

УДК 519.853.2

MSC2010 5K05, 90C25, 49N15

© А. В. Жильцов<sup>1</sup>, Р. В. Намм<sup>2</sup>

## Устойчивый алгоритм решения полукоэрцитивной задачи контакта двух тел с трением на границе

Рассматривается задача об одностороннем контакте двух упругих тел. Это статическая задача в перемещениях. Тела находятся под воздействием объемных и поверхностных сил, в области контакта присутствуют силы трения. Дано обоснование использования модифицированных функционалов Лагранжа. Для обеспечения сходимости применяется итеративная проксимальная регуляризация. Для решения конечномерного аналога задачи применяется метод поточечной релаксации. Приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: *контакт упругих тел, функционалы Лагранжа, метод конечных элементов, методы двойственности, метод последовательных приближений, контактное трение, итеративная проксимальная регуляризация.*

### Введение

Важным приложением теории вариационных неравенств является задача об одностороннем контакте упругих тел. В данной работе рассматривается модель, для которой в области контакта тел задано условие взаимного непроникновения, причем учитывается действие силы трения между телами [1–3]. Использование функционалов Лагранжа позволяет снять ограничение на взаимное непроникание. Однако в полукоэрцитивных задачах использование классического функционала Лагранжа не гарантирует сходимость известных методов поиска седловых точек. Мы исследуем модифицированный функционал Лагранжа, позволяющий построить алгоритм, сходящийся к седловой точке как по прямой, так и по двойственной переменной.

В случае полукоэрцитивной постановки задачи конечно-элементная реализация алгоритма приводит к вырожденной матрице квадратичной формы соответствующей минимизируемой функции. Чтобы обеспечить сходимость метода Удзавы, мы строим устойчивый алгоритм, основанный на итеративной проксимальной регуляризации модифицированного функционала Лагранжа.

<sup>1</sup> Дальневосточный государственный университет путей сообщения, 680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.

<sup>2</sup> Вычислительный центр ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65.

Электронная почта: [egrevid@gmail.com](mailto:egrevid@gmail.com) (А. В. Жильцов), [rnamm@yandex.ru](mailto:rnamm@yandex.ru) (Р. В. Намм).

## 1. Описание модели

Два плоских тела занимают области  $\Omega', \Omega''$ . В дальнейшем один и два штриха используются для обозначения величин, относящихся к определённому телу. Пусть  $\Omega^\alpha \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega' \cap \Omega'' = \emptyset$ ,  $\alpha = ', ''$ . Границы тел  $\partial\Omega', \partial\Omega''$  являются липшицевыми. Их общую часть, представляющую собой область контакта, обозначим  $\Gamma_K$ . Оставшаяся часть границ  $\partial\Omega^\alpha \setminus \Gamma_K$  разделена на  $\Gamma_\tau^\alpha$  и  $\Gamma_u^\alpha$ , где, соответственно, заданы нагрузки и перемещения.

Обозначим через  $u^\alpha = (u_1^\alpha, u_2^\alpha)$  вектор перемещений. Полагая перемещения малыми, определим компоненты тензора деформации  $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$  и тензора напряжений  $\sigma_{ij}(u) = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u)$ , где  $i, j, k, l = 1, 2$ . Для компонент тензора упругости  $c_{ijkl}$  выполняется свойство симметрии  $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij}$ , и существует константа  $c_0 > 0$  такая, что всюду в  $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$  справедлива оценка  $c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \geq c_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$  для любых  $\varepsilon_{ij}$ .

Формулы (1)–(7) представляют краевую постановку задачи [3].

$$\sigma_{ij,j}(u) + F_i = 0 \text{ в } \Omega = \Omega' \cup \Omega'', \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}(u)n_j = P_i \text{ на } \Gamma_\tau = \Gamma_\tau' \cup \Gamma_\tau'', \quad (2)$$

$$u' = 0 \text{ на } \Gamma_u' \subset \partial\Omega', \quad (3)$$

$$u'' = u''_i n''_i = 0 \text{ на } \Gamma_u'' \subset \partial\Omega'', \quad (4)$$

здесь  $n = (n_1, n_2)$  — вектор внешней нормали для соответствующего тела.

В зоне контакта  $\Gamma_K$  выполняется условие взаимного непроникновения

$$u'_n + u''_n \leq 0, \quad \sigma'_n(u) = \sigma''_n(u) = \sigma_n \leq 0, \quad (5)$$

$$(u'_n + u''_n)\sigma_n = 0. \quad (6)$$

Конечное ненулевое трение на  $\Gamma_K$  выражается законом Кулона

$$\sigma'_\tau(u) = \sigma''_\tau(u) = \sigma_\tau, \quad |\sigma_\tau| \leq \mathcal{F}|\sigma_n|, \quad (|\sigma_\tau| - \mathcal{F}|\sigma_n|)|u'_\tau + u''_\tau| = 0, \quad (7)$$

$$u'_\tau + u''_\tau = \lambda\sigma_\tau \text{ на } \{x \in \Gamma_K: \mathcal{F}\sigma_n < 0\},$$

где  $\mathcal{F}$  — коэффициент трения,  $\mathcal{F} \geq 0$  на  $\Gamma_K$ ,  $\lambda$  — неположительная функция на  $\Gamma_K$ . Здесь и далее используется правило суммирования по повторяющимся индексам. Нормальная составляющая тензора напряжений  $\sigma_n^\alpha(u) = \sigma_{ij}(u)n_i^\alpha n_j^\alpha$ , тангенциальная составляющая  $\sigma_\tau^\alpha(u) = \{\sigma_{i\tau}^\alpha(u)\}$ , где  $\sigma_{i\tau}^\alpha(u) = \sigma_{ij}^\alpha(u)n_j^\alpha - \sigma_n^\alpha(u)n_i$ . В дальнейшем индексы  $n$  и  $\tau$  у величин означают их нормальную и касательную составляющие. Причем в зоне контакта аналогичные векторы тел противоположно направлены:  $n' = -n''$ ,  $\tau' = -\tau''$ .

Для записи вариационной формы задачи определяются пространства функций перемещений  $\mathcal{H}^k(\Omega) = \{v: v = (v', v'') \in [H^k(\Omega')]^2 \times [H^k(\Omega'')]^2\}$ , возможных перемещений  $V = \{v \in \mathcal{H}^1(\Omega): v' = 0 \text{ на } \Gamma_u', v''_n = 0 \text{ на } \Gamma_u''\}$  и множество допустимых перемещений  $K = \{v \in V: v'_n + v''_n \leq 0 \text{ на } \Gamma_K\}$ .

Предположим, что  $c_{ijkl} \in L_\infty(\Omega)$ ,  $i, j, k, l = 1, 2$ ;  $F \in [L_2(\Omega)]^2$ ;  $P \in [L_2(\Gamma_\tau)]^2$ . Пусть решение  $u$  краевой задачи существует и принадлежит пространству  $\mathcal{H}^2(\Omega)$ . Можно

показать, что  $u$  удовлетворяет квазивариационному неравенству [4]

$$A(u, v - u) + \int_{\Gamma_K} \mathcal{F}|\sigma_n|(|v'_\tau + v''_\tau| - |u'_\tau + u''_\tau|) ds \geq FP(v - u) \quad \forall v \in K, \quad (8)$$

где

$$A(u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v) d\Omega = \int_{\Omega} c_{ijkm}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{km}(v) d\Omega,$$

$$FP(v) = \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_\tau} P_i v_i ds, \quad \Gamma_\tau = \Gamma'_\tau \cup \Gamma''_\tau.$$

Основной сложностью при исследовании и построении численных алгоритмов решения подобных задач является зависимость силы трения  $\mathcal{F}|\sigma_n|$  от искомого решения. Для решения квазивариационного неравенства применим метод последовательных приближений [3, 5, 6].

Задаем начальную силу трения  $g^0 \in L_2(\Gamma_K)$ ,  $g^0 \geq 0$ . На  $(m+1)$ -ом шаге определяем  $u^{m+1}$  как решение неравенства

$$A(u, v - u) + \int_{\Gamma_K} g^m(|v'_\tau + v''_\tau| - |u'_\tau + u''_\tau|) ds \geq FP(v - u) \quad \forall v \in K, \quad (9)$$

где  $g^m = \mathcal{F}|\sigma_n(u^m)|$ ,  $m = 1, 2, \dots$

Каждый итерационный шаг метода заключается в поиске решения вариационной задачи (9) при заданной силе трения  $g^m \in L_2(\Gamma_K)$  и вычислении нового значения  $g^{m+1}$ . Вопрос о теоретической сходимости, насколько нам известно, до сих пор остается открытым [3, с. 184].

Задачу (9) будем называть задачей с заданным трением. Можно показать, что она аналогична задаче минимизации функционала

$$\mathcal{L}_m(v) = \frac{1}{2}A(v, v) - FP(v) + \int_{\Gamma_K} g^m |v'_\tau + v''_\tau| ds \rightarrow \min_{v \in K}. \quad (10)$$

## 2. Существование решения

Ядро билинейной формы  $A(\cdot, \cdot)$  является нетривиальным в  $\mathcal{H}^1(\Omega)$ . В монографии [3] его называют пространством перемещений жестких тел и показывают, что для введенного тензора деформации это пространство определяется следующим образом:

$$R = \{z \in \mathcal{H}^1(\Omega) : z = (z', z''), \quad z_1^\alpha = a_1^\alpha - b^\alpha x_2, \quad z_2^\alpha = a_2^\alpha + b^\alpha x_1, \\ a_1^\alpha, a_2^\alpha, b^\alpha \in \mathbb{R}^1, \quad \alpha = ', ''\}.$$

С учётом условия закрепления одного из тел (3) ядро является трёхмерным ( $z' = (0, 0)$  для элементов  $R$ ). Для доказательства сходимости нам потребуются коэрцитивность функционала  $\mathcal{L}_m(\cdot)$  на множестве допустимых перемещений  $K$ . Поэтому

далее ограничимся случаями, когда размерность пространства перемещений жестких тел не превосходит единицы. Это дает возможность определить контактную задачу с единственным решением и потребовать выполнения условия коэрцитивности.

Для задачи контакта двух тел без учета трения соответствующие теоремы описаны в [3]. Для задачи контакта упругого тела и абсолютно твердой опоры, с учетом трения, доказательство теорем о существовании и единственности решения приведено в [7].

Мы рассмотрим случай, когда  $\Gamma_u''$  и  $\Gamma_K$  — прямолинейные отрезки, не параллельные друг другу. Удобно считать, что  $\Gamma_u''$  параллельна одной из осей, к примеру,  $Ox_2$ . В таком случае  $R_v = R \cap V$  представляет собой одномерное пространство вида

$$R_v = \{z \in \mathcal{H}^1(\Omega) : z = (z', z''), \quad z' = (0, 0), z'' = (0, a), a \in \mathbb{R}^1\}.$$

При этом  $K \cap R \subset R_v$ . Выберем систему координат так, что число  $a$  для элементов  $K$  неотрицательно:

$$K \cap R = \{z \in V : z = (z', z''), \quad z' = (0, 0), z'' = (0, a), a \geq 0\}. \quad (11)$$

Используем скалярное произведение

$$(u, v)_V = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega + \int_{\Gamma_u''} u_2'' ds \int_{\Gamma_u''} v_2'' ds. \quad (12)$$

Относительно него получаем ортогональное разложение  $V = H \oplus R_v$ . То есть любой элемент  $v \in V$  можно представить в виде суммы  $\tilde{v} + \bar{v}$  элементов пространств  $H$  и  $R_v$ , причем  $(\tilde{v}, \bar{v})_V = 0$ .

Возьмем, к примеру, произвольный элемент  $v \in V$ :  $v = (v', v'')$ ,  $v' = (v'_1, v'_2)$ ,  $v'' = (v''_1, v''_2)$ . Для одного тела перемещения как целого отсутствуют. А для второго тела  $\tilde{v}'' = (v''_1, \tilde{v}''_2)$ ,  $\bar{v} = (0, \bar{v}''_2)$ . Положим  $\bar{v}''_2 = \frac{1}{\text{mes} \Gamma_u''} \int_{\Gamma_u''} v''_2 ds$  и определим соответствующее ему  $\tilde{v}''_2$  как разность  $\tilde{v}''_2 = v''_2 - \bar{v}''_2$ , чтобы второе слагаемое в скалярном произведении (12) обращалось в ноль, если один из множителей  $\tilde{v}$ . Действительно,

$$\int_{\Gamma_u''} \tilde{v}''_2 ds = \int_{\Gamma_u''} (v''_2 - \bar{v}''_2) ds = \int_{\Gamma_u''} v''_2 ds - \frac{1}{\text{mes} \Gamma_u''} \int_{\Gamma_u''} \left( \int_{\Gamma_u''} v''_2 ds \right) ds = 0.$$

Таким образом,  $H = \{v \in V : \int_{\Gamma_u''} v''_2 ds = 0\}$ .

**Теорема 1.** Пусть справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} F_2'' dx + \int_{\Gamma_\tau''} P_2'' ds < 0. \quad (13)$$

Тогда для  $v \in K$  гарантируется сходимость

$$\mathcal{L}_m(v) \rightarrow +\infty, \quad \text{при } \|v\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.** Для функций  $\tilde{v} \in H$  справедливо неравенство типа неравенства Корна [3]

$$c_1 \|\tilde{v}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq |\tilde{v}| = \left( \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega \right)^{1/2}.$$

Поэтому для всех  $v \in K$  имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m(v) &= \frac{1}{2}A(\tilde{v}, \tilde{v}) + \frac{1}{2}A(\bar{v}, \bar{v}) - FP(\tilde{v}) - FP(\bar{v}) + \int_{\Gamma_K} g^m |v'_\tau + v''_\tau| ds = \\ &= \frac{1}{2}A(\tilde{v}, \tilde{v}) - FP(\tilde{v}) - \bar{v}''_2 \left( \int_{\Omega} F_2'' dx + \int_{\Gamma''_\tau} P_2'' ds \right) + \int_{\Gamma_K} g^m |v'_\tau + v''_\tau| ds \geq \\ &\geq c_2 \|\tilde{v}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^2 - \|FP\| \cdot \|\tilde{v}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} - \bar{v}''_2 \left( \int_{\Omega} F_2'' dx + \int_{\Gamma''_\tau} P_2'' ds \right) + \int_{\Gamma_K} g^m |v'_\tau + v''_\tau| ds. \end{aligned}$$

Если  $\|v\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \rightarrow \infty$ , то  $\|\tilde{v}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \rightarrow \infty$  или  $\|\bar{v}''_2\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \rightarrow \infty$ . В правой части неравенства четвертое слагаемое неотрицательно. Третье слагаемое для элементов множества  $K$  тоже неотрицательно, в силу условия (13) и того, что если  $v \in K$ , то  $\bar{v}''_2 = a \geq 0$  согласно (11).

Таким образом, в одном случае  $\mathcal{L}_m(v) \rightarrow +\infty$  за счет первого слагаемого. В другом случае — за счет неограниченного возрастания третьего слагаемого. Получаем

$$\mathcal{L}_m(v) \rightarrow +\infty \quad \forall v \in K, \text{ при } \|v\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \rightarrow \infty.$$

□

Из теоремы 1 следует, что задача (10) разрешима при любом  $m = 0, 1, \dots$ . Пусть  $u$  — решение задачи (10). Предположим, что  $u \in \mathcal{H}^2(\Omega)$ , и пусть  $\tilde{\Gamma}_K = \{x \in \Gamma_K : \sigma_n(u) < 0\}$ . Так как любое другое решение задачи (10) может отличаться от  $u$  только на элемент  $\rho \in R_v$ , то все другие решения также принадлежат классу  $\mathcal{H}^2(\Omega)$ . Сделаем естественное предположение о том, что  $\text{mes} \tilde{\Gamma}_K > 0$ . Тогда решение  $u$  задачи (10) будет единственным. Далее предполагаем, что  $u \in \mathcal{H}^2(\Omega)$  и  $\text{mes} \tilde{\Gamma}_K > 0$ .

### 3. Метод множителей Лагранжа

Для решения задачи с заданным трением (10) применим метод множителей Лагранжа, как мы это сделали в [8] для аналогичной задачи, не учитывающей трение (для задачи контакта упругого тела с абсолютно жесткой опорой [9]). Этот метод двойственности позволяет снять ограничение  $v'_n + v''_n \leq 0$  и вместо минимизации функционала  $\mathcal{L}_m(\cdot)$  на  $K$  проводить минимизацию на всем пространстве  $V$ .

Модифицированный функционал Лагранжа для задачи (10) записывается так:

$$M_m(v, l) = \frac{1}{2}A(v, v) - FP(v) + \int_{\Gamma_K} g^m |v'_\tau + v''_\tau| ds + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left( ((l + r[v])^+)^2 - l^2 \right) ds,$$

здесь и далее  $[v] = v'_n + v''_n$  — скачок функции.

Теоремы о сходимости метода к седловой точке функционала аналогичны имеющимся в [8]. Приведем одну из них.

**Теорема 2.** Если решение  $u$  задачи (10) принадлежит пространству  $\mathcal{H}^2(\Omega)$ , то модифицированный функционал Лагранжа  $M_m(\cdot, \cdot)$  обладает на  $V \times L_2(\Gamma_K)$  седловой точкой  $(u, -\sigma_n(u))$ , т. е.

$$M_m(u, l) \leq M_m(u, -\sigma_n(u)) \leq M_m(v, -\sigma_n(u)) \quad \forall (v, l) \in V \times L_2(\Gamma_K).$$

Таким образом, двойственная переменная в седловой точке совпадает с  $-\sigma_n(u)$  на  $\Gamma_K$ . Фактически  $-\sigma_n(u)$  определяет силу трения на следующем шаге метода последовательных приближений (9), так как  $g^m = \mathcal{F}|\sigma_n(u^m)|$ .

Алгоритм Удзавы записывается следующим образом [7–9]:

$$\begin{aligned} (i) \quad u^{k+1} &= \arg \min_{v \in V} M_m(v, l), \\ (ii) \quad l^{k+1} &= l^k + r \max \left\{ [u^{k+1}], -\frac{l^k}{r} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

#### 4. Проксимальная регуляризация

Непосредственная конечно-элементная реализация алгоритма Удзавы в полукоэрцитивном случае приводит к вырожденной матрице квадратичной формы минимизируемого функционала. Для устранения этого недостатка мы строим устойчивый алгоритм, основанный на итеративной проксимальной регуляризации модифицированного функционала Лагранжа [6, 10, 11].

Выберем произвольную пару  $(v^0, l^0) \in V \times L_2(\Gamma_K)$ . На  $(k+1)$ -ом шаге метода Удзавы находим пару  $(v^{k+1}, l^{k+1})$  следующим образом:

$$\begin{aligned} (i) \quad &\text{Определяем } v^{k+1} \text{ исходя из критерия } \|v^{k+1} - \tilde{v}^{k+1}\|_{1,\Omega} \leq \delta_k, \text{ где} \\ &\tilde{v}^{k+1} = \arg \min_{v \in V} \left\{ M_m(v, l^k) + \frac{1}{2} \|v - v^k\|_{0,\Omega}^2 \right\}, \delta_k > 0, \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty. \\ (ii) \quad &\text{Корректируем двойственную переменную по формуле} \\ &l^{k+1} = (l^k + r [v^{k+1}])^+. \end{aligned} \quad (15)$$

Регуляризирующая добавка  $\frac{1}{2} \|v - v^k\|_{0,\Omega}^2$  обеспечивает сильную выпуклость минимизируемого функционала, что гарантирует единственность решения вспомогательных задач

$$M_m(v, l^k) + \frac{1}{2} \|v - v^k\|_{0,\Omega}^2 \rightarrow \min_{v \in V}. \quad (16)$$

Пусть  $v_h^k$  — конечно-элементное решение, полученное на  $k$ -й итерации метода

Удзавы. Перегрушируем слагаемые

$$\begin{aligned}
 & M_m(v, l^k) + \frac{1}{2} \|v - v_h^k\|_{0, \Omega}^2 = \\
 & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega - \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\tau}} P_i v_i ds + \int_{\Gamma_K} g^m |v'_{\tau} + v''_{\tau}| ds + \\
 & \quad + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left( ((l + r[v])^+)^2 - l^2 \right) ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v - v_h^k)^2 d\Omega = \\
 & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) + v^2) d\Omega - \int_{\Omega} (F_i + v_h^k) v_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\tau}} P_i v_i ds + \\
 & \quad + \int_{\Gamma_K} g^m |v'_{\tau} + v''_{\tau}| ds + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_K} \left( ((l + r[v])^+)^2 - l^2 \right) ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v_h^k)^2 d\Omega.
 \end{aligned}$$

Постоянное слагаемое не влияет на решение задачи минимизации, поэтому его можно отбросить.

## 5. Аппроксимация и решение

Рассмотрим решение задачи в случае, когда область  $\Omega$  является единичным квадратом, а  $\Omega'$  и  $\Omega''$  — одинаковыми прямоугольниками, соответствующими нижней и верхней половинам этого квадрата. Решение задачи будем искать на последовательности равномерных сеток, разбивающих область на равнобедренные прямоугольные треугольники. Шаг сеток  $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$  и  $\frac{1}{64}$ . Обозначим число узлов, приходящихся на сторону квадрата  $n = 1/h + 1$ . Конечный элемент  $j$ -го узла триангуляции представляет собой совокупность треугольников, для которых  $j$ -й узел является вершиной. В каждом конечном элементе используем кусочно-линейные базисные функции, на которых строим линейную оболочку  $V_h$ , аппроксимирующую пространство  $V$ .

Пусть  $I_K$  — множество индексов узлов, лежащих на  $\Gamma_K$ . Каждому такому узлу соответствуют два усеченных конечных элемента (для верхнего тела и для нижнего) (общее число конечных элементов обозначим  $N = n^2 + n$ ). В каждом из этих конечных элементов своя пробная функция и свои значения  $(v_i^{(1)}, v_i^{(2)})$ .

Выполним замену переменных  $t_i = v_i'^{(2)} - v_i''^{(2)}$  (здесь для обоих тел нормали на  $\Gamma_K$  считаем сонаправленной с осью  $Ox_2$ ). Тогда  $v_i''^{(2)} = v_i'^{(2)} - t_i$  для  $i \in I_K$ . Каждая переменная  $t_i$  в векторе  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}$  помещается на место  $v_i''^{(2)}$ . Последнее слагаемое в  $M_m(v, l)$  аппроксимируем по формуле трапеций:  $\frac{h}{2r} \sum_{i \in I_K} (((l + rt_i)^+)^2 - l_i^2)$ . Здесь и далее для обозначения векторов из  $\mathbb{R}^{2N}$  используется полужирный шрифт.

Аналогично выполним замену переменных  $s_i = v_i'^{(1)} - v_i''^{(1)}$  (здесь для обоих тел касательный вектор на  $\Gamma_K$  считаем сонаправленным с осью  $Ox_1$ ). Тогда  $v_i''^{(1)} = v_i'^{(1)} - s_i$  для  $i \in I_K$ . Каждая переменная  $s_i$  в векторе  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}$  помещается на место  $v_i''^{(1)}$ . Слагаемое, учитывающее в  $M_m(v, l)$  силу трения, аппроксимируем по формуле трапеций:  $h \sum_{i \in I_K} g^m |s_i|$ . Для упрощения обозначений далее будет использоваться запись

$h\langle \mathbf{g}^m, |\mathbf{v}| \rangle$ , где под  $|\mathbf{v}|$  подразумевается вектор, координатами которого являются модули координат вектора  $\mathbf{v}$ , а не его длина.

Получаем конечномерную задачу нахождения седловой точки функции

$$\widehat{M}_m(\mathbf{v}, \mathbf{l}) = \frac{1}{2} \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{fp}, \mathbf{v} \rangle + h\langle \mathbf{g}^m, |\mathbf{v}| \rangle + \frac{h}{2r} ((1 + r\mathbf{v})^+)^2 - \mathbf{l}^2,$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение векторов в  $\mathbb{R}^{2N}$ ;  $A_{2N \times 2N}$  — матрица жесткости, модифицированная с учетом замены переменных;  $\mathbf{fp}_{2N}$  — вектор нагрузки, получаемый путем численного интегрирования;  $\mathbf{g}_{2N}^m$  — сила трения (в этом векторе отличными от нуля могут быть только компоненты, соответствующие  $s_i$ );  $\mathbf{l}_{2N}$  — двойственная переменная, у которой отличны от нуля компоненты, соответствующие  $t_i$ .

При проксимальной регуляризации матрица  $A_{2N \times 2N}$  и вектор  $\mathbf{fp}_{2N}$  изменяются для учета дополнительных слагаемых. Причем вектор  $\mathbf{fp}_{2N}$  необходимо пересчитывать на каждой итерации метода Удзавы, так как он зависит от  $v_h^k$ .

Полученную функцию можно записать в виде

$$\widehat{M}_m(\mathbf{v}, \mathbf{l}) = J_0(\mathbf{v}, \mathbf{l}) + h\langle \mathbf{g}^m, |\mathbf{v}| \rangle,$$

где функция  $J_0(\mathbf{v}, \mathbf{l})$  при использовании регуляризации строго выпуклая, дифференцируемая и  $J_0(\mathbf{v}, \mathbf{l}) \rightarrow \infty$  при  $\|\mathbf{v}\| \rightarrow \infty$ , второе слагаемое не является дифференцируемым,  $h\mathbf{g}^m \geq 0$  (компоненты вектора поэлементно неотрицательны). В монографии [12, с. 86] представлена теорема, утверждающая, что для подобного класса недифференцируемых функций метод поточечной релаксации будет сходиться к решению. Этот метод мы и применим для решения задачи минимизации на первом шаге метода Удзавы.

Далее на псевдокоде записан реализованный алгоритм. Строки 1-10 соответствуют методу последовательных приближений (МПП), на каждой итерации которого решается задача с заданным трением. В строке 9 происходит уточнение силы трения, причем для этого используется не численное дифференцирование, а приближенное значение двойственной переменной  $l$ , совпадающей с  $-\sigma_n(u)$  в узлах  $\Gamma_K$ .

```

1 repeat
2   repeat
3     if  $h > 1/64$  then  $h = h \cdot \frac{1}{2}$ ;
4     repeat
5        $\mathbf{u}^{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{v}_h \in V_h} \widehat{M}_m(\mathbf{v}, \mathbf{l}^k)$ ;
6        $\mathbf{l}^{k+1} = (\mathbf{l}^k + r\mathbf{v}^{k+1})^+$ ;
7     until  $\max_i |l_i^{k+1} - l_i^k| \leq \varepsilon$ ;
8   until  $h \leq 1/64$ ;
9    $\mathbf{g}^{m+1} = \mathcal{F} \cdot \mathbf{l}^{k+1}$ ;
10  until  $\max_i |g_i^{m+1} - g_i^m| \leq \varepsilon$ ;

```

**Алгоритм 1:** Задача контакта двух тел с учетом трения.

Строки 2-8 описывают метод регуляризации (15). Внутри этого метода на последовательности триангуляций с шагом сетки  $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$  и  $\frac{1}{64}$  происходит приближенное решение задачи поиска седловой точки. Если положить  $\delta_k = h$ , то при



дальнейшем уменьшении шага получим выполнение условия  $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty$ , что обеспечивает сходимость метода.

В строках 4-7 записан метод Удзавы (МУ), модифицированный с учетом регуляризации. В строке 6 происходит уточнение двойственной переменной. В строке 5 для решения задачи минимизации подразумевается использование метода поточечной релаксации (МПР). Поскольку в минимизируемой функции присутствует недифференцируемое слагаемое  $h(\mathbf{g}^m, |\mathbf{v}|)$ , для узлов, принадлежащих  $\Gamma_K$ , используем сглаживание [9, 12, 13].

Условием останова счета МПР является  $\max_i |u_i^{k+1} - u_i^k| \leq 10^{-4} \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{64}$ . В качестве стартовой точки используются значения, найденные на предыдущих итерациях МУ. А в случае дробления сетки — линейная аппроксимация решения с предыдущей итерации.

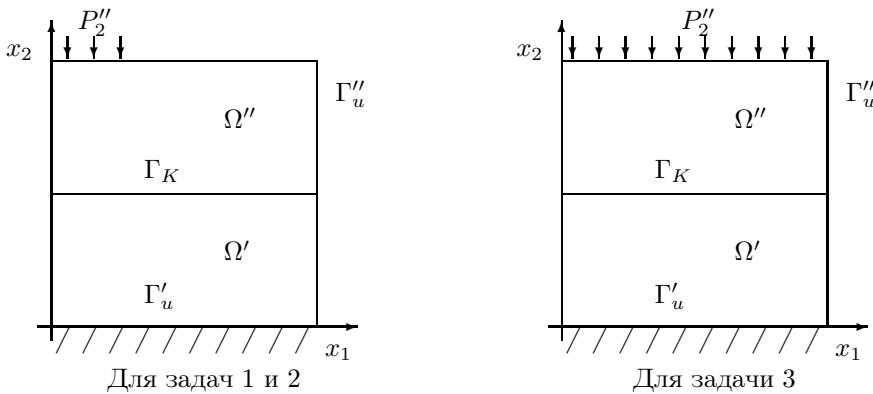


Рис. 1. Распределение поверхностной силы  $P_2''$

Решим три задачи (рис. 1): когда на левую треть верхней стороны тела  $\Omega''$  воздействует сила  $P_2'' = -60$ , когда на том же участке воздействует сила  $P_2'' = -120$  и когда на всю верхнюю сторону тела  $\Omega''$  воздействует сила  $P_2'' = -60$ . Объемные силы отсутствуют. Модуль упругости  $E = 73 \cdot 10^3$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0.34$ , коэффициент трения  $\mathcal{F} = 0.5$ .  $\Gamma'_u = \{(x, y) : x = 1, 0.5 < y \leq 1\}$ . Расчеты проведены при  $\varepsilon = 10^{-4}$ , параметре  $r = 10^{12}$ .

Таблица 1. Число итераций для каждой из задач

Задача	МПП	МУ	МПР (суммарно)	МПР (h=1/32)	МПР (h=1/64)
1	6	48	87539	27550	46586
2	6	54	109089	31480	62812
3	7	62	91629	25104	52765

В таблице 1 для каждой из задач приведено количество итераций, выполняющихся до достижения заданной точности. Для решения задачи 1 выполняется 6 итераций МПП. На каждой из них по 8 итераций МУ и, в среднем, 14560 итераций МПР. Большая часть итераций МПР приходится на мелкую сетку, когда каждая

итерация является самой ресурсозатратной операцией в решении задачи, поэтому для наглядности в таблице указано и количество шагов на сетке с шагом  $1/64$ .

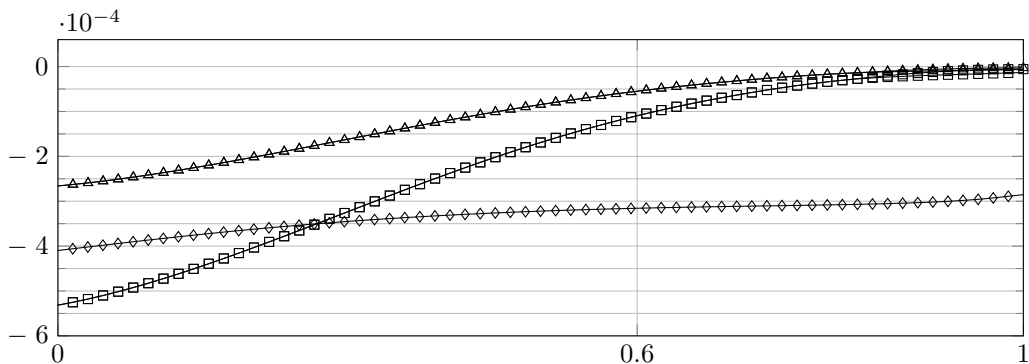


Рис. 2. Вид зоны контакта  $\Gamma_K$

На рис. 2 изображены перемещения точек  $\Gamma_K$ . Ноль на оси  $Ox_2$  соответствует положению границы  $\Gamma_K$  в случае, когда на тела действуют нулевые силы. По вертикальной оси используется масштаб увеличения  $1:10^{-4}$ , что подписано над верхним левым углом рисунка. Линиями с треугольными маркерами ( $\blacktriangle$  и  $\blacktriangleleft$ ) изображено решение задачи 1, линиями с квадратными маркерами ( $\blacksquare$  и  $\blacktriangleright$ ) — решение задачи 2. На части границы произошло разлипание тел (см. рис. 3). Линией с маркерами в виде ромбов ( $\blacklozenge$ ) изображено решение задачи 3, где тела остались слипшимися на всём протяжении области контакта.

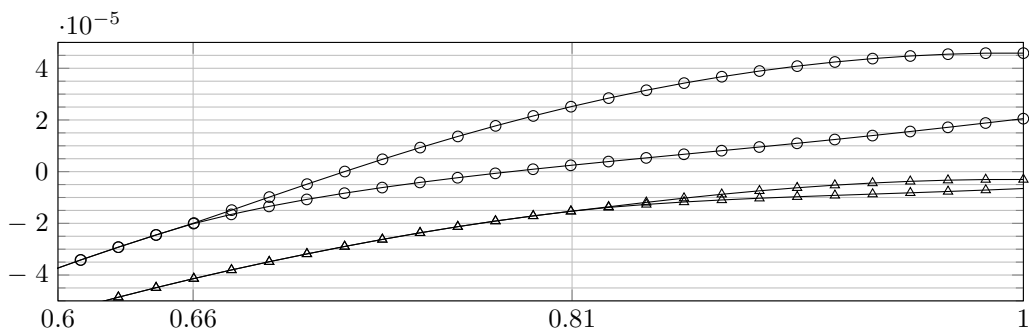


Рис. 3. Вид зоны контакта  $\Gamma_K$  в месте расхождения тел

На рис. 3 в масштабе  $1:10^{-5}$  показана область, в которой произошло разлипание тел в задаче 1. Здесь же линиями с круглыми маркерами ( $\ominus$  и  $\oplus$ ) показано решение задачи 1 без учета сил трения. Как видно, перемещения точек границы контакта различаются незначительно для задач с трением и без него. Но разошлись тела в

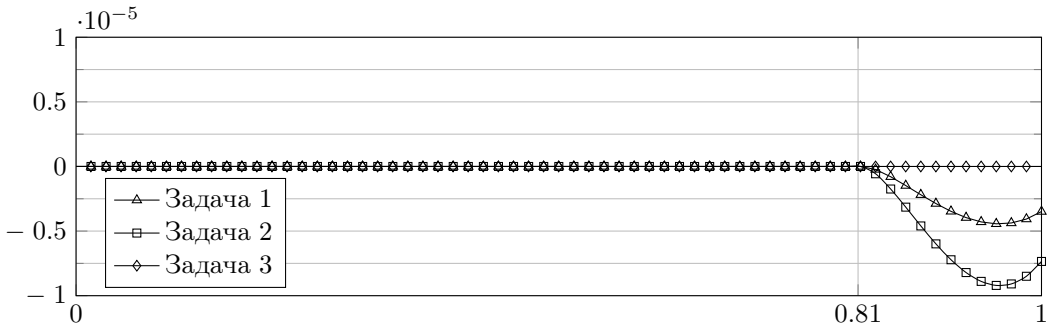


Рис. 4. Значения скачка [v]

данных условиях по-разному: без трения на 34% границы, с трением на меньшем участке  $[0.81, 1.00] \subset \Gamma_K$ , что составляет 19% границы. Это, разумеется, очень зависит от геометрии тел и заданных нагрузок, но в любом случае учет силы трения в расчетах может значительно повлиять на результат.

На рис. 4 показано, как изменяется на протяжении  $\Gamma_K$  значение скачка [u] для каждой из задач, а на рис. 5 показано изменение двойственной переменной l.

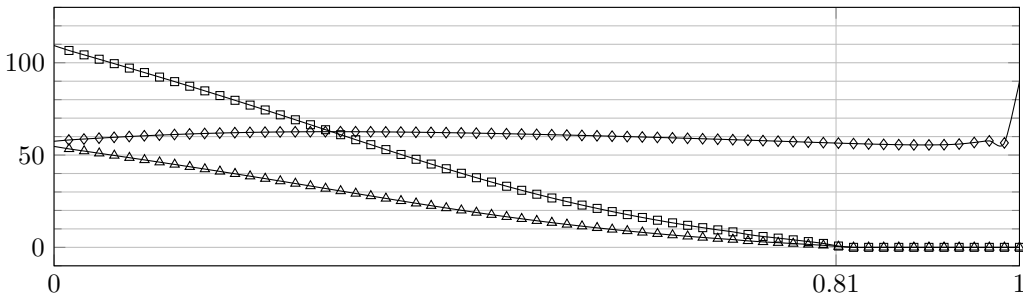


Рис. 5. Значения двойственной переменной l

Здесь видно, что для каждого решения выполняются условия (5) и (6), то есть для каждого узла произведение скачка на  $-\sigma_n$  равно нулю.

### Список литературы

- [1] J. Jarušek, “Contact problems with bounded friction. Coercive case”, *Czechoslovak Mathematical Journal.*, **33**:2, (1983), 237–261.
- [2] J. Jarušek, “Contact problems with bounded friction. Semicoercive case”, *Czechoslovak Mathematical Journal.*, **34**:4, (1984), 619–629.
- [3] И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек, *Решение вариационных неравенств в механике*, Мир, М., 1986.

- [4] А. С. Кравчук, *Вариационные и квазивариационные неравенства в механике*, МГАПИ, М., 1997.
- [5] N. Kikuchi, T. Oden, *Contact problem in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*, SIAM, Philadelphia., 1988.
- [6] Р. В. Намм, Г. И. Цой, “Метод последовательных приближений для решения квазивариационного неравенства Синьорини”, *Изв. вузов. Матем.*, 2017, № 7, 44–52.
- [7] Э. М. Вихтенко, Г. С. Ву, Р. В. Намм, “О сходимости метода Удзавы с модифицированным функционалом Лагранжа в вариационных неравенствах механики”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **10**:8, (2010), 1357–1366.
- [8] А. В. Жильцов, “Метод множителей Лагранжа для решения задачи об одностороннем контакте упругих тел с ограниченной зоной контакта”, *Математические заметки СВФУ*, **23**:4, (2016), 99–113.
- [9] Э. М. Вихтенко, Н. Н. Максимова, Р. В. Намм, “Модифицированные функционалы Лагранжа для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики”, *Автомат. и телемех.*, 2012, № 4, 3–17.
- [10] Э. М. Вихтенко, Р. В. Намм, “Итеративная проксимальная регуляризация модифицированного функционала Лагранжа для решения полукоэрцитивного квазивариационного неравенства Синьорини”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:9, (2008), 1571–1579.
- [11] I. Konnov, J. Gwinner, “A strongly convergent combined relaxation method in Hilbert spaces”, *Numerical Funct. Anal. Optim.*, **35**:(7–9), (2014), 1066–1077.
- [12] Р. Гловински, Ж.-Л. Гаслингер, Р. Тремольер, *Численное исследование вариационных неравенств*, Мир, М., 1979.
- [13] А. Я. Золотухин, Р. В. Намм, А. В. Пачина, “Приближенное решение вариационной задачи Мосолова и Мясникова с трением на границе по закону Кулона”, *Сиб. журн. вычисл. матем.*, **4**:2, (2001), 163–177.

Поступила в редакцию  
10 апреля 2019 г.

---

*Zhiltsov A. V., Namm R. V.* Stable algorithm for solving the semicoercive problem of contact of two bodies with friction on the boundary. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2019. V. 19. No 2. P. 173–184.

#### ABSTRACT

The problem of one-sided contact of two elastic bodies is considered. This is a static displacement problem. The bodies are influenced by bulk and surface forces, in the contact area there are friction forces. The substantiation of using the method of modified Lagrange functionals is given. The method of successive displacement is applied to the solution of a finite-dimensional analog of a task. To solve a finite-dimensional problem, the pointwise relaxation method is used. The results of numerical calculations are given.

Key words: *contact problem, augmented Lagrangian method, finite element method, duality methods, method of successive approximations, contact friction, iterative proximal regularization.*