$

Поэтому интересующий нас интеграл оценивается величиной

$$c(s) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (1+|t|)^{\mu}(m+|t|)^{-\mu}(1+|t|)^{-\delta}(1+|t|)^{-1}\,dt \ll$$
$$\ll \int_{0}^{m} m^{-\mu}(1+t)^{-1+\mu-\delta}\,dt + \int_{m}^{\infty}(1+t)^{-1-\delta}\,dt \ll m^{-\mu}\log(m) + m^{-\delta}.$$

Лемма 5 доказана. □

Теорема 1. *Пусть* μ, $\delta \in (0, \infty)$, $\quad \mathrm{Re}(\varkappa) \in (\mu/2, \infty)$. *Тогда* $\forall \psi \in \mathcal{B}_{\mu}^{(-)}(\delta)$ *в полосе* $-\infty < \mathrm{Re}(s) < \min(\mu, \delta)$

$$\psi(s) = \sum_{m=0}^{\infty} (\varkappa + m)\,\langle \psi, \gamma_m\,(\varkappa_i, \ldots)\rangle\, \gamma_m(\varkappa; s). \tag{15}$$

Доказательство. Используя свойство гамма-функции $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, получим

$$\frac{\Gamma\,(w_1+m+1)\,\Gamma\,(w_2+m+1)}{\Gamma\,(w_3+m+1)\,\Gamma\,(w_4+m+1)} - \frac{\Gamma\,(w_1+m)\,\Gamma\,(w_2+m)}{\Gamma\,(w_3+m)\,\Gamma\,(w_4+m)} =$$
$$= [(w_1w_2 - w_3w_4) + (w_1 + w_2 - w_3 - w_4)\,m]\,\frac{\Gamma\,(w_1+m)\,\Gamma\,(w_2+m)}{\Gamma\,(1+w_3+m)\,\Gamma\,(1+w_4+m)}.$$

Положим

$$w_1 = \varkappa + s/2, \quad w_2 = \varkappa - w/2, \quad w_3 = \varkappa - s/2, \quad w_4 = \varkappa + w/2$$

и просуммируем обе части этого равенства по m от 0 до $n-1$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). В результате получим тождество

$$\frac{1}{s-w} \cdot \frac{\Gamma(\varkappa+n+s/2)\Gamma(\varkappa+n-w/2)}{\Gamma(\varkappa+n-s/2)\Gamma(\varkappa+n+w/2)} - \frac{1}{s-w} \cdot \frac{\Gamma(\varkappa+s/2)\Gamma(\varkappa-w/2)}{\Gamma(\varkappa-s/2)\Gamma(\varkappa+w/2)} =$$
$$= \sum_{m=0}^{n-1} (\varkappa+m) \cdot \frac{\Gamma(\varkappa+m+s/2)\Gamma(\varkappa+m-w/2)}{\Gamma(1+\varkappa+m-s/2)\Gamma(1+\varkappa+m+w/2)}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{w-s} = \sum_{m=0}^{n-1} (\varkappa+m)\gamma_m(\varkappa; s)\gamma_m\,(\varkappa; -w) +$$
$$+\frac{1}{w-s} \cdot \frac{\Gamma(\varkappa-s/2)\Gamma(\varkappa+n+s/2)}{\Gamma(\varkappa+s/2)\Gamma(\varkappa+n-w/2)} \cdot \frac{\Gamma(\varkappa+w/2)\Gamma(\varkappa+n-w/2)}{\Gamma(\varkappa-w/2)\Gamma(\varkappa+n+w/2)}. \tag{16}$$

Отсюда для $\mathrm{Re}(s)<\alpha$ с $\alpha\in(-\mu,\mu)$ находим

$$\psi(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w)\,=\,\alpha}\frac{\psi(w)\,dw}{w-s}=\sum_{m\,=\,0}^{n-1}(\varkappa+m)\left\langle\psi,\gamma_m(\varkappa;\ldots)\right\rangle\gamma_m(\varkappa;s)+$$

$$+\frac{\Gamma\left(\varkappa-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\varkappa+n+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\varkappa+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\varkappa+n-\frac{s}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w)=\alpha}\frac{\Gamma\left(\varkappa+\frac{w}{2}\right)\Gamma\left(\varkappa+n-\frac{w}{2}\right)}{\Gamma\left(\varkappa-\frac{w}{2}\right)\Gamma\left(x+n-\frac{w}{2}\right)}\frac{\psi(w)\,dw}{w-s}.$$

Последнее выражение, согласно (14) и лемме 5, оценивается как

$$O_\varepsilon\left(n^{-\delta+\mathrm{Re}(s)}+n^{-\mu+\mathrm{Re}(s)}\log(n)\right).$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим (15). Теорема 1 полностью доказана. □

Теперь получим оценку скалярных произведений в (15) при $m\to\infty$.

Лемма 6. *Пусть* μ, $\delta\in(0,\infty)$, $\mathrm{Re}(\varkappa)\in(\mu/2,\infty)$ *и* $\psi\in\mathcal{B}_\mu(\delta)$. *Тогда* $\forall\mu'\in(0,\mu)$ *и* $\forall\delta'\in(0,\,\delta)$

$$\left\langle\psi,\gamma_m(\varkappa;\ldots)\right\rangle\underset{\mu'}{\ll}m^{-\delta'}+m^{-1-\mu'}\log(m).\tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действуя точно так же, как при доказательстве леммы 5, получим

$$\left\langle\psi,\gamma_m\left(\varkappa;\ldots\right)\right\rangle=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w)\,=\,\mu'}\frac{\Gamma(\varkappa+w/2)}{\Gamma(\varkappa-w/2)}\frac{\Gamma(\varkappa+m-w/2)}{\Gamma(1+\varkappa+m+w/2)}\psi(w)\,dw\ll$$

$$\ll\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|t|)^{\mu'}(m+|t|)^{-1-\mu'}(1+|t|)^{-\delta'}\,dt\ll$$

$$\ll m^{-1-\mu'}\int\limits_0^m(1+t)^{\mu'-\delta'}\,dt+\int\limits_m^\infty(1+t)^{-1-\delta'}dt\ll m^{-1-\mu'}\log(m)+m^{-\delta'}.$$

Лемма 6 доказана. □

Замечание 1. Мы сознательно выбрали ψ в $\mathcal{B}_\mu(\delta)$, а не в $\mathcal{B}_\mu^{(-)}(\delta)$, поскольку во втором случае оценка (17) была бы хуже для $1<\delta<\infty$. Поэтому, если $\psi\in\mathcal{B}_\mu(\delta)$, то для $\mathrm{Re}(s)<\min(\mu,\delta-1)$ имеет место разложение

$$\psi^{(-)}(s)=\sum_{m\,=\,0}^{\infty}(\varkappa+m)\left\langle\psi,\gamma_m(\varkappa;\ldots)\right\rangle\gamma_m(\varkappa;s)\tag{18}$$

в абсолютно сходящийся ряд. При этом мы воспользовались очевидным равенством

$$\left\langle\psi,\gamma_m\left(\varkappa;\ldots\right)\right\rangle=\left\langle\psi^{(-)},\gamma_m(\varkappa;\ldots)\right\rangle.$$

Теорема 2 (Равенство Персеваля). *Пусть* $\mu\in(0,\infty)$, $\delta\in(1/2,\infty)$, $\mathrm{Re}(\varkappa)\in(\mu/2,\infty)$. *Тогда* $\forall\psi_1,\psi_2\in\mathcal{B}_\mu(\delta)$

$$\left\langle\psi_1^{(-)},\psi_2^{(-)}\right\rangle=\sum_{m\,=\,0}^{\infty}(\varkappa+m)\left\langle\psi_1,\gamma_m(\varkappa;\ldots)\right\rangle\left\langle\gamma_m(\varkappa;\ldots),\psi_2\right\rangle.\tag{19}$$

Доказательство. Пусть $0 < \alpha < \min(\mu, \delta - 1/2)$. Тогда согласно (16) для натурального n

$$\sum_{m=0}^{n-1} (\varkappa + m) \langle \psi_1, \gamma_m(\varkappa; \ldots) \rangle \langle \gamma_m(\varkappa; \ldots), \psi_2 \rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(w_1)=\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(w_2)=-\alpha} \frac{\psi_1(w_1)\,\psi_2(-w_2)}{w_1 - w_2} dw_1\, dw_2 -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(w_1)=\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(w_2)=-\alpha} \left(\varkappa + n + \frac{w_1}{2}\right)\left(\varkappa + n - \frac{w_2}{2}\right) \times$$

$$\times \gamma_n(\varkappa; -w_1)\, \gamma_n(\varkappa; w_2) \frac{\psi_1(w_1)\,\psi_2(-w_2)}{w_1 - w_2} dw_1\, dw_2.$$

Оба интеграла абсолютно сходятся. Выполнив в первом интеграле интегрирование по w_1, получим величину

$$\left\langle \psi_1^{(-)}, \psi_2 \right\rangle = \left\langle \psi_1^{(-)}, \psi_2^{(-)} \right\rangle.$$

В соответствии с (14) второй интеграл $\forall \delta' \in (0, \delta)$ мажорируется абсолютно сходящимся интегралом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |t_1|)^{\alpha - \delta'} (n + |t_1|)^{-\alpha} (1 + |t_2|)^{\alpha - \delta'} (n + |t_2|)^{-\alpha} (1 + |t_1 - t_2|)^{-1} dt_1\, dt_2.$$

Можно считать, что $\delta' \in (1/2, 1)$. Тогда интеграл не превосходит (с точностью до константы) величины

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |t_1|)^{\alpha - \delta'} (n + |t_1|)^{-\alpha} \left(\int\limits_{|t_1 - t_2| \leqslant |t_1|/2} (1 + |t_2|)^{\alpha - \delta'} (n + |t_2|)^{-\alpha} (1 + |t_1 - t_2|)^{-1}\, dt_2 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |t_2|)^{\alpha - \delta'} (n + |t_2|)^{-\alpha} (1 + |t_1| + |t_2|)^{-1}\, dt_2 \right) dt_1 \ll$$

$$\ll \int\limits_{0}^{\infty} (1 + t_1)^{2\alpha - 2\delta'} (n + t_1)^{-2\alpha} \log(2 + t_1)\, dt_1 + n^{-\alpha} \int\limits_{0}^{n} (1 + t_1)^{\alpha - \delta'} \times$$

$$\times \left(n^{-\alpha} (1 + t_1)^{-1} \int\limits_{0}^{t_1} (1 + t_2)^{\alpha - \delta'}\, dt_2 + n^{-\alpha} \int\limits_{t_1}^{n} (1 + t_2)^{-1 + \alpha - \delta'}\, dt_2 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{n}^{\infty} (1 + t_2)^{-1 - \delta'}\, dt_2 \right) dt_1 + \int\limits_{n}^{\infty} (1 + t_1)^{-\delta'} \left(n^{-\alpha} (1 + t_1)^{-1} \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{0}^{n} (1 + t_2)^{\alpha - \delta'} dt_2 + (1 + t_1)^{-1} \int\limits_{n}^{t_1} (1 + t_2)^{-\delta'} dt_2 + \int\limits_{t_1}^{\infty} (1 + t_2)^{-1 - \delta'} dt_2 \right) dt_1 \ll$$

$$\ll n^{-\alpha-\alpha} + n^{-\alpha-\delta'} + n^{1-2\delta'}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим утверждение теоремы 2. □

2. Разложение в интеграл по гамма-функциям

Для $\mathrm{Re}(s_1), \mathrm{Re}(s_2) \in (0, \infty)$

$$B(s_1, s_2) = \int_0^1 t^{s_1-1}(1-t)^{s_2-1}dt = \int_0^\infty y^{s_1-1}(1+y)^{-s_1-s_2}dy =$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} (\sin\varphi)^{2s_1-1}(\cos\varphi)^{2s_2-1}d\varphi = \frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{\Gamma(s_1+s_2)}. \quad (20)$$

Положив $s_1 = s$ и $s_1 + s_2 = w$, для $0 < \alpha < \mathrm{Re}(w)$ с помощью формулы обращения Меллина находим

$$\Gamma(w)(1+y)^{-w} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=\alpha} \Gamma(s)\Gamma(w-s)y^{-s}ds. \quad (21)$$

Отсюда для $\mathrm{Re}(w_j) \in (0, \infty)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ получаем

$$\frac{\Gamma(w_1+w_4)\,y^{w_1}}{(1+y)^{w_1+w_4}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=0} \Gamma(w_1+s)\,\Gamma(w_4-s)\,y^{-s}ds,$$
$$\frac{\Gamma(w_2+w_3)\,y^{w_3}}{(1+y)^{w_2+w_3}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=0} \Gamma(w_3+s)\,\Gamma(w_2-s)\,y^{-s}ds.$$

Применяя равенство Парсеваля для преобразования Меллина, приходим к интегралу Барнса

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \Gamma(w_1+s)\,\Gamma(w_2+s)\,\Gamma(w_3-s)\,\Gamma(w_4-s)\,ds =$$
$$= \frac{\Gamma(w_1+w_3)\,\Gamma(w_1+w_4)\,\Gamma(w_2+w_3)\,\Gamma(w_2+w_4)}{\Gamma(w_1+w_2+w_3+w_4)}. \quad (22)$$

Здесь K — любой кусочно-гладкий контур, разделяющий плоскость на две части и обходящий снизу вверх полюсы $\Gamma(w_1+s)\Gamma(w_2+s)$ справа, а полюсы $\Gamma(w_3-s)\Gamma(w_4-s)$ — слева. С помощью принципа аналитического продолжения равенство (22) распространяется на любые комплексные w_1, w_2, w_3, w_4, для которых у функций $\Gamma(w_1+s)\Gamma(w_2+s)$ и $\Gamma(w_3-s)\Gamma(w_4-s)$ нет общих полюсов.

Лемма 7. *Пусть $\psi(s)$ — голоморфная в полюсе $-\mu < \mathrm{Re}(s) < \mu$ функция, для которой при некотором $\theta \in (0, \pi/2)$ выполнена оценка*

$$\psi(s) \ll \exp\left[(\pi/2-\theta)\,|s|\right]$$

и на прямой $\mathrm{Re}(\varkappa) = 0 \quad \forall \alpha \in (0, \mu)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\alpha} \Gamma\left(s/2 + \varkappa\right) \Gamma\left(s/2 - \varkappa\right) \psi(-\, s) ds = 0. \tag{23}$$

Тогда $\psi(s) \equiv 0$ *в области определения.*

Доказательство. Согласно формуле Стирлинга при $|t| \to \infty$ равномерно по $\sigma \in (-\,\delta, \delta) \quad \forall \delta \in (0, \infty)$

$$|\Gamma(\sigma + it)| \asymp |t|^{\sigma - 1/2} \exp\left(-\,\frac{\pi}{2}|t|\right). \tag{24}$$

Умножив обе части (23) на $y^{-\varkappa}$ и проинтегрировав по контуру $\mathrm{Re}(\varkappa) = 0$, получим

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\alpha} \frac{y^{s/2}}{(1+y)^s} \Gamma(s)\psi(-\, s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\alpha} \left(y^{1/2} + y^{-1/2}\right)^{-s} \Gamma(s)\psi(-\, s)\, ds.$$

Следовательно, для $z \in [2, \infty)$

$$\mathrm{g}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\alpha} \Gamma(s)\psi(-\, s) z^{-s} ds = 0.$$

Из оценки на $\psi(s)$ и (24) следует, что $\mathrm{g}(z)$ определена и голоморфна по z в угле $-\,\theta < \arg(z) < \theta$. Следовательно, $\mathrm{g}(z) = 0 \quad \forall z \in (0, \infty)$. Поэтому $\Gamma(s)\psi(-\, s) \equiv 0 \quad \Rightarrow$ $\psi(-\, s) \equiv 0$. Лемма 7 доказана. □

Теорема 3. *Пусть* $\mu \in (0, 1/2)$ *и* $h(\varkappa)$ — *чётная голоморфная функция из* $\mathcal{B}_\mu(\delta)$ *с* $\delta \in (2 + 2\mu, \infty)$. *Тогда в полосе* $-\,\mu < \mathrm{Re}(\varkappa) < \mu$

$$h(\varkappa) = -\,\frac{1}{\pi} \cos(\pi\varkappa) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(s)=2\alpha'} \Gamma\left(s/2 + \varkappa\right) \Gamma\left(s/2 - \varkappa\right) \psi(-\, s)\, ds \tag{25}$$

с $|\mathrm{Re}(\varkappa)| < \alpha' < \mu$, *где для* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1 + 2\mu$

$$\psi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0} \Gamma\left(s/2 + \varkappa\right) \Gamma\left(s/2 - \varkappa\right) \varkappa \sin(\pi\varkappa) h(\varkappa)\, d\varkappa, \tag{26}$$

которая продолжается голоморфно в полосу $-\,\mu < \mathrm{Re}(s/2) < 1/2 + \mu$ *с оценкой*

$$\psi(s) \underset{\mu'}{\ll} \left(1 + |s|\right)^{-1 + \mathrm{Re}(s)}, \quad \mu' \in (0, \mu), \tag{27}$$

$\forall -\,\mu' \leqslant \mathrm{Re}(s/2) \leqslant \mu'$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \left(\mu + \mu'\right)/2$. Тогда в полосе $-\,\mu' \leqslant \mathrm{Re}(s/2) \leqslant \mu'$

$$-\,1 < -\,\mu' - \alpha \leqslant \mathrm{Re}(s/2) - \alpha \leqslant \mu' - \alpha < 0,$$
$$0 < -\,\mu' + \alpha \leqslant \mathrm{Re}(s/2) + \alpha \leqslant \mu' + \alpha < 1.$$

Далее для $\mathrm{Re}(\varkappa)=-\alpha$, $\mathrm{Im}(\varkappa)=r$, $\mathrm{Re}(s/2)=\sigma\in[-\mu',\mu']$, $\mathrm{Im}(s/2)=t$ из (24) получаем

$$\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\sin(\pi\varkappa) \ll_{\mu'} (1+|t+r|)^{-1/2+\sigma-\alpha}(1+|t-r|)^{-1/2+\sigma+\alpha}.$$

Поэтому для $2+2\mu<\delta'<\delta$ (переносим контур на прямую $\mathrm{Re}(\varkappa)=-\alpha$)

$$\psi(s)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1+s)h\left(\frac{s}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=-\alpha}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)\varkappa\sin(\pi\varkappa)h(\varkappa)d\varkappa \ll (1+|s|)^{\frac{1}{2}-\delta'+2\sigma}+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|t+r|)^{-\frac{1}{2}+\sigma-\alpha}(1+|t-r|)^{-\frac{1}{2}+\sigma+\alpha}(1+|r|)^{1-\delta'}dr \ll$$

$$\ll (1+|s|)^{-1+\mathrm{Re}(s)}+\int\limits_{|r|\leqslant|t|/2}\ldots\,dr+\int\limits_{|t|/2\leqslant|r+t|\leqslant 3|t|/2}\ldots\,dr+$$

$$+\int\limits_{|t|/2\leqslant|r-t|\leqslant 3|t|/2}\ldots\,dr+\int\limits_{3|t|/2\leqslant|r|<\infty}\ldots\,dr \ll_{\mu'} (1+|s|)^{-1+\mathrm{Re}(s)}.$$

Оценка (27) доказана.

Пусть $\mathrm{Re}(w)=0$, $0<\mathrm{Re}(\varkappa)<\alpha<\mu$. Из (22) находим (справа от прямой $\mathrm{Re}(s)=-2\alpha$ располагаются полюсы $\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)$ в точках $\pm 2\varkappa$)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=-2\alpha}\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\Gamma(-s/2+w)\Gamma(-s/2-w)\,ds=$$

$$=-\Gamma(2\varkappa)\Gamma(-\varkappa+w)\Gamma(-\varkappa-w)-\Gamma(-2\varkappa)\Gamma(\varkappa+w)\Gamma(\varkappa-w). \tag{28}$$

Далее

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=2\alpha}\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\psi(-s)ds=\Gamma(2\varkappa)\psi(-2\varkappa)+$$

$$+\Gamma(-2\varkappa)\psi(2\varkappa)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=-2\alpha}\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\psi(-s)\,ds. \tag{29}$$

С помощью (26) интеграл в правой части можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=-2\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w)=0}\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\Gamma(-s/2+w)\Gamma(-s/2-w)\times$$

$$\times w\sin(\pi w)h(w)\,dw\,ds.$$

Выполнив интегрирование по s в соответствии с (28) из (29), находим

$$\frac{1}{\pi}\cos(\pi\varkappa)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=2\alpha}\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\psi(-s)\,ds=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cos(\pi\varkappa)\Gamma(2\varkappa)\psi(-2\varkappa)+\frac{2}{\pi}\cos(\pi\varkappa)\Gamma(-2\varkappa)\psi(2\varkappa)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\cos(\pi\varkappa)\Gamma(2\varkappa)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w)=0}\Gamma(-\varkappa+w)\Gamma(-\varkappa-w)w\sin(\pi w)h(w)\,dw-$$

$$-\frac{2}{\pi}\cos(\pi\varkappa)\Gamma(-2\varkappa)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w)=0}\Gamma(\varkappa+w)\Gamma(\varkappa-w)w\sin(\pi w)h(w)\,dw=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cos(\pi\varkappa)\Gamma(2\varkappa)\psi(-2\varkappa)+\frac{4}{\pi}\cos(\pi\varkappa)\Gamma(2\varkappa)\Gamma(-2\varkappa)\varkappa\sin(\pi\varkappa)h(\varkappa)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\cos(\pi\varkappa)\Gamma(2\varkappa)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma(-\varkappa+w)\Gamma(-\varkappa-w)w\sin(\pi w)h(w)\,dw.$$

Половина слагаемого $\frac{4}{\pi}\cos(\pi\varkappa)\Gamma(2\varkappa)\Gamma(-2\varkappa)\varkappa\sin(\pi\varkappa)h(\varkappa)$ возникла из ранее выписанного интегрального представления для $\psi(s)$ с интегрированием по контуру $\mathrm{Re}(\varkappa)=-\alpha$, а вторая половина — при деформации контура интегрирования в новый, обходящий точку $\varkappa$ справа, а точку $\varkappa$ — слева. Последний интеграл, в соответствии с (26), равен $\psi(-2\varkappa)$. Осталось только заметить, что

$$\frac{4}{\pi}\cos(\pi\varkappa)\Gamma(2\varkappa)\Gamma(-2\varkappa)\varkappa\sin(\pi\varkappa)h(\varkappa)=-\frac{\sin(2\pi\varkappa)}{\pi}\Gamma(2\varkappa)\Gamma(1-2\varkappa)h(\varkappa)=-h(\varkappa).$$

Теорема 3 полностью доказана. □

Теорема 4 (Обратная к теореме 3). *Пусть* $\mu\in(0,\,1/2)$, $\delta\in(2+2\mu,\infty)$ *и* $\psi(s)$ — *голоморфная в полосе* $-\mu<\mathrm{Re}(s/2)<\mu$ *функция, для которой*

а) выполнена оценка (27)*;*

б) функция $h(\varkappa)$*, определяемая преобразованием* (25)*, лежит в* $\mathcal{B}_\mu(\delta)$*.*

Тогда для $\psi(s)$ *имеет место представление* (26)*.*

Доказательство. По h из (25) построим

$$\psi^*(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\varkappa\sin(\pi\varkappa)h(\varkappa)\,d\varkappa.$$

Согласно теореме 3

$$0\equiv h(\varkappa)-h(\varkappa)=-\frac{1}{\pi}\cos(\pi\varkappa)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=2\alpha}\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\left(\psi(-s)-\psi^*(-s)\right)ds.$$

Применяя лемму 7, получим $\psi(s)=\psi^*(s)$. Теорема 4 доказана. □

Замечание 2. Нетрудно показать, что если $\forall\mu' \in (0,\,\mu)$ функция $\psi(s)$ голоморфна в полосе $-\,\mu' \leqslant \mathrm{Re}(s/2) \leqslant 1/2+\mu'$ и при этом

$$\psi(s) \underset{\mu'}{\ll} (1+|s|)^{-3/2-2\mu'},$$

то $h(\varkappa)$ лежит в $\mathcal{B}_{\mu'}(2+2\mu-2\mu')$. Поэтому по теореме 4 в полосе $0<\mathrm{Re}(s)<1+2\mu$ справедливо представление (26) для ψ.

Формулам обращения (25) и (26) соответствует равенство Персеваля

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=0}\psi_1(s)\psi_2(-\,s)ds = -\,\pi\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0} h_1(\varkappa)h_2(\varkappa)\varkappa\,\mathrm{tg}(\pi\varkappa)d\varkappa. \tag{30}$$

Положим для $0<\mathrm{Re}(w_j)<\infty$ $(j=0,1,2,3)$

$$\psi_1(s)=\Gamma\left(w_0+s/2\right)\Gamma\left(w_1+s/2\right), \qquad \psi_2(s)=\Gamma\left(w_2+s/2\right)\Gamma\left(w_3+s/2\right).$$

Вычисляя $h_1(\varkappa)$ и $h_2(\varkappa)$ по формуле (22) из (30) находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\prod_{j\,=\,0}^{3}\left(\Gamma\left(w_j+\varkappa\right)\Gamma\left(w_j-\varkappa\right)\right)\cdot\varkappa\sin(2\pi\varkappa)d\varkappa =$$
$$= -\,\pi\cdot\frac{\Gamma\left(w_0+w_1\right)\Gamma\left(w_0+w_2\right)\Gamma\left(w_0+w_3\right)\Gamma\left(w_1+w_2\right)\Gamma\left(w_1+w_3\right)\Gamma\left(w_2+w_3\right)}{\Gamma\left(w_0+w_1+w_2+w_3\right)}. \tag{31}$$

Обращая это равенство по переменной w_0 с помощью (25) и (26), получим еще один интеграл Барнса

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma\left(s+w_1\right)\Gamma\left(s+w_2\right)\Gamma\left(s+w_3\right)\Gamma(-\,s+\varkappa)\Gamma(-\,s-\varkappa)}{\Gamma\left(s+w_1+w_2+w_3\right)}ds =$$
$$= \frac{\Gamma\left(w_1+\varkappa\right)\Gamma\left(w_1-\varkappa\right)\Gamma\left(w_2+\varkappa\right)\Gamma\left(w_2-\varkappa\right)\Gamma\left(w_3+\varkappa\right)\Gamma\left(w_3-\varkappa\right)}{\Gamma\left(w_1+w_2\right)\Gamma\left(w_1+w_3\right)\Gamma\left(w_2+w_3\right)}, \tag{32}$$

где контур обходит полюсы $\Gamma\left(s+w_1\right)\Gamma\left(s+w_2\right)\Gamma\left(s+w_3\right)$ справа, а полюсы $\Gamma(-\,s+\varkappa)\Gamma(-\,s-\varkappa)$ слева.

Из (22) по формулам обращения непосредственно находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\prod_{j\,=\,1}^{3}\left(\Gamma\left(w_j+\varkappa\right)\Gamma\left(w_j-\varkappa\right)\right)\cdot\varkappa\sin(2\pi\varkappa)\,d\varkappa =$$
$$= -\,\pi\cdot\Gamma\left(w_1+w_2\right)\Gamma\left(w_1+w_3\right)\Gamma\left(w_2+w_3\right). \tag{33}$$

3. Смешанное разложение голоморфных в полосе функций

Теорема 5. *Пусть* $k \in \mathbb{C}$, $\mu \in (0,\,1/2)$ *и* $h(\varkappa)$ *— четная голоморфная функция из* $\mathcal{B}_\mu(\delta)$ *с* $\delta \in (2+2\mu, \infty)$, *для которой* $h(\varkappa) = 0$ *в точках* $\varkappa$ *с* $\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa) = 0$. *Тогда в полосе* $-\mu < \mathrm{Re}(\varkappa) < \mu$

$$h(\varkappa) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=2\alpha} \cos(\pi k/2 - \pi s/2)\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\psi(-\,s)\,ds \tag{34}$$

с $|\mathrm{Re}(\varkappa)| < \alpha < \mu$, *где для* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1+2\mu$

$$\psi(s) = \pi\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\frac{\Gamma(s/2+\varkappa)}{\Gamma(1-s/2+\varkappa)}\frac{\varkappa}{\cos(\pi k/2-\pi\varkappa)}h(\varkappa)\,d\varkappa \tag{35}$$

и $\forall \mu' \in (0,\mu)$ $\quad\psi(s)$ *продолжается голоморфно в полосу* $-\mu' \leqslant \mathrm{Re}(s/2) \leqslant \mu'$ *с оценкой*

$$\psi(s) \underset{\mu'}{\ll} (1+|s|)^{-1+\mathrm{Re}(s)}. \tag{36}$$

Доказательство. Оценка (36) устанавливается точно так же, как (27) в теореме 3. Поэтому остановимся только на доказательстве (34). Положим для $\varepsilon \in [0,\,1)$

$$h_\varepsilon(\varkappa) = \exp(\varepsilon\varkappa^2)h(\varkappa).$$

Соответствующая ψ_ε удовлетворяет (36) равномерно по ε. Далее, ввиду четности $h_\varepsilon(\varkappa)$

$$\psi_\varepsilon(s) = \,=-\cos(\pi k/2-\pi s/2)\times \\ \times\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\frac{\varkappa\sin(2\pi\varkappa)}{\cos(\pi k)+\cos(2\pi\varkappa)}h_\varepsilon(\varkappa)\,d\varkappa. \tag{37}$$

По формуле обращения из теоремы 3

$$h_\varepsilon(\varkappa) = \frac{\cos(\pi k)+\cos(2\pi\varkappa)}{2\pi}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=2\alpha}\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\frac{\psi_\varepsilon(-\,s)}{\cos(\pi k/2+\pi s/2)}ds. \tag{38}$$

Далее будем предполагать, что $\varepsilon \neq 0$. Так как

$$\frac{\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)}{\Gamma(s)} = \int\limits_0^1 t^{s/2+\varkappa-1}(1-t)^{s/2-\varkappa-1}dt,$$

то при $\mathrm{Re}(s) \to \infty$ равномерно на прямой $\mathrm{Re}(\varkappa) = 0$

$$\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa) \ll 2^{-\mathrm{Re}(s)}|\Gamma(s)|. \tag{39}$$

С помощью этой оценки из (37) для $0 \leqslant \mathrm{Re} < \infty$ получаем

$$\frac{\psi_\varepsilon(s)}{\cos(\pi k/2-\pi s/2)} \underset{\varepsilon}{\ll} 2^{-\mathrm{Re}(s)}|\Gamma(s)|. \tag{40}$$

Принимая во внимание эту оценку и подсчитывая вычеты подынтегрального выражения в (38) слева от прямой $\mathrm{Re}(s)=2\alpha$, получим

$$h_\varepsilon(\varkappa) = \frac{1}{\pi}\big(\cos(\pi k) + \cos(2\pi\varkappa)\big)\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}\Gamma(2\varkappa - m)\frac{\psi_\varepsilon(-2\varkappa+2m)}{\cos(\pi k/2 + \pi\varkappa - \pi m)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}\Gamma(-2\varkappa - m)\frac{\psi_\varepsilon(2\varkappa+2m)}{\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa - \pi m)}\right] =$$

$$= \frac{2}{\sin(2\pi\varkappa)}\cdot\left[\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\psi_\varepsilon(-2\varkappa+2m)}{m!\,\Gamma(1-2\varkappa+m)} - \right.$$

$$\left. - \cos(\pi k/2 + \pi\varkappa)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\psi_\varepsilon(2\varkappa+2m)}{m!\Gamma(1+2\varkappa+m)}\right].$$

Точно так же находим

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=2\alpha}\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\cos(\pi k/2 - \pi s/2)\psi_\varepsilon(-s)ds =$$

$$= \frac{2}{\sin(2\pi\varkappa)}\left[\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\psi_\varepsilon(-2\varkappa+2m)}{m!\,\Gamma(1-2\varkappa+m)} - \right.$$

$$\left. - \cos(\pi k/2 + \pi\varkappa)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\psi_\varepsilon(2\varkappa+2m)}{m!\,\Gamma(1+2\varkappa+m)}\right].$$

Следовательно, для $h_\varepsilon(\varkappa)$ справедливо представление (34). Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим требуемое равенство. Теорема 5 доказана. □

Лемма 8. *Пусть $k\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{Z}$ и $0<\mu<n+(\mathrm{Re}(k)-1)/2$, $h(\varkappa)$ — четная голоморфная функция из $\mathcal{B}(\delta)$ с $\delta\in(2+2\mu,\infty)$ и $h(\varkappa)=0$ в точках $\varkappa$ с $\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa)=0$. Тогда функция*

$$\psi^*(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+n-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+n+\frac{s}{2}\right)}\psi(s)$$

с

$$\psi(s) = \pi\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\frac{\Gamma(s/2+\varkappa)}{\Gamma(1-s/2+\varkappa)}\frac{\varkappa}{\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa)}h(\varkappa)\,d\varkappa$$

принадлежит $\mathcal{B}_{2\mu}^{(+)}(1)$ для $\mu\in(0,\,1/2)$.

Доказательство. Так как в полосе $-\mu<\mathrm{Re}(s/2)<\mu$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+n-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+n+\frac{s}{2}\right)} \ll (1+|s|)^{-\mathrm{Re}(s)},$$

то в соответствии с оценкой (36) из теоремы 5 $\psi \in \mathcal{B}_{2\mu}(1)$. Для $\varepsilon \in (0,1)$ положим $h_\varepsilon(\varkappa) = \exp(\varepsilon\varkappa^2)h(\varkappa)$. Этой функции соответствуют ψ_ε и ψ_ε^*. Для $m = 0,1,2,\ldots$ (см. (12))

$$\left\langle \psi_\varepsilon^*, \gamma_m\left(\frac{k-1}{2}+n;\ldots\right)\right\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=0} \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+n+m-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+n+m+\frac{s}{2}\right)}\psi_\varepsilon(s)\,ds.$$

Согласно представлению (37), подынтегральное выражение — голоморфная в полуплоскости $0 \leqslant \mathrm{Re}(s) < \infty$ функция с оценкой (см. (40))

$$\ll \frac{|\Gamma(s)|2^{-\mathrm{Re}(s)}}{\Gamma\left(\frac{3-k}{2}-n-m+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+k}{2}+n+m+\frac{s}{2}\right)} \ll (1+|s|)^{-3/2}.$$

При этом мы воспользовались равенством $2\sqrt{\pi}\Gamma(s) = 2^s\Gamma(s/)\Gamma(1/2+s/2)$ и (14). Следовательно,

$$\left\langle \psi_\varepsilon^*, \gamma_m\left(\frac{k-1}{2}+n;\ldots\right)\right\rangle = 0.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим что ψ^* ортогональна к базису в $\mathcal{B}_{2\mu}^{(-)}(1)$. Поэтому, по теореме 1, $\psi^* \in \mathcal{B}_{2\mu}^{(+)}(1)$. Лемма 8 доказана. $\square$

Лемма 9. *Пусть $k \in \mathbb{C}$ с $-1 < \mathrm{Re}(k) < \infty$, $\varphi \in \mathcal{B}_\mu(\delta)$ для некоторых $\mu, \delta \in (0,\infty)$. Тогда для $|\mathrm{Re}(\varkappa)| < \alpha < \infty$*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=2\alpha} \cos\left(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+\frac{s}{2}\right)}\varphi^{(-)}(-s)d\,s = 0.$$

Доказательство. Функция $\varphi^{(-)}(s)$ голоморфна в полуплоскости $-\infty < \mathrm{Re}(s) \leqslant 0$ с оценкой

$$\varphi^{(-)}(s) \underset{\delta'}{\ll} (1+|s|)^{-\min(1,\delta')}$$

$\forall\delta' \in (0,\delta)$ (см. доказательство леммы 1). Интересующий нас интеграл не зависит от α, и его можно записать в виде

$$\pi\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=2\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+k}{2}+\frac{s}{2}\right)}\varphi^{(-)}(-s)\,ds.$$

Переходя к пределу при $\alpha \to +\infty$, получим утверждение леммы 9. $\square$

Теорема 6. *Пусть $\mu \in (0,1/2)$, $-1 < \mathrm{Re}(k) \leqslant 1)$, $\delta \in (2+2\mu,\infty)$ и $\psi(s)$ — голоморфная в полосе $-\mu < \mathrm{Re}(s/2) < 1/2+\mu$ функция, для которой*

а) выполнена оценка (36);

б) функция $h(\varkappa)$, определяемая преобразованием (34), принадлежит $\mathcal{B}_\mu(\delta)$.

Тогда в полосе $-\mu < \mathrm{Re}(s/2) < 1/2+\mu$ для $\mathrm{Re}(s/2) < \alpha < \mu$

$$\psi(s) = \pi\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=\alpha} \frac{\Gamma(\varkappa+s/2)}{\Gamma(1-s/2+\varkappa)}\frac{\varkappa}{\cos(\pi k/2-\pi\varkappa)}h(\varkappa)\,d\varkappa +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{k-1}{2}+m\right)h\left(\frac{k-1}{2}+m\right)\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+m+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+m-\frac{s}{2}\right)}, \tag{41}$$

где

$$h\left(\frac{k-1}{2}+m\right) = \frac{(-1)^m}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(w)=0} \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+m+\frac{w}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+m-\frac{w}{2}\right)} \psi(-w)\,dw. \tag{42}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В дополнение к условию $\mu \in (0,\, 1/2)$ без ограничения общности можно добавить еще одно $\mu < 1/2 + \mathrm{Re}(k)/2$. Обозначим через $\widetilde{\psi}(s)$ проекцию $\psi(s)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}-\frac{s}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+\frac{s}{2}\right)$ на $\mathcal{B}^{(+)}_{2\mu}(1)$. С помощью леммы 9, действуя точно так же, как при доказательстве теоремы 5, для $-1 < \mathrm{Re}(k) < 1$ находим

$$h(\varkappa) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(s)=2\alpha} \cos\left(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)\psi(-s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(s)=2\alpha} \cos\left(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+\frac{s}{2}\right)}\widetilde{\psi}(-s)\,ds =$$

$$= \frac{\cos(\pi k)+\cos(2\pi\varkappa)}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(s)=2\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)}{\cos\left(\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi s}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+\frac{s}{2}\right)}\widetilde{\psi}(-s)\,ds.$$

Здесь $|\mathrm{Re}(\varkappa)| < \alpha < \mu$. По формуле обращения (26) из теоремы 4 получаем

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+\frac{s}{2}\right)}\widetilde{\psi}(s) =$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi s}{2}\right)\cdot\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0} \Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)\frac{\varkappa\sin(2\pi\varkappa)h(\varkappa)}{\cos(\pi k)+\cos(2\pi\varkappa)}\,d\varkappa =$$

$$= \pi\cdot\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}+\varkappa\right)}\frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos(\pi k/2-\pi\varkappa)}\,dx.$$

Теперь осталось только воспользоваться теоремой 1. Случай $\mathrm{Re}(k)=1$ устанавливается с помощью перехода. Теорема 6 полностью доказана. □

Замечание 3. Если $\forall\mu' \in (0,\, \mu)$ функция $\psi(s)$ голоморфна в полосе $-\mu' \leqslant \mathrm{Re}(s/2) \leqslant 1/2 + \mu'$ и при этом

$$\psi(s) \underset{\mu'}{\ll} (1+|s|)^{-3/2-2\mu'},$$

то $h(\varkappa)$ из (34) принадлежит $\mathcal{B}_{\mu'}(2+2\mu-2\mu')$. Поэтому для таких ψ в полосе $0 < \mathrm{Re}(s/2) < 1/2 + \mu$ справедливо разложение (41).

Замечание 4. Если в полосе $-\mu < \mathrm{Re}(s/2) < \mu$

$$\psi(s) \ll (1+|s|)^{-1},$$

то ряд в (41) абсолютно сходится в полосе $-\infty < \mathrm{Re}(s/2) < \mu$.

4. Разложение по собственным функциям дифференциального оператора Уиттекера

Решениями дифференциального уравнения Уиттекера

$$z^2\frac{d^2W}{dz^2}+\left(\frac{1}{4}+\mu z-\frac{1}{4}z^2\right)W=\varkappa^2 W$$

являются линейно независимые функции

$$M_{\mu,\varkappa}(z)=z^{1/2+\varkappa}\exp\left(-\frac{z}{2}\right)\cdot\frac{\Gamma(1+2\varkappa)}{\Gamma(1/2-\mu+\varkappa)}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1/2-\mu+\varkappa+m)}{\Gamma(1+2\varkappa+m)}\cdot\frac{z^m}{m!},\quad (43)$$

$$W_{\mu,\varkappa}(z)=\frac{\Gamma(2\varkappa)}{\Gamma(1/2-\mu+\varkappa)}M_{\mu,-\varkappa}(z)+\frac{\Gamma(-2\varkappa)}{\Gamma(1/2-\mu-\varkappa)}M_{\mu,\varkappa}(z).\qquad (44)$$

Функция $W_{\mu,\varkappa}(z)$ — многозначная голоморфная функция на $\mathbb{C}$ по z, с особой точкой $z=0$. Она также голоморфна по μ и $\varkappa$ на всей плоскости комплексного переменного $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и чётна по $\varkappa$. Для $\mathrm{Re}(\varkappa)=0$ и $0<\alpha<\infty$ с $1/2-\mathrm{Re}(\mu)-\alpha\notin\mathbb{Z}$

$$z^{-1/2}\exp(z/2)W_{\mu,\varkappa}(z)=$$

$$=\sum_{0\leqslant m<-1/2+\alpha+\mathrm{Re}(\mu)}\frac{\Gamma(1/2-\mu+\varkappa+m)\Gamma(1/2-\mu-\varkappa+m)}{\Gamma(1/2-\mu+\varkappa)\Gamma(1/2-\mu-\varkappa)}\frac{(-1)^m}{m!}z^{-1/2+\mu-m}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\alpha}\frac{\Gamma(s+\varkappa)\Gamma(s-\varkappa)\Gamma(1/2-\mu-s)}{\Gamma(1/2-\mu+\varkappa)\Gamma(1/2-\mu-\varkappa)}z^{-s}ds.\qquad (45)$$

Теорема 7. *Пусть $\mu\in\mathbb{C}$, $\delta\in(0,\infty)$. Предположим, что $h(\varkappa)$ — чётная функция из $B_\delta(3/2+\mathrm{Re}(\mu)+\delta)$. Тогда*

$$\frac{h(\varkappa)}{\Gamma(1/2-\mu+\varkappa)\Gamma(1/2-\mu-\varkappa)\cos(\pi\varkappa)}=\frac{4}{\pi}\cos(\pi\varkappa/2)\cdot\int\limits_0^\infty y^{-1/2}W_{\mu,\varkappa}(y)\frac{\varphi(y)}{y}dy,\quad (46)$$

где

$$\varphi(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}y^{-1/2}M_{\mu,\varkappa}(y)\frac{\Gamma(1-2\varkappa)}{\Gamma(1/2-\mu-\varkappa)}\sin(\pi\varkappa/2)h(\varkappa)d\varkappa.\qquad (47)$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\delta\in(0,1/2)$. Для оценки $\varphi(y)$ на интервале $(0,1)$ перенесём контур в (47) на прямую $\mathrm{Re}(\varkappa)=\alpha$ с $\alpha\in(0,1)$. Тогда из (43) находим

$$\varphi(y)\ll_\alpha y^\alpha.\qquad (48)$$

Теперь рассмотрим случай $y\in[1,\infty)$. Принимая во внимание чётность $h(\varkappa)$, из (44) получим

$$\varphi(y)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}y^{-1/2}W_{\mu,\varkappa}(y)\varkappa\sin(\pi\varkappa/2)h(\varkappa)d\varkappa.\qquad (49)$$

Из интегрального представления ($\alpha \in (0,\infty)$)

$$y^{-1/2}\exp(-\,y/2)W_{\mu,\varkappa}(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\alpha}\frac{\Gamma(s+\varkappa)\Gamma(s-\varkappa)}{\Gamma(1/2-\mu+s)}y^{-s}ds \tag{50}$$

с $\mathrm{Re}(\varkappa)=0$ для $\mathrm{Im}(\varkappa)=r$ находим

$$\begin{gathered}y^{-1/2}\exp(-\,y/2)W_{\mu,\varkappa}(y)\ll\\ \ll\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\Gamma(\alpha+i(t+r))\Gamma(\alpha+i(t-r))|}{|\Gamma(1/2-\mu+\alpha+it)|}y^{-\alpha}dt\underset{\mu,\alpha}{\ll}y^{-\alpha}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|t+r|)^{\alpha-1/2}\times\\ \times(1+|t-r|)^{\alpha-1/2}(1+|t|)^{-\alpha+\mathrm{Re}(\mu)}\exp\Big(-\frac{\pi}{2}|t+r|-\frac{\pi}{2}|t-r|+\frac{\pi}{2}|t|\Big)\,dt\ll\\ \ll y^{-\alpha}(1+|r|)^{-1/2+\mathrm{Re}(\mu)}\exp\Big(-\frac{\pi}{2}|r|\Big)\,.\end{gathered}$$

Поэтому на промежутке $y\in[1,\infty)$

$$\varphi(y)\underset{\alpha}{\ll}y^{-\alpha} \tag{51}$$

$\forall\alpha\in(0,\infty)$.

Умножим обе части (49) на $y^{s-1}\exp(-\,y/2)$ и проинтегрируем по y от 0 до ∞. В соответствии с (50) получаем для $0<\mathrm{Re}(s)<\delta$

$$\psi(s)=\,-\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\frac{\Gamma(s+\varkappa)\Gamma(s-\varkappa)}{\Gamma(1/2-\mu+s)}\varkappa\sin(\pi\varkappa/2)h(\varkappa)d\varkappa,$$

где

$$\psi(s)=\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(y)\exp(-\,y/2)y^{s-1}dy.$$

С помощью формулы обращения (25) из теоремы 3 находим

$$h(\varkappa)=\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi\varkappa}{2}\right)\cos(\pi\varkappa)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\alpha}\Gamma(s+\varkappa)\Gamma(s-\varkappa)\Gamma(1/2-\mu-s)\psi(-\,s)ds.$$

Принимая во внимание (45), отсюда получаем (46). Теорема 7 полностью доказана. $\square$

Обращая рассуждения в доказательстве теоремы 7, получим следующее утверждение.

Теорема 8 (Обратная к теореме 7). *Пусть* $\mu\in\mathbb{C}$, $\delta\in(0,\infty)$ *и* $\varphi:(0,\infty)\to\mathbb{C}$ — *непрерывная функция, для которой* $\varphi(y)\underset{\delta'}{\ll}\min\Big(y^{\delta'},y^{-\delta'}\Big)$ $\forall\delta'\in(0,\delta)$. *Предполо-*

жим также, что $h \in B_\delta(3/2+\mathrm{Re}(\mu)+\delta)$, *где*

$$\frac{h(\varkappa)}{\Gamma(1/2-\mu+\varkappa)\Gamma(1/2-\mu-\varkappa)\cos(\pi\varkappa)}=$$
$$=-\frac{4}{\pi}\cos(\pi\varkappa/2)\cdot\sum_{0\leqslant m\leqslant -1/2+Re(\mu)}\frac{\Gamma(1/2-\mu+\varkappa+m)\Gamma(1/2-\mu-\varkappa+m)}{\Gamma(1/2-\mu+\varkappa)\Gamma(1/2-\mu-\varkappa)}\times$$
$$\times\frac{(-1)^m}{m!}\int\limits_0^\infty y^{-1/2+\mu-m}\exp(-y/2)\frac{\varphi(y)}{y}dy+\frac{4}{\pi}\int\limits_0^\infty y^{-1/2}W_{\mu,\varkappa}(y)\frac{\varphi(y)}{y}dy.$$

Тогда для φ *имеет место представление* (47).

В частном случае ($\mu=0$)

$$M_{0,\varkappa}(z)=4^\varkappa\Gamma(1+\varkappa)\sqrt{z}I_\varkappa(z/2),\quad W_{0,\varkappa}(z)=\sqrt{z/\pi}K_\varkappa(z/2)$$

после очевидных преобразований, приходим к следующей паре формул обращения (Канторовича – Лебедева)

$$\varphi(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\frac{I_{2\varkappa}(y)}{\cos(\pi\varkappa)}\varkappa h(\varkappa)\,d\varkappa=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}K_{2\varkappa}(y)\varkappa\sin(\pi\varkappa)h(\varkappa)\,d\varkappa,\tag{52}$$

$$h(\varkappa)=8\int\limits_0^\infty\cos(\pi\varkappa)K_{2\varkappa}(y)\frac{\varphi(y)}{y}dy.\tag{53}$$

Условия, при которых они справедливы, содержатся в формулировках теорем 7 и 8.

Известно, что для $|\mathrm{Re}(\varkappa)|<\alpha<\infty$

$$K_{2\varkappa}(y)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)\,=\,\alpha}\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\left(\frac{y}{2}\right)^{-s}ds.\tag{54}$$

Выполнив преобразование Меллина в обеих частях равенств (52) и (53) для $\psi(s)=-2^{1-s}\hat{\varphi}(s)$, где $\hat{\varphi}(s)$ — преобразование Меллина φ, приходим к формулам обращения (25) и (26).

Отметим, что (52) и (53) можно рассматривать как разложение φ по непрерывному спектру модифицированного дифференциального оператора Бесселя

$$D=z^2\frac{d^2}{dz^2}+z\frac{d}{dz}-z^2,$$

для которого $DK_\varkappa=\varkappa^2K_\varkappa$, где $K_\varkappa$ — функция Бесселя – Макдональда. При этом оператор действует на пространстве функций $\varphi:(0,\infty)\to\mathbb{C}$ со скалярным произведением

$$\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle=\int\limits_0^\infty\varphi_1(y)\varphi_2(y)\frac{dy}{y}.$$

5. Разложение функций по спектру дифференциального оператора Бесселя

Функция Бесселя первого рода

$$J_\varkappa(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1+\varkappa)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\varkappa} \tag{55}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z^2\frac{d^2W}{dz^2}+z\frac{dW}{dz}+z^2W=\varkappa^2W.$$

Для $k\in\mathbb{C}$ положим

$$\Phi(k;\varkappa;z)=\frac{2}{\sin(2\pi\varkappa)}\left(\cos(\pi k/2-\pi\varkappa)J_{-2\varkappa}(z)-\cos(\pi k/2+\pi\varkappa)J_{2\varkappa}(z)\right), \tag{56}$$

которая чётна и голоморфна по $\varkappa$ в полюсе $-1/2<\mathrm{Re}(\varkappa)<1/2$. Кроме того, она продолжается мероморфно (по $\varkappa$) на всю плоскость комплексного переменного и $\forall m\in\mathbb{Z}$

$$\Phi(k;(k-1)/2+m;z)=2(-1)^mJ_{k-1+2m}(z). \tag{57}$$

Функции (55) для $\mathrm{Re}(\varkappa)=0$ составляют непрерывный спектр оператора z^2d^2/dz^2+ $+zd/dz+z^2$ в $L_2^\times(0,\infty)$, а функции вида (57) для $0<1/2+\mathrm{Re}(k/2)+m<\infty$ — дискретный спектр. При этом

$$\langle\Phi\left(k;(k-1)/2+m_1;\ldots\right),\Phi\left(k;(k-1)/2+m_2;\ldots\right)\rangle=$$
$$=4\int\limits_0^\infty J_{k-1+2m_1}(y)J_{k-1+2m_2}(y)\frac{dy}{y}=\delta_{m_1,m_2}\left(\frac{k-1}{2}+m\right)^{-1}. \tag{58}$$

Теорема 9. *Пусть $k\in\mathbb{C}$, $\delta\in(0,\infty)$. Предположим, что $h(\varkappa)$ — чётная функция из $\mathcal{B}_\delta(3/2+2\delta)$ и $h(\varkappa)=0$ в точках с $\cos(\pi k/2-\pi\varkappa)=0$. Тогда*

$$h(\varkappa)=2\int\limits_0^\infty\Phi(k;\varkappa;y)\frac{\varphi(y)}{y}dy, \tag{59}$$

где

$$\varphi(y)=\frac{\pi}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\frac{J_{2\varkappa}(y)\varkappa}{\cos(\pi k/2-\pi\varkappa)}h(\varkappa)d\varkappa. \tag{60}$$

Доказательство. Сдвигая в (60) контур на прямую $\mathrm{Re}(\varkappa)=\delta'$ с $\delta'\in(0,\delta)$, для $y\in(0,1)$ из (55) получим

$$\varphi(y)\underset{\delta'}{\ll}y^{2\delta'}$$

Так как для $r\in\mathbb{R}$

$$J_{ir}(y)\ll(y+|r|)^{-1/2}\exp\left(-\frac{\pi}{2}|r|\right),$$

то на промежутке $1 \leqslant y < \infty$

$$\varphi(y) \ll \int\limits_{-\infty}^{\infty} (y+|r|)^{-1/2}(1+|r|)^{-1/2-2\delta} dr \ll y^{-2\delta}.$$

Выполнив в обеих частях (60) преобразование Меллина, для $0 < \mathrm{Re}(s) < \infty$ получим

$$\widehat{\varphi}(s) = \frac{\pi}{2} \cdot 2^s \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0} \frac{\Gamma(s/2+\varkappa)\varkappa h(\varkappa)}{\Gamma(1-s/2+\varkappa)\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa)} d\varkappa.$$

Отсюда по формулам обращения (34) из теоремы 5 находим

$$h(\varkappa) = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(s)=0} \Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\cos(\pi k/2 - \pi s/2) 2^s \hat{\varphi}(-\,s)\, ds.$$

Теперь осталось только заметить, что

$$\Phi(k;\varkappa;y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} \Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2-\varkappa)\cos(\pi k/2 - \pi s/2)(y/2)^{-s} ds$$

для $\alpha \in (0,\infty)$. При этом контур интегрирования обходит полюса $\Gamma(s/2+\varkappa)\Gamma(s/2 - \varkappa)$ справа. Теорема 9 полностью доказана. $\square$

Обращая доказательство теоремы 9 и опираясь на результаты теоремы 6, получим ещё одно утверждение.

Теорема 10. *Пусть* $-1 < \mathrm{Re}(k) \leqslant 1$, $\delta \in (0,\infty)$, $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{C}$ *непрерывная функция с оценкой* $\varphi(y) \ll \min\left(y^{-\delta}, y^{\delta}\right)$. *Предположим также, что* h *из* (59) *принадлежит* $\mathcal{B}_\delta(3/2+2\delta)$. *Тогда*

$$\begin{aligned} \varphi(y) = \frac{\pi}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0} \frac{J_{2\varkappa}(y)\varkappa}{\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa)} h(\varkappa) d\varkappa + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{k-1}{2}+m\right) h\left(\frac{k-1}{2}+m\right) J_{k-1+2m}(y). \end{aligned} \tag{61}$$

Замечание 5. Ряд в (61) абсолютно сходится, поскольку $J_{k-1+2m}(y)$ экспоненциально убывает по m.

Замечание 6. Интеграл в (61) и функции $J_{k-1+2m}(y)$ взаимно ортогональны по мере $\frac{dy}{y}$.

6. Интегральные разложения по гипергеометрическим функциям

Пусть $0<\mathrm{Re}(\lambda),\quad \mathrm{Re}(\mu)<\infty$. Положим

$$T^*(\lambda,\mu;\varkappa;y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\alpha}\Gamma(s+\varkappa)\Gamma(s-\varkappa)\frac{\Gamma(\mu-s)}{\Gamma(\lambda+s)}y^{-s}ds=$$
$$=\frac{\Gamma(\mu+\varkappa)\Gamma(\mu-\varkappa)}{\Gamma(\lambda+\mu)}y^{-\mu}{}_2F_1(\mu+\varkappa,\mu-\varkappa;\lambda+\mu;-1/y). \qquad (62)$$

Здесь $|\mathrm{Re}(\varkappa)|<\alpha<\mathrm{Re}(\mu)$. Подсчитывая вычеты подынтегрального выражения слева от прямой $\mathrm{Re}(s)=\alpha$, получим

$$T^*(\lambda,\mu;\varkappa;y)=\frac{\sin(\pi\lambda+\pi\varkappa)}{\sin(2\pi\varkappa)}T(\lambda,\mu;-\varkappa:y)-\frac{\sin(\pi\lambda-\pi\varkappa)}{\sin(2\pi\varkappa)}T(\lambda,\mu;\varkappa;y), \qquad (63)$$

где

$$T(\lambda,\mu;\varkappa;y)=\frac{\Gamma(1-\lambda+\varkappa)\Gamma(\mu+\varkappa)}{\Gamma(1+2\varkappa)}y^{\varkappa}{}_2F_1(1-\lambda+\varkappa,\mu+\varkappa;1+2\varkappa;-y). \qquad (64)$$

Из соотношений Куммера для гипергеометрической функции следует, что

$$T^*(\lambda,\mu;\varkappa;y)=\frac{\Gamma(\lambda+\varkappa)\Gamma(\lambda-\varkappa)}{\Gamma(\mu+\varkappa)\Gamma(\mu-\varkappa)}(1+y)^{\lambda-\mu}T^*(\mu,\lambda;\varkappa;y). \qquad (65)$$

Отметим, что T^* чётная по $\varkappa$.

Имеют место равномерные по y и $\varkappa$ оценки:

а) для $\mathrm{Re}(\varkappa)=0$

$$T^*(\lambda,\mu;\varkappa;y)\underset{\lambda,\mu}{\ll}$$
$$\underset{\lambda,\mu}{\ll}\begin{cases}(1+|\varkappa|)^{-1/2+\mathrm{Re}(\mu-\lambda)}\exp(-\pi|\operatorname{Im}(\varkappa)|), & \text{если } 0<y\leqslant 1\\ (1+|\varkappa|)^{-3/2+\mathrm{Re}(\mu-\lambda)}\exp(-\pi|\operatorname{lm}(\varkappa)|)y^{1/4+\mathrm{Re}(\lambda-\mu)/2}, & 1<\sqrt{y}\leqslant 1+|x|\\ (1+|\varkappa|)^{-1+2\,\mathrm{Re}(\mu)}\exp(-\pi|\operatorname{lm}(\varkappa)|)y^{-\mathrm{Re}(\mu)}, & 1+|\varkappa|\leqslant\sqrt{y}<\infty\,;\end{cases} \qquad (66)$$

б) для $0<y\leqslant 1$ и $0\leqslant\mathrm{Re}(\varkappa)\leqslant\sigma$

$$T(\lambda,\mu;\varkappa;y)\underset{\lambda,\mu,\sigma}{\ll}(1+|\varkappa|)^{-1/2+\mathrm{Re}(\mu-\lambda)}y^{\mathrm{Re}(\varkappa)}. \qquad (67)$$

Для $\lambda=1/2$ или $\mu=1/2$ оценка (67) непосредственно следует из квадратичного преобразования

$${}_2F_1\left(a,b;2a;-4z(1-z)^{-2}\right)=(1-z)^{2b}{}_2F_1\left(b,1/2+b-a;1/2+a;z^2\right).$$

Общий случай разбирается методами асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений.

Пусть $\delta,\sigma\in(0,\infty)$ и $h(\varkappa)$ — чётная голоморфная в полосе $-\sigma\leqslant\mathrm{Re}(\varkappa)\leqslant\sigma$ функция с оценкой

$$h(\varkappa)\ll(1+|\varkappa|)^{-3/2+\mathrm{Re}(\lambda-\mu)-\delta}. \tag{68}$$

Для $\varepsilon\in(0,1)$ положим $h_\varepsilon(\varkappa)=h(\varkappa)\exp\left(\varepsilon\varkappa^2\right)$. Определим функцию на $(0,\infty)$

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon(y)&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}T^*(\lambda,\mu;\varkappa;y)\varkappa\sin(\pi\varkappa)h_\varepsilon(\varkappa)d\varkappa=\\&=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}T(\lambda,\mu;\varkappa;y)\frac{\varkappa\sin(\pi\lambda-\pi\varkappa)}{\cos(\pi\varkappa)}h_\epsilon(\varkappa)d\varkappa.\end{aligned} \tag{69}$$

Выполнив в полосе $0<\mathrm{Re}(s)<\mathrm{Re}(\mu)$ преобразование Меллина, получим

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\Gamma(s+\varkappa)\Gamma(s-\varkappa)\frac{\Gamma(\mu-s)}{\Gamma(\lambda+s)}\varkappa\sin(\pi\varkappa)h_\varepsilon(\varkappa)dx.$$

Отсюда по формулам обращения (25) из теоремы 3 находим

$$\begin{aligned}h_\varepsilon(y)&=-\frac{2}{\pi}\cos(\pi\varkappa)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\alpha}\Gamma(s+\varkappa)\Gamma(s-\varkappa)\frac{\Gamma(\lambda-s)}{\Gamma(\mu+s)}\hat{\varphi}_\varepsilon(-s)\,ds=\\&=-\frac{2}{\pi}\cos(\pi\varkappa)\cdot\int\limits_0^\infty T^*(\mu,\lambda;\varkappa;y)\frac{\varphi_\varepsilon(y)}{y}\,dy=\\&=-2\cos(\pi\varkappa)\frac{\Gamma(\mu+\varkappa)\Gamma(\mu-\varkappa)}{\Gamma(\lambda+\varkappa)\Gamma(\lambda-\varkappa)}\cdot\int\limits_0^\infty(1+y)^{\mu-\lambda}T^*(\lambda,\mu;\varkappa;y)\frac{\varphi_\varepsilon(y)}{y}dy.\end{aligned} \tag{70}$$

С помощью (67), двигая контур во втором интервале из (69) вправо, для $0<y\leqslant1$ получим равномерную по ε оценку

$$\varphi_\varepsilon\ll y^{\delta'}$$

с некоторым положительным δ'. В случае $y\in(1,\infty)$, опираясь на (66), также приходим к равномерной по ε оценке

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon(y)&\ll y^{-\mathrm{Re}(\mu)}\int\limits_0^{\sqrt{y}}(1+|\varkappa|)^{-3/2+\mathrm{Re}(\mu)+\mathrm{Re}(\lambda)-\delta}\,d|\varkappa|+\\&+y^{1/4+\mathrm{Re}(\lambda-\mu)/2}\int\limits_{\sqrt{y}}^\infty(1+|\varkappa|)^{-2-\delta}\,d|\varkappa|\ll y^{-1/4+\mathrm{Re}(\lambda/2)-\mathrm{Re}(\mu/2)-\delta/2}.\end{aligned}$$

Поскольку

$$T^*(\mu,\lambda;\varkappa;y)\underset{\mu,\lambda,\varkappa}{\ll}y^{-\mathrm{Re}(\lambda)},$$

то в (70) можно выполнить предельный переход при $\varepsilon\to0$. В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 11. *Пусть* $\mathrm{Re}(\lambda)$, $\mathrm{Re}(\mu)$, δ, $\sigma \in (0, \infty)$ *и* $h(\varkappa)$ — *четная голоморфная в полосе* $-\sigma \leqslant \mathrm{Re}(\varkappa) \leqslant \sigma$ *функция с оценкой* (68). *Тогда*

$$h(\varkappa) = -\frac{2}{\pi}\cos(\pi\varkappa)\cdot\int\limits_0^\infty T^*(\mu,\lambda;\varkappa;y)\frac{\varphi(y)}{y}\,dy =$$

$$= -2\cos(\pi\varkappa)\frac{\Gamma(\mu+\varkappa)\Gamma(\mu-\varkappa)}{\Gamma(\lambda+\varkappa)\Gamma(\lambda-\varkappa)}\cdot\int\limits_0^\infty(1+y)^{\mu-\lambda}T^*(\lambda,\mu;\varkappa;y)\frac{\varphi_\varepsilon(y)}{y}\,dy, \qquad (71)$$

где

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0} T^*(\lambda,\mu;\varkappa;y)\varkappa\sin(\pi\varkappa)h(\varkappa)\,d\varkappa =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0} T(\lambda,\mu;\varkappa;y)\frac{\varkappa\sin(\pi\lambda-\pi\varkappa)}{\cos(\pi\varkappa)}h(\varkappa)\,d\varkappa. \qquad (72)$$

Опираясь на лемму 7 и только что доказанную терему, получим обратный результат.

Теорема 12. *Пусть* $\varphi:(0,\infty)\to\mathbb{C}$ — *непрерывная функция, для которой* $\varphi(y)\ll y^\delta$ *с* $0<\delta<\mathrm{Re}(\lambda)$ *и для* $h(\varkappa)$ *из* (71) *выполнены условия теоремы 11. Тогда* $\varphi(y)$ *представляется в виде* (72).

Замечание 7. В частном случае $\lambda=\mu=1/2$ утверждение теоремы 12 (после очевидных замен) превращается в формулу обращения Мелера–Фока

$$\mathrm{g}(y) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0} P_{-1/2+\varkappa}(y)\varkappa\,\mathrm{tg}(\pi\varkappa)h(\varkappa)\,d\varkappa = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0} Q_{-1/2+\varkappa}(y)\varkappa h(\varkappa)\,d\varkappa, \quad (73)$$

где

$$h(\varkappa) = \int\limits_1^\infty P_{-1/2+\varkappa}(y)\mathrm{g}(y)\,dy, \qquad (74)$$

а $P_{-1/2+\varkappa}(y)$ и $Q_{-1/2+\varkappa}(y)$ — функции Лежандра первого и второго рода.

7. Смешанное разложение по гипергеометрическим функциям

В этом параграфе мы ограничимся формальными рассуждениями. Действуя по аналогии с п. 6, положим для $-1<\mathrm{Re}(k)\leqslant 1$ и $0<\mathrm{Re}(\lambda),\mathrm{Re}(\mu)<\infty$

$$S_k^*(\lambda,\mu;\varkappa;y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Gamma(s+\varkappa)\Gamma(s-\varkappa)\cos\left(\frac{\pi k}{2}-\pi s\right)\frac{\Gamma(\mu-s)}{\Gamma(\lambda+s)}y^{-s}ds, \qquad (75)$$

$$S(\lambda,\mu;\varkappa;y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\Gamma(\varkappa+s)}{\Gamma(1+\varkappa-s)}\frac{\Gamma(\lambda-s)}{\Gamma(\mu+s)}y^{-s}ds. \qquad (76)$$

Для $y \in (1,\infty)$

$$S_k^*(\lambda,\mu;\varkappa;y) = \cos\left(\frac{\pi k}{2} - \pi\mu\right) \frac{\Gamma(\mu+\varkappa)\Gamma(\mu-\varkappa)}{\Gamma(\lambda+\mu)} y^{-\mu}{}_2F_1\left(\mu+\varkappa,\mu-\varkappa;\lambda+\mu;\frac{1}{y}\right), \quad (77)$$

$$S(\lambda,\mu;\varkappa;y) = \frac{\Gamma(\lambda+\varkappa)}{\Gamma(\lambda+\mu)\Gamma(1-\lambda+\varkappa)} y^{-\lambda}{}_2F_1\left(\lambda+\varkappa,\lambda-\varkappa;\lambda+\mu;\frac{1}{y}\right), \quad (78)$$

$$S_k^*(\lambda,\mu;\varkappa;y) = \pi\frac{\cos(\pi k/2 - \pi\mu)}{\sin(\pi\mu - \pi\varkappa)} S(\mu,\lambda;\varkappa;y). \quad (79)$$

Для $y \in (0,1)$

$$S(\lambda,\mu;\varkappa;y) = \frac{\Gamma(\lambda+\varkappa)}{\Gamma(\mu-2\varkappa)\Gamma(1+2\varkappa)} y^{-\varkappa}{}_2F_1(\lambda+\varkappa,1-\mu+\varkappa;1+2\varkappa;y), \quad (80)$$

$$S_k^*(\lambda,\mu;\varkappa;y) = \pi\frac{\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa)}{\sin(2\pi\varkappa)} S(\mu,\lambda;-\varkappa;y) - \pi\frac{\cos(\pi k/2 + \pi\varkappa)}{\sin(2\pi\varkappa)} S(\mu,\lambda;\varkappa;y). \quad (81)$$

Определим интегральное преобразование функции $\varphi\colon(0,\infty)\to\mathbb{C}$ по формуле

$$h(x) = \int_0^\infty S_k^*(\lambda,\mu;\varkappa;y)\frac{\varphi(y)}{y}dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma(s+\varkappa)\Gamma(s-\varkappa)\cos\left(\frac{\pi k}{2} - \pi s\right)\frac{\Gamma(\mu-s)}{\Gamma(\lambda+s)}\widehat{\varphi}(-s)ds. \quad (82)$$

По формуле обращения (34) из теоремы 5 получим

$$\widehat{\varphi}(s) = 2\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0} \frac{\Gamma(\varkappa+s)}{\Gamma(1+\varkappa-s)}\frac{\Gamma(\lambda-s)}{\Gamma(\mu+s)}\frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa)}d\varkappa +$$

$$+\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{k-1}{2}+m\right)h\left(\frac{k-1}{2}+m\right)\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+m+s\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+m-s\right)}\frac{\Gamma(\lambda-s)}{\Gamma(\mu+s)}. \quad (83)$$

Применяя обратное преобразование Меллина, получим

$$\varphi(y) = 2\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0} S(\lambda,\mu;\varkappa;y)\frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa)}d\varkappa +$$

$$+\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{k-1}{2}+m\right)h\left(\frac{k-1}{2}+m\right)S\left(\lambda,\mu;\frac{k-1}{2}+m;y\right). \quad (84)$$

Обратно, если $\varphi(y)$ по $h(\varkappa)$ определяется интегральным преобразованием

$$\varphi(y) = 2\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0} S(\lambda,\mu;\varkappa;y)\frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos(\pi k/2 - \pi\varkappa)}d\varkappa, \quad (85)$$

то для $h(\varkappa)$ имеет место интегральное представление (82).

Если $k\equiv 1+2\mu(\mathrm{mod}\ 2)$ и $\varphi(y)=0\ \forall y\in(0,1)$, то $h(\varkappa)\equiv 0$ на прямой $\mathrm{Re}(\varkappa)=0$. Поэтому равенство (84) приобретает вид

$$\varphi(y)=\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{k-1}{2}+m\right)h\left(\frac{k-1}{2}+m\right)S\left(\lambda,\mu;\frac{k-1}{2}+m;y\right),\quad (86)$$

где в соответствии с (82)

$$h\left(\frac{k-1}{2}+m\right)=\frac{\pi(-1)^m}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\alpha}\frac{\Gamma\left(s+\frac{k-1}{2}+m\right)\Gamma\left(s+\frac{1-k}{2}-m\right)}{\Gamma\left(\frac{1+k}{2}+m-s\right)\Gamma\left(\frac{1-k}{2}-m+s\right)}\frac{\Gamma(\mu-s)}{\Gamma(\lambda+s)}\widehat{\varphi}(-s)\,ds=$$

$$=\pi(-1)^m\int\limits_1^{\infty}S\left(\mu,\lambda;\frac{k-1}{2}+m;y\right)\frac{\varphi(y)}{y}dy.\quad (87)$$

Разложение (86) представляет собой хорошо известное разложение по ортогональным полиномам Якоби, если выполнить соответствующую замену переменной.

8. Разложение по индексам произведений функций Бесселя

Опираясь на таблицу выражений G-функций Майера (в частных случаях) через специальные функции, можно построить целую серию формул обращения. Для иллюстрации остановимся на двух примерах, ограничившись формальными выкладками.

Воспользуемся интегральными представлениями $(-1/2<\mathrm{Re}(\lambda)<1/2)$

$$K_{\lambda+\varkappa}(y)K_{-\lambda+\varkappa}(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Gamma\Big(\frac{s}{2}+\varkappa\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2}-\varkappa\Big)\frac{\Gamma(s/2-\lambda)\Gamma(s/2+\lambda)}{\Gamma(s/2)\Gamma(1/2+s/2)}y^{-s}ds,\quad (88)$$

$$J_{\lambda+\varkappa}(y)J_{-\lambda+\varkappa}(y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\Gamma(s/2+\varkappa)}{\Gamma(1+\varkappa-s/2)}\frac{\Gamma(1/2-s/2)\Gamma(1-s/2)}{\Gamma(1+\lambda-s/2)\Gamma(1-\lambda-s/2)}y^{-s}ds.\quad (89)$$

Напомним, что

$$H_\nu^{(1)}(y)=-\frac{2i}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi i\nu}{2}\right)K_\nu(-iy),\quad H_\nu^{(2)}(y)=\frac{2i}{\pi}\exp\left(\frac{\pi i\nu}{2}\right)K_\nu(iy),$$

$$J_\nu(iy)=\exp\left(\frac{\pi i\nu}{2}\right)I_\nu(y),\quad J_\nu(-iy)=\exp\left(-\frac{\pi i\nu}{2}\right)I_\nu(y).$$

Из (88) находим

$$H^{(1)}_{\lambda+\varkappa}(y)H^{(1)}_{-\lambda+\varkappa}(y) = -\frac{4}{\pi^2}\exp(-\pi i\varkappa)K_{\lambda+\varkappa}(-iy)K_{-\lambda+\varkappa}(-iy) =$$

$$= \frac{\exp(-\pi i\varkappa)}{\pi\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)}\exp\left(\frac{\pi i s}{2}\right)y^{-s}ds,$$

$$H^{(2)}_{\lambda+\varkappa}(y)H^{(2)}_{-\lambda+\varkappa}(y) = -\frac{4}{\pi^2}\exp(\pi i\varkappa)K_{\lambda+\varkappa}(iy)K_{-\lambda+\varkappa}(iy) =$$

$$= \frac{\exp(\pi i\varkappa)}{\pi\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)}\exp\left(-\frac{\pi i s}{2}\right)y^{-s}ds.$$

Поэтому

$$H^{(1)}_{\lambda+\varkappa}(y)H^{(1)}_{-\lambda+\varkappa}(y) - H^{(2)}_{\lambda+\varkappa}(y)H^{(2)}_{-\lambda+\varkappa}(y) =$$

$$= \frac{-2i}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)}{\Gamma\left(1+\varkappa-\frac{s}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)}y^{-s}ds. \tag{90}$$

Эту формулу также можно переписать в виде

$$J_{\lambda+\varkappa}(y)Y_{-\lambda+\varkappa}(y) + J_{-\lambda+\varkappa}(y)Y_{\lambda+\varkappa}(y) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)}{\Gamma\left(1+\varkappa-\frac{s}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)}y^{-s}ds. \tag{91}$$

Далее из (89) находим

$$J_{\lambda+\varkappa}(y)J_{-\lambda+\varkappa}(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\lambda-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\lambda-\frac{s}{2}\right)}\sin\left(\frac{\pi s}{2}-\pi\varkappa\right)y^{-s}ds =$$

$$= \left\{\frac{\exp(-\pi i\varkappa)}{4\pi i\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\lambda-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\lambda-\frac{s}{2}\right)}\exp\left(\frac{\pi i s}{2}\right)y^{-s}ds -\right.$$

$$\left.-\frac{\exp(\pi i\varkappa)}{4\pi i\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\lambda-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\lambda-\frac{s}{2}\right)}\exp\left(-\frac{\pi i s}{2}\right)y^{-s}ds\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi i\sqrt{\pi}}\{\exp(-\pi i\varkappa)Q(-iy) - \exp(\pi i\varkappa)Q(iy)\},$$

где

$$Q(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\lambda-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\lambda-\frac{s}{2}\right)}z^{-s}ds=$$
$$=\frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\sin(2\pi\varkappa)}\left\{I_{\lambda-\varkappa}(z)I_{-\lambda-\varkappa}(z)-I_{\lambda+\varkappa}(z)I_{-\lambda+\varkappa}(z)\right\}. \quad (92)$$

Пусть

$$h(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sin(\pi\varkappa)}\cdot\int\limits_0^\infty\left(I_{\lambda+\varkappa}(y)I_{-\lambda+\varkappa}(y)-I_{\lambda-\varkappa}(y)I_{-\lambda-\varkappa}(y)\right)\frac{\varphi(y)}{y}dy=$$
$$=-\frac{\cos(\pi\varkappa)}{\pi}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\lambda-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\lambda-\frac{s}{2}\right)}\widehat{\varphi}(-s)ds. \quad (93)$$

По формулам обращения (26) из теоремы 4 находим

$$\widehat{\varphi}(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)\frac{\Gamma\left(1+\lambda+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\lambda+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)}\varkappa\sin(\pi\varkappa)h(\varkappa)d\varkappa.$$

Следовательно, в соответствии с (92)

$$2\sqrt{\pi}\varphi(y)=\frac{1}{2\pi i}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\left(\int\limits_y^\infty u^{2\lambda}\frac{d}{du}\left(u^{1-4\lambda}\frac{d}{du}\left(u^{2\lambda}K_{\lambda+\varkappa}(u)K_{-\lambda+\varkappa}(u)\right)du\right)\right)\varkappa\sin(\pi\varkappa)h(\varkappa)d\varkappa. \quad (94)$$

При $\lambda=0$ формулы обращения (93) и (94) приобретают более простой вид

$$h(\varkappa)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sin(\pi\varkappa)}\cdot\int\limits_0^\infty\left(I_\varkappa^2(y)-I_{-x}^2(y)\right)\frac{\varphi(y)}{y}dy, \quad (95)$$
$$2\sqrt{\pi}\varphi(y)=-\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}y\frac{d}{dy}\left(K_\varkappa^2(y)\right)\varkappa\sin(\pi\varkappa)h(\varkappa)d\varkappa. \quad (96)$$

Если положить

$$h(\varkappa)=\cos(\pi\varkappa)\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_y^\infty u^{2\lambda}\frac{d}{du}\left(u^{1-4\lambda}\frac{d}{du}\left(u^{2\lambda}K_{\lambda+\varkappa}(u)K_{-\lambda+\varkappa}(u)\right)du\right)\right)\frac{\varphi(y)}{y}dy, \quad (97)$$

то

$$h(\varkappa)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos(\pi\varkappa)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\Gamma\Big(\frac{s}{2}+\varkappa\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2}-\varkappa\Big)\frac{\Gamma\big(1+\lambda+\frac{s}{2}\big)\Gamma\big(1-\lambda+\frac{s}{2}\big)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)}\widehat{\varphi}(-s)\,ds.$$

По формуле обращения (26) (теорема 4) находим

$$-\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(1+\lambda-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\lambda-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}\widehat{\varphi}(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)\varkappa\sin(\pi\varkappa)h(\varkappa)d\varkappa.$$

Следовательно, в соответствии с (92)

$$\varphi(y)=-2\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\left(I_{\lambda-\varkappa}(y)I_{-\lambda-\varkappa}(y)-I_{\lambda+\varkappa}(y)I_{-\lambda+\varkappa}(y)\right)\frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos(\pi\varkappa)}d\varkappa. \tag{98}$$

В частном случае $\lambda=0$ (97) и (98) превращаются в пару

$$h(\varkappa)=-\cos(\pi\varkappa)\int\limits_0^\infty\varphi(y)dK_\varkappa^2(y) \tag{99}$$

$$\varphi(y)=\frac{4}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}I_\varkappa^2(y)\frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos(\pi\varkappa)}d\varkappa. \tag{100}$$

Пусть $-1<\mathrm{Re}(k)\leqslant 1$. Положим

$$\Pi_k(\lambda;\varkappa;y)=-\frac{\cos(\pi k/2-\pi\varkappa)}{2i\sin(2\pi\varkappa)}\left(H^{(1)}_{\lambda-\varkappa}(y)H^{(1)}_{-\lambda-\varkappa}(y)-H^{(2)}_{\lambda-\varkappa}(y)H^{(2)}_{-\lambda-\varkappa}(y)\right)+$$
$$+\frac{\cos(\pi k/2+\pi\varkappa)}{2i\sin(2\pi\varkappa)}\left(H^{(1)}_{\lambda+\varkappa}(y)H^{(1)}_{-\lambda+\varkappa}(y)-H^{(2)}_{\lambda+\varkappa}(y)H^{(2)}_{-\lambda+\varkappa}(y)\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)}\cos\left(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi s}{2}\right)y^{-s}ds.$$

Тогда для

$$h(\varkappa)=\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_y^\infty u^{2\lambda}\frac{d}{du}\left(u^{1-4\lambda}\frac{d}{du}\left(u^{2\lambda}\Pi_k(\lambda;\varkappa;u)\right)\right)du\right)\frac{\varphi(y)}{y}dy \tag{101}$$

находим

$$h(\varkappa)=\frac{2}{\pi\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\times$$
$$\times\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)\frac{\Gamma\left(1-\lambda+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1+\lambda+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)}\cos\left(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi s}{2}\right)\widehat{\varphi}(-s)ds.$$

Отсюда по формуле обращения (35) из теоремы 6 получаем

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(1-\lambda-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1+\lambda-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)}\varphi(s)=\pi\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)}{\Gamma\left(1+\varkappa-\frac{s}{2}\right)}\frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos\left(\frac{\pi k}{2}-\pi\varkappa\right)}d\varkappa+$$
$$+\sum_{m=1}^\infty(-1)^m\left(\frac{k-1}{2}+m\right)h\left(\frac{k-1}{2}+m\right)\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+m+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+m-\frac{s}{2}\right)}.$$

Поэтому, ввиду (89)

$$\varphi(y)=\pi^2\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0} J_{\lambda+\varkappa}(y)J_{-\lambda+\varkappa}(y)\frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos\left(\frac{\pi k}{2}-\pi\varkappa\right)}\,d\varkappa+$$

$$+\pi\cdot\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{k-1}{2}+m\right)h\left(\frac{k-1}{2}+m\right)J_{\lambda+\frac{k-1}{2}+m}(y)J_{-\lambda+\frac{k-1}{2}+m}(y).$$

Разумеется, что если по формуле (101) восстанавливаем h (заданное), то ряд отсутствует. Он известен в литературе как ряд Неймана второго рода. Таким образом, мы получили интегральное представление для разности функции и её ряда Неймана второго рода.

9. Оператор проектирования на дискретную компоненту в смешанных разложениях

С формальной точки зрения смешанные разложения из пп. 5, 7, 8 — частные случаи следующей конструкции. Пусть в некоторой полосе $-\delta<\mathrm{Re}(s)<\delta$ функция $\theta(s)$ голоморфна и отлична от нуля. Выберем в теореме 6 из п. 3 $\psi(s)=\theta(s)\widehat{\varphi}(s)$, где $\widehat{\varphi}(s)$ преобразование Меллина некоторой функции. Тогда

$$\widehat{\varphi}(s)=\frac{\pi}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\frac{\Gamma\left(\varkappa+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\varkappa-\frac{s}{2}\right)}\frac{1}{\theta(s)}\frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos\left(\frac{\pi k}{2}-\pi\varkappa\right)}\,d\varkappa+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{k-1}{2}+m\right)h\left(\frac{k-1}{2}+m\right)\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+m+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+m-\frac{s}{2}\right)}\frac{1}{\theta(s)}\tag{102}$$

с

$$h(\varkappa)=\int_0^{\infty}\left\{\frac{\cos\left(\frac{\pi k}{2}-\pi\varkappa\right)}{\sin(2\pi\varkappa)}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\varkappa\right)}{\Gamma\left(1-\varkappa-\frac{s}{2}\right)}-\frac{\cos\left(\frac{\pi k}{2}+\pi\varkappa\right)}{\sin(2\pi\varkappa)}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\varkappa\right)}{\Gamma\left(1+\varkappa-\frac{s}{2}\right)}\right\}\theta(-s)\widehat{\varphi}(s)ds\tag{103}$$

и

$$h\left(\frac{k-1}{2}+m\right)=(-1)^m\int_0^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+m+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+m-\frac{s}{2}\right)}\theta(-s)\widehat{\varphi}(-s)ds.\tag{104}$$

Положим

$$\Psi_\theta(\varkappa;y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\alpha}\frac{\Gamma\left(\varkappa+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\varkappa-\frac{s}{2}\right)}\frac{1}{\theta(s)}y^{-s}ds,$$

$$\Psi_\theta^*(\varkappa;y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\alpha}\frac{\Gamma\left(\varkappa+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\varkappa-\frac{s}{2}\right)}\theta(-s)y^{-s}ds.$$

Отметим, что если $\theta(s)\theta(-s)\equiv 1$, то $\Psi_\theta=\Psi^*_\theta$. В частности, это верно для $\theta(s)\xi(s)/\xi(-s)$. Возвращаясь к (102), получим разложение $-1<\mathrm{Re}(k)\leqslant 1$

$$\varphi(y)=\pi\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(\varkappa)=0}\Psi_\theta(\varkappa;y)\frac{\varkappa h(\varkappa)}{\cos\left(\frac{\pi k}{2}-\pi\varkappa\right)}d\varkappa+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{k-1}{2}+m\right)h\left(\frac{k-1}{2}+m\right)\Psi_\theta\left(\frac{k-1}{2}+m;y\right), \tag{105}$$

где

$$h(\varkappa)=\int\limits_0^\infty\left\{\frac{\cos\left(\frac{\pi k}{2}-\pi\varkappa\right)}{\sin(2\pi\varkappa)}\Psi^*_\theta(-\varkappa;y)-\frac{\cos\left(\frac{\pi k}{2}+\pi\varkappa\right)}{\sin(2\pi\varkappa)}\Psi^*_\theta(\varkappa;y)\right\}\frac{\varphi(y)}{y}dy \tag{106}$$

и

$$h\left(\frac{k-1}{2}+m\right)=(-1)^m\int\limits_0^\infty\Psi^*_\theta\left(\frac{k-1}{2}+m;y\right)\frac{\varphi(y)}{y}dy. \tag{107}$$

Наборы функций $(m=1,2,3,...)$

$$\left\{\Psi_\theta\left(\frac{k-1}{2}+m;y\right)\right\},\quad\left\{\Psi^*_\theta\left(\frac{k-1}{2}+m;y\right)\right\}$$

можно рассматривать как два двойственных базиса, поскольку

$$\int\limits_0^\infty\Psi_\theta\left(\frac{k-1}{2}+m;y\right)\Psi^*_\theta\left(\frac{k-1}{2}+n;y\right)\frac{dy}{y}=\delta_{m,n}\left(\frac{k-1}{2}+m\right)^{-1}.$$

В случае $\theta(s)\theta(-s)\equiv 1$ оба базиса совпадают, и мы приходим к ортогональной системе функций на $(0,\infty)$ по мультипликативной мере $y^{-1}dy$. В соответствии со (105) имеет место разложение

$$\varphi(y)=\varphi^{(+)}(y)+\varphi^{(-)}(y), \tag{108}$$

где $\varphi^{(+)}(y)$ интеграл, а сумма $\varphi^{(-)}(y)$ ряда. Напомним, что (см. п. 1)

$$\psi^{(-)}(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w)=\alpha}\frac{\psi(w)}{w-s}dw,\quad(\mathrm{Re}(s)<\alpha).$$

Поэтому

$$\widehat{\varphi}^{(-)}(s)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}-\frac{s}{2}\right)}\frac{1}{\theta(s)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w)=\alpha}\widehat{\varphi}(w)\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}-\frac{w}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+\frac{w}{2}\right)}\frac{\theta(w)}{-s+w}dw.$$

Положим

$$\tilde{\Psi}^*_\theta(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w)=\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+\frac{w}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}-\frac{w}{2}\right)}\theta(-w)y^{-w}dw, \tag{109}$$

$$\tilde{\Psi}_\theta(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w)=\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+\frac{w}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}-\frac{w}{2}\right)}\frac{1}{\theta(w)}y^{-w}dw. \tag{110}$$

Так как для $\mathrm{Re}(s)<\alpha$

$$\int\limits_0^1 y^{-s+w-1}dy = \frac{1}{-s+w},$$

то

$$\widehat{\varphi}^{(-)}(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}-\frac{s}{2}\right)}\frac{1}{\theta(s)}\int\limits_0^\infty \varphi(v)\left(\int\limits_0^1 u^{-s}\widetilde{\Psi}_\theta(uv)\frac{du}{u}\right)\frac{dv}{v}.$$

Поэтому (оператор проектирования)

$$\varphi^{(-)}(y) = \int\limits_0^\infty \varphi(v)\left(\int\limits_0^1 \widetilde{\Psi}_\theta(uy)\widetilde{\Psi}^*_\theta(uv)\frac{du}{u}\right)\frac{dv}{v}. \tag{111}$$

Отметим, что

$$y^{-k}\frac{d}{dy}\left(y^{k+1}\Psi^*_\theta\left(\frac{k+1}{2};y\right)\right) = \widetilde{\Psi}_\theta(y),$$
$$y^{-k}\frac{d}{dy}\left(y^{k+1}\Psi_\theta\left(\frac{k+1}{2};y\right)\right) = \widetilde{\Psi}^*_\theta(y).$$

Рассмотрим два примера.

I. Разложение (61) в теореме 10 соответствует случаю $\theta(s)=2^{-s-1}$. Тогда

$$\widetilde{\Psi}_\theta(y) = 4\widetilde{\Psi}^*_\theta(y) = 2\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(w)=\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+\frac{w}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}-\frac{w}{2}\right)}\left(\frac{y}{2}\right)^w dy = 2yJ_k(y)$$

и

$$\varphi^{(-)}(y) = y\cdot\int\limits_0^\infty \varphi(v)\left(\int\limits_0^1 uJ_k(uy)J_k(uv)du\right)dv. \tag{112}$$

II. В разложении (84)

$$\theta(s) = \frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\mu+s)}{\Gamma(\lambda-s)}$$

и

$$\varphi^{(-)}(y) = y\cdot\int\limits_0^\infty \varphi(v)\left(\int\limits_0^1 uS(\lambda+1,\mu-1;k/2;uy)S(\mu+1,\lambda+1;k/2;uv)du\right)dv. \tag{113}$$

Список литературы

[1] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, The Clarendon Press, Oxford, 1937; Русский перевод: *Введение в теорию интегралов Фурье*, ОГИЗ, М.-Л., 1948.

[2] J. Wimp, "A class of integral transforms", *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **14**:1, (1964), 33–40.

[3] Н. Н. Лебедев, “О разложении произвольной функции в интеграл по квадратам функций Макдональда с мнимым значком”, *Сиб. матем. журн.*, **3**:2, (1962), 213–222.

[4] М. Н. Олевский, “О представлении произвольной функции в виде интеграла с ядром, являющимся гипергеометрической функцией”, *ДАН СССР*, **69**:1, (1949), 11–14.

[5] R. W. Bruggeman, *Fourier Coefficients of Automorphic Forms*, v. 865, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1981.

[6] Н. В. Кузнецов, “Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Суммы сумм Клоостермана”, *Матем. сб.*, **111(53)**:3, (1980), 334–383.

[7] Н. Я. Виленкин, А. У. Климык, “Представления групп Ли и специальные функции”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления*, т. 59, ВИНИТИ, М., 1990, 145–264.

[8] Y. Motohashi, “A trace formula for the Picard group, I”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **72**:8, (1996), 183–186.

[9] A. Erdélyi, et al., *Higher Transcendental Functions*, v. I and II, McGraw Hill, New York, 1953; Русский перевод: *Высшие трансцендентные функции, т. I (1973), т. II (1974).*.

Поступила в редакцию
1 октября 2019 г.

Bykovskii V.A. Decomposition in terms of special functions. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2019. V. 19. No 2. P. 138–172.

ABSTRACT

In the automorphic functions theory there arise integral transformations with the special functions in the kernels. In this work it is developed the universal method for constructing of the inverse formulas. The numerous examples are considered.

Key words: *special functions, inversion formulas, expansions in terms of special functions.*