Дальневосточный математический журнал. 2019. Т. 19. № 2. С. 197–205

УДК 517.965, 517.583
MSC2010 39B32, 33E05

© А. А. Илларионов[1,2], Н. В. Маркова[2,1]

Решение функциональных уравнений, связанных с эллиптическими функциями. III

Решается функциональное уравнение

$$f_1(x_1+z)\dots f_{s-1}(x_{s-1}+z)f_s(x_1+\dots+x_{s-1}-z)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(x_1,\dots,x_{s-1})\psi_j(z),$$

относительно неизвестных функций $f_1,\dots,f_s:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\varphi_j:\mathbb{C}^{s-1}\to\mathbb{C}$, $\psi_j:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ в случаях, когда $s\geqslant 3$, а $m\leqslant 2s-1$. Все неэлементарные решения имеют вид:

$$f_j(z)=\sigma(z+z_j)\exp(\alpha z^2+\beta_j z+\gamma_j),$$

где σ — сигма-функция Вейерштрасса, а $z_j,\alpha,\beta_j,\gamma_j\in\mathbb{C}$. Ранее такие результаты были известны при $m\leqslant s+1$. Рассматриваемое уравнение возникает при изучении полилинейных функционально-дифференциальных операторов и векторных теорем сложения.

Ключевые слова: *теоремы сложения, функциональные уравнения, сигма-функция Вейерштрасса, тета-функция, эллиптические функции.*

1. Введение

Рассмотрим функциональное уравнение

$$f_1(x_1+z)\dots f_{s-1}(x_{s-1}+z)f_s(x_1+\dots+x_{s-1}-z)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(x_1,\dots,x_{s-1})\psi_j(z)\qquad(1)$$

относительно неизвестных целых функций $f_1,\dots,f_s:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\varphi_1,\dots,\varphi_m:\mathbb{C}^{s-1}\to\mathbb{C}$, $\psi_1,\dots,\psi_m:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Оно возникает при исследовании полилинейных функционально-дифференциальных уравнений и многомерных векторных теорем сложения (см. [1]-[3]). Уравнение (1) исследовалось в [4–13]. Его общее решение известно при

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54.
[2] Тихоокеанский государственный университет, 600042, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
Электронная почта: illar_a@list.ru (А. А. Илларионов), nata_mark@mail.ru (Н. В. Маркова).

1) $m \leqslant s+1$ (см. [4] при $s=m=2$, [8] при $s=m=3$, [10] при $m \leqslant s+1$, $s=2,3$ и [13] во всех остальных случаях);

2) $m \leqslant 4s-5$, $f_1 = f_2 = \ldots = f_s$ (см. [12]);

3) $s=2$, $m=4$, $f_1=f_2$ — периодическая функция (см. [14]).

В настоящей работе мы уточняем результаты [10,13] и решаем уравнение (1) при $m \leqslant 2s-1$.

Определение. Набор $(f_1, \ldots, f_s)$, состоящий из целых не равных тождественно нулю функций, будем называть *решением функционального уравнения* (1), если он удовлетворяет разложению (1) вместе с некоторыми функциями $\varphi_1, \ldots, \varphi_m : \mathbb{C}^{s-1} \to \mathbb{C}$, $\psi_1, \ldots, \psi_m : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и минимально возможным $m \in \mathbb{N}$.

Нетрудно заметить, что любой набор $(Q_1, \ldots, Q_s)$, состоящий из квазимногочленов, является решением уравнения (1) при некотором m.

Определение. Решение уравнения (1) будем называть *элементарным,* если оно имеет вид $(f_1, \ldots, f_s)$, где $f_j(z) = Q_j(z)e^{\alpha z^2}$, где Q_j — квазимногочлены, а $\alpha_j \in \mathbb{C}$.

Основной результат настоящей работы заключается в следующем.

Теорема 1. *Пусть $s \geqslant 3$ и $m \leqslant 2s-1$. Тогда любое неэлементарное решение уравнения* (1) *имеет вид*

$$f_j(z) = \sigma(z+z_j) \cdot e^{\alpha z^2 + \beta_j z + \gamma_j}, \quad j = \overline{1,s},$$

где σ — сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированная с некоторой невырожденной решеткой, а $\alpha, \beta_j, \gamma_j, z_j$ — некоторые комплексные постоянные.

Замечание. Набор функций, указанный в теореме 1, является решением уравнения (1) при $m=s$ (см. [12, следствие 1] или [13, § 4]). Таким образом, уравнение (1) имеет только элементарные решения при $m \in \{1, \ldots, 2s-1\} \setminus \{s\}$. При $m=2s$ неэлементарными решениеми являются, например, $(\sigma', \sigma, \ldots, \sigma)$, $(\sigma^2, \sigma^2, \ldots, \sigma^2)$.

2. Вспомогательные сведения

Под решеткой L будем понимать дискретную аддитивную подгруппу поля $\mathbb{C}$, т.е. множество одного из следующих трех видов

$$L = \{0\}, \quad L = \{m\omega : m \in \mathbb{Z}\}, \quad L = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\},$$

где $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а ω_1, ω_2 — линейно независимые над $\mathbb{R}$ комплексные числа. Решетки первых двух типов называют вырожденными.

Сигма-функция Вейерштрасса $\sigma_L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ассоциированная с решеткой L, определяется произведением

$$\sigma_L(z) = z \cdot \prod_{l \in L \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{l}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{l} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{l}\right)^2\right).$$

При этом (в вырожденных случаях) $\sigma_L(z)=z$, если $L=\{0\}$ и

$$\sigma_L(z)=\frac{\omega}{\pi}\sin\left(\frac{\pi z}{\omega}\right)\cdot\exp\left(\frac{1}{26}\left(\frac{\pi z}{\omega}\right)^2\right),\ \text{ если }\ L=\{m\omega:m\in\mathbb{Z}\}.$$

Функция σ_L — нечетная и целая (голоморфная на всем $\mathbb{C}$). Все ее нули простые и расположены в точках решетки L.

Пусть $f_1,...,f_s$, $\tilde{f}_1,...,\tilde{f}_s$:$\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, причем набор $(\tilde{f}_1,...,\tilde{f}_s)$ получен из набора $(f_1,...,f_s)$ путем применения композиции преобразований следующих четырех видов:

1) $(f_1,\ldots,f_{s-1},f_s)\to(f_{k_1},\ldots,f_{k_{s-1}},f_s)$, где $(k_1,\ldots,k_{s-1})$ — перестановка из $\{1,\ldots,s-1\}$;
2) $(f_1,\ldots,f_s)\to(\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_s)$, где $\hat{f}_j(z)=f_j(z+z_j)$, $z_j\in\mathbb{C}$, $j=\overline{1,s}$;
3) $(f_1,\ldots,f_s)\to(f_1e^{L_1},\ldots,f_se^{L_s})$, где $L_j(z)=\beta_j+\gamma_j$, $j=\overline{1,s}$;
4) $(f_1,\ldots,f_s)\to(f_1e^{Q},\ldots,f_se^{Q})$, где $Q(z)=e^{\alpha z^2}$, $\alpha\in\mathbb{C}$.

Нетрудно проверить, что наборы $(f_1,...,f_s)$, $(\tilde{f}_1,...,\tilde{f}_s)$ могут быть решениями уравнения (1) только одновременно.

Определение. Будем называть решения $(f_1,\ldots,f_s)$ и $(\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_s)$ уравнения (1) *эквивалентными* и писать $(f_1,\ldots,f_s)\sim(\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_s)$, если одно из них получено из другого путем применения композиции преобразований указанных выше четырех видов.

Определение. Пишем $R_s(f_1,\ldots,f_s)=m_0$, если $(f_1,\ldots,f_s)$ — решение уравнения (1) при $m=m_0$.

Лемма 1. *Пусть $(f_1,\ldots,f_s)$ — решение уравнения (1). Тогда*

а) *функции $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$, $\psi_1,\ldots,\psi_m$ из разложения (1) являются целыми;*

б) *системы функций $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_m\}$, $\{\psi_1,\ldots,\psi_m\}$ линейно независимы.*

Доказательство. Утверждение а) при $s=2$ доказано в [8]. Приведенное там доказательство легко распространяется и на случай произвольного s. Утверждение б) вытекает из определения решения. □

Лемма 2 ([13, лемма 13]). *Если $R_s(f_1,\ldots,f_s)=m\in\mathbb{N}$, то существуют такие $c_1,c_2\in(0,+\infty)$, что для всех $z\in\mathbb{C}$*

$$|f_j(z)|\leqslant e^{c_1|z|^2+c_2},\ \ j=\overline{1,s}.$$

Лемма 3 ([10, замечание 3.3]). *Пусть $R_2(f,\mathrm{g})\leqslant 3$, причем f и g имеют нули. Тогда $\mathrm{g}(z)=f(z+z_0)e^{\beta z+\gamma}$, где $z_0,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$.*

Лемма 4. *Пусть $\{2\omega_1,2\omega_2\}$ — базис решетки $L\subset\mathbb{C}$, а f — целая функция, причем $f(0)=0$ и $f\not\equiv 0$. Пусть существуют постоянные $C_1,C_2\in\mathbb{C}$ такие, что для всех $z\in\mathbb{C}$*

$$f(z)\sigma_L(z)=C_jf(z+2\omega_j)\sigma_L(z-2\omega_j),\quad j=1,2.$$

Тогда найдутся такие $\beta,\gamma\in\mathbb{C}$, что $f(z)=\sigma_L(z)e^{\beta z+\gamma}$.

Доказательство. Согласно свойству квазипериодичности

$$\sigma_L(z-2\omega_j) = -e^{2\eta_j(-z+\omega_j)}\sigma_L(z), \text{ где } \eta_j = \frac{\partial}{\partial z}\log\sigma_L(z)\Big|_{z=\omega_j}, \quad j=1,2.$$

Поэтому

$$f(z+2\omega_j) = -\frac{e^{2\eta_j z}}{C_j e^{\eta_j\omega_j}} f(z).$$

Отсюда согласно известным свойствам двояко квазипериодических функций вытекает утверждение леммы. □

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $s\geqslant 3$, $R_s(f_1,...,f_s)=m$. Выбирая в (1) $x_1=0$, имеем

$$f_1(z)f_2(x_2+z)\dots f_{s-1}(x_{s-1}+z)f_s(x_2+\dots+x_{s-1}-z) = \\ = \sum_{j=1}^{m}\varphi_j(0,x_2,\dots,x_{s-1})\psi_j(z). \quad (2)$$

Отсюда вытекает, что

$$R_{s-1}(f_2,\dots,f_s) \leqslant \operatorname{rank}\{\varphi_j(0,x_2,\dots,x_{s-1})\}_{j=1}^m, \quad (3)$$

где rank – ранг соответствующей системы функций.

Лемма 5. *Если $l\in\{1,\dots,s-1\}$, функция f_l имеет нуль кратности k, то*

$$R_{s-1}(f_1,\dots,f_{l-1},f_{l+1},\dots,f_s) \leqslant R_s(f_1,f_2,\dots,f_s)-k. \quad (4)$$

Доказательство. Ограничимся случаем, когда $l=1$ и точка $z=0$ является нулем кратности k функции f_1. В противном случае нужно перейти к рассмотрению эквивалентного решения, удовлетворяющего этим условиям.

Пусть $R_s(f_1,\dots,f_s)=m$, а φ_j, ψ_j – функции из разложения (1). Для краткости, положим

$$\vec\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_m), \quad \vec\psi=(\psi_1,\dots,\varphi_m), \quad \vec\varphi\cdot\vec\psi=\varphi_1\psi_1+\dots+\varphi_m\psi_m.$$

1. Докажем, что система векторов $\{\vec\psi^{(l)}(0)\}_{l=0}^{k-1}$ линейно независима. Действительно, пусть $c_0,c_1,\dots,c_{k-1}\in\mathbb{C}$, причем

$$c_0\vec\psi(0)+c_1\vec\psi'(0)+\dots+c_{k-1}\vec\psi^{(k-1)}(0)=0.$$

Тогда из (1) вытекает равенство

$$\sum_{l=0}^{k-1}c_l\frac{\partial^l}{\partial z^l}\left(f_1(x_1+z)\dots f_{s-1}(x_{s-1}+z)f_s(x_1+\dots+x_{s-1}-z)\right)\Big|_{z=0}=0. \quad (5)$$

Предположим, что не все коэффициенты из $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ равны нулю. Пусть q – наибольший номер такой, что $c_q \neq 0$. Дифференцируя (5) $(k-q)$ раз по q и подставляя $x_1=0$, получаем

$$c_q f_1^{(k)}(0) f_2(x_2) \ldots f_{s-1}(x_{s-1}) f_s(x_2+\ldots+x_{s-1}) = 0.$$

Т.к. $f_1^{(k)}(0) \neq 0$, то пришли к противоречию. Значит, $c_j = 0$, $j = \overline{0, k-1}$, система $\{\vec{\psi}^{(l)}(0)\}_{l=0}^{k-1}$ линейно независима.

2. Дифференцируя уравнение (2) l раз по z и полагая $z=0$, имеем

$$\vec{\varphi}(0, x_2, \ldots, x_{s-1}) \cdot \vec{\psi}^{(l)}(0), \quad l = \overline{0, k-1}.$$

Т.к. векторы $\vec{\psi}^{(l)}(0)$ линейно независимы, то $\operatorname{rank}\{\varphi_j(0, x_2, \ldots, x_{s-1})\}_{j=1}^{m} \leqslant m-k$. Используя (3), приходим к (4). □

Для любой функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ определим множество ее нулей:

$$Z(f) = \{z_0 \in \mathbb{C} : f(z_0) = 0\}.$$

Лемма 6. *Предположим, что* $R_s(f_1, \ldots, f_s) = m$, $f_j(0) = 0$ *при* $j = 1, \ldots, s$. *Пусть* $l \in \{1, \ldots, s-1\}$, *причем*

$$R_{s-1}(f_1, \ldots, f_{l-1}, f_{l+1}, \ldots, f_s) = m-1.$$

Тогда

а) для любого $z_0 \in Z(f_l)$ *существует такая постоянная* $C \in \mathbb{C}$, *что для всех комплексных* $x_1, \ldots, x_{s-1}$

$$\begin{aligned} f_1(x_1) \ldots f_{s-1}(x_{s-1}) f_s(x_1+\ldots+x_{s-1}) &= \\ = C f_1(x_1+z_0) \ldots f_{s-1}(x_{s-1}+z_0) f_s(x_1+\ldots+x_{s-1}-z_0); \end{aligned} \quad (6)$$

б) существует решетка $L \subset \mathbb{C}$ *и постоянные* α, β, γ *такие, что*

$$f_l(z) = \sigma_L(z) \cdot e^{\alpha z^2 + \beta z + \gamma};$$

в) для любого j *справедливо вложение:* $L \subset Z(f_j)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не умаляя общности, ограничимся случаем $l=1$.

Докажем утверждение а). Возьмем любой $z_0 \in Z(f_1)$. Выбирая в (2) $z=0$ и $z = z_0$, получаем равенства

$$\vec{\varphi}(0, x_2, \ldots, x_{s-1}) \vec{\psi}(0) = 0, \quad \vec{\varphi}(0, x_2, \ldots, x_{s-1}) \vec{\psi}(z_0) = 0.$$

Так как $R_{s-1}(f_2, \ldots, f_s) = m-1$, то векторы $\vec{\psi}(0)$, $\vec{\psi}(z_0)$ линейно зависимы в силу неравенства (3). Значит, существует постоянная $C \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ такая, что $\vec{\psi}(0) = C \vec{\psi}(z_0)$. Согласно (1)

$$f_1(x_1) \ldots f_{s-1}(x_{s-1}) f_s(x_1+\ldots+x_{s-1}) = \vec{\varphi}(0, x_2, \ldots, x_{s-1}) \vec{\psi}(0),$$
$$f_1(x_1+z_0) \ldots f_{s-1}(x_{s-1}+z_0) f_s(x_1+\ldots+x_{s-1}-z_0) = \vec{\varphi}(0, x_2, \ldots, x_{s-1}) \vec{\psi}(z_0).$$

Отсюда вытекает (6).

Докажем утверждение б). Возьмем любой $z_1 \in Z(f_1)$. Подставляя в (6) $x_1 = z_1 - z_0$, заключаем, что $f_1(z_1 - z_0) = 0$, т.е. $z_1 - z_0 \in Z(f_1)$. Поэтому $Z(f_1)$ – подгруппа группы $(\mathbb{C}, +)$. Следовательно, $Z(f_1)$ – решетка. Так как $R_{s-1}(f_2, \ldots, f_s) = m-1$, то согласно лемме 5 все нули функции f_1 простые. Значит, функции f_1 и σ_L (где $L = Z(f_1)$) имеют одинаковые множества нулей. Используя лемму 2, заключаем, что

$$f_1(z) = \sigma_L(z) e^{\alpha z^2 + \beta z + \gamma}.$$

Докажем утверждение в). Возьмем любой $j \in \{2, \ldots, s-1\}$ и $z_0 \in L$. Полагая в (6) $x_j = 0$, приходим к выводу, что $f_j(z_0) = 0$. Следовательно, $L \subset Z(f_j)$, $j = \overline{1, s-1}$. Выбирая в (6) $x_1 + \ldots + x_{s-1} = 0$, получаем $f_s(-z_0) = 0$. Поэтому $-L \subset Z(f_s)$. Так как $-L = L$, то $L \subset Z(f_s)$. □

Лемма 7. *Пусть $s = 3$ и $m \leqslant 5$. Тогда любое неэлементарное решение уравнения (1) эквивалентно набору (σ, σ, σ), где σ — сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированная с некоторой невырожденной решеткой.*

Доказательство. Случай $m \leqslant 4$ рассмотрен в [10]. Пусть $m = 5$.

Так как решение (f_1, f_2, f_3) не является элементарным, то функции f_1, f_2, f_3 имеют нули (см., например, [10]). Не умаляя общности, будем считать, что $f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 0$ (иначе нужно перейти к рассмотрению эквивалентного решения, удовлетворяющему этому условию). Согласно лемме 5 $R_2(f_1, f_3) \leqslant 4$, $R_2(f_2, f_3) \leqslant 4$. Поэтому возможны следующие четыре случая.

1. Пусть $R_2(f_1, f_3) \leqslant 3$, $R_2(f_2, f_3) \leqslant 3$. Тогда $(f_1, f_2, f_3) \sim (f_1, f_1, f_1)$ согласно лемме 3. Требуемый результат вытекает из [12, лемма 8].

2. Пусть $R_2(f_1, f_3) \leqslant 3$, $R_2(f_2, f_3) = 4$. Так как $R_2(f_1, f_3) \leqslant 3$, то $(f_1, f_2, f_3) \sim (f, f_2, f)$ согласно лемме 3. Поскольку $R_2(f_2, f_3) = R_2(f_2, f) = 4$, по лемме 6 б) существует такая решетка $L \subset \mathbb{C}$, что

$$(f_1, f_2, f_3) \sim (\sigma_L, \hat{f}_2, \sigma_L).$$

Так как решение $(\sigma_L, \hat{f}_2, \sigma_L)$ не элементарное, то решетка L невырожденная. Пусть $\{2\omega_1, 2\omega_2\}$ — ее базис. Согласно лемме 6 из условий $R_2(\hat{f}_2, \sigma_L) = 4$, $\sigma_L(2\omega_j) = 0$, $j = 1, 2$ вытекает, что найдутся постоянные $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\sigma_L(x) f_2(y) \sigma_L(x+y) = C_j \sigma_L(x + 2\omega_j) f_2(y + 2\omega_j) \sigma_L(x + y - 2\omega_j), \quad j = 1, 2.$$

Дифференцируя их по x и полагая $x = -y$, получаем

$$-\sigma_L(y) f_2(y) \sigma_L'(0) = C_j \sigma_L(2\omega_j - y) f_2(y + 2\omega_j) \sigma_L'(-2\omega_j), \quad j = 1, 2.$$

Из последнего равенства и леммы 4 следует, что $f_2(z) = e^{\beta z + \gamma} \sigma_L(z)$. Поэтому

$$(f_1, f_2, f_3) \sim (\sigma_L, \sigma_L, \sigma_L).$$

3. Случай $R_2(f_1,f_3)=4$, $R_2(f_2,f_3)\leqslant 3$ сводится к предыдущему, поскольку $(f_1,f_2,f_3)\sim(f_2,f_1,f_3)$.

4. Пусть $R_2(f_1,f_3)=4$, $R_2(f_2,f_3)=4$. Поскольку $R_2(f_2,f_3)=4$, применяя лемму 6, получаем, что $(f_1,f_2,f_3)\sim(\sigma_L,\hat f_2,\hat f_3)$, причем

$$\sigma_L(x)\hat f_2(y)\hat f_3(x+y)=C_j\sigma_L(x+2\omega_j)\hat f_2(y+2\omega_j)\hat f_3(x+y-2\omega_j),\quad j=1,2, \tag{7}$$

где $\{2\omega_1,2\omega_2\}$ — базис решетки L, а C_1,C_2 — некоторые постоянные.

Так как $R_2(\hat f_1,\hat f_3)=4$, то согласно леммам 6, 5 точки $z=0$ и $z=2\omega_j$ являются простыми нулями функции $\hat f_2$. Поэтому, дифференцируя (7) по y и полагая $y=0$, получаем

$$\hat f_2'(0)\sigma_L(x)\hat f_3(x)=C_j\hat f_2'(2\omega_j)\sigma_L(x+2\omega_j)\hat f_3(x-2\omega_j).$$

Из последнего равенства и леммы 4 вытекает формула $\hat f_3(z)=e^{\beta_3z+\gamma_3}\sigma_L(z)$. Поэтому $(f_1,f_2,f_3)\sim(\sigma_L,\tilde f_2,\sigma_L)$. Повторяя приведенные выше рассуждения в которых меняем f_1 и f_2 местами, получаем, что $(f_1,f_2,f_3)\sim(\tilde f_1,\sigma_L,\sigma_L)$. Значит, $(f_1,f_2,f_3)\sim(\sigma_L,\sigma_L,\sigma_L)$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Нужно доказать, что $(f_1,\dots,f_s)\sim(\sigma,\dots,\sigma)$. Для этого используем метод математической индукции по $s=3,4,\dots$.

База индукции вытекает из леммы 7.

Шаг индукции от $(s-1)$ *к* s. Так как решение $(f_1,\dots,f_s)$ неэлементарное, то функции $f_1,\dots,f_s$ имеют нули (см., например, [13]). Не умаляя общности, будем считать, что $f_1(0)=\dots=f_s(0)=0$, иначе нужно рассмотреть эквивалентное решение, удовлетворяющему этому условию. Согласно лемме 5

$$R_{s-1}(f_1,\dots,f_{l-1},f_{l+1},\dots,f_s)\leqslant m-1,\quad l=1,\dots,s-1.$$

Поэтому возможны три случая.

1. Существуют два (разных) номера $l,j\in\{1,\dots,s-1\}$ такие, что

$$R_{s-1}(f_1,\dots,f_{l-1},f_{l+1},\dots,f_s)\leqslant m-2,\quad R_{s-1}(f_1,\dots,f_{j-1},f_{j+1},\dots,f_s)\leqslant m-2.$$

Так как $m-2\leqslant 2(s-1)-1$, то по предположению индукции

$$(f_1,\dots,f_{l-1},f_{l+1},\dots,f_s)\sim(\sigma_1,\dots,\sigma_1),\quad (f_1,\dots,f_{j-1},f_{j+1},\dots,f_s)\sim(\sigma_2,\dots,\sigma_2),$$

где σ_1,σ_2 — сигма-функции, ассоциированные с некоторым решетками L_1 и L_2 соответственно. Нетрудно заметить, что $L_1=L_2$, $(f_1,\dots,f_s)\sim(\sigma_1,\dots,\sigma_1)$.

2. Существует ровно один номер $l\in\{1,\dots,s-1\}$ такой, что

$$R_{s-1}(f_1,\dots,f_{l-1},f_{l+1},\dots,f_s)\leqslant m-2.$$

Не умаляя общности, считаем, что $l=1$. Тогда

$$R_{s-1}(f_2,\dots,f_s)\leqslant 2(s-1)+1, R_{s-1}(f_1,\dots,f_{j-1},f_{j+1},\dots,f_s)=m-1,\quad j=2,\dots,s-1.$$

Согласно предположению индукции $(f_1,f_2\dots,f_s)\sim(\hat f_1,\sigma_L,\dots,\sigma_L)$. Так как рассматриваемое решение не является элементарным, то решетка L — невырожденная. Пусть

$2\omega_1, 2\omega_2$ — ее базис. Так как $R_{s-1}(f_1, f_3, f_4, \dots, f_s) = m-1$, то согласно лемме 7 а) существуют такие постоянные $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$, что

$$\hat{f}_1(x_1)\sigma_L(x_2)\dots\sigma_L(x_{s-1})\sigma_L(x_1+\dots+x_{s-1}) =$$
$$= C_j \hat{f}_1(x_1+2\omega_j)\sigma_L(x_2+2\omega_j)\dots\sigma_L(x_{s-1}+2\omega_j)\sigma_L(x_1+\dots+x_{s-1}-2\omega_j), \quad j=1,2.$$

Дифференцируя это соотношение по $x_2,\dots,x_{s-1}$ и полагая $x_2=\dots=x_{s-1}=0$, получаем

$$(\sigma_L'(0))^{s-2}\,\hat{f}_1(x_1)\sigma_L(x_1) = C_j\,(\sigma_L'(2\omega_j))^{s-2}\,\hat{f}_1(x_1+2\omega_j)\sigma_L(x_1-2\omega_j).$$

Применяя лемму 4, заключаем, что $f_1(z)=\sigma_L(z)e^{\beta z+\gamma}$. Поэтому $(f_1,\dots,f_s)\sim(\sigma_L,\dots,\sigma_L)$.

3. Пусть

$$R_{s-1}(f_1,\dots,f_{j-1},f_{j+1},\dots,f_s) = m-1, \quad j=1,\dots,s-1.$$

Докажем, что для всех $l\in\{1,\dots,s-1\}$ существуют функции $f_{j,l}$ такие, что

$$(f_1,\dots,f_s)\sim(f_{1,l},\dots,f_{l-1,l},\sigma_L,f_{l+1,l},\dots,f_{s-1,l},\sigma_L). \tag{8}$$

Достаточно рассмотреть случай $l=1$. Так как $R_{s-1}(f_2,\dots,f_s)=m-1$, то $(f_1,f_2\dots,f_s)\sim(\sigma_L,\hat{f}_2,\dots,\hat{f}_s)$, где L — некоторая решетка с базисом $2\omega_1,2\omega_2$. Кроме того, согласно условиям и леммам 5, 7 точки $z=0$ и $z=2\omega_j$ являются простыми нулями функций $f_1,\dots,f_{s-1}$, а согласно лемме 7 существуют постоянные C_1,C_2 такие, что

$$\sigma_L(x_1)\hat{f}_2(x_2)\dots\hat{f}_{s-1}(x_{s-1})\hat{f}_s(x_1+\dots+x_{s-1}) =$$
$$= C_j\sigma_L(x_1+2\omega_j)\hat{f}_2(x_2+2\omega_j)\dots\hat{f}_{s-1}(x_{s-1}+2\omega_j)\hat{f}_s(x_1+\dots+x_{s-1}-2\omega_j), \quad j=1,2.$$

Дифференцируя это соотношение по $x_2,\dots,x_{s-1}$ и полагая $x_2=\dots=x_{s-1}=0$, получаем

$$\left(\hat{f}_2'(0)\dots\hat{f}_{s-1}'(0)\right)\sigma_L(x_1)\hat{f}_s(x_1) = C_j\left(\hat{f}_2'(2\omega_j)\dots\hat{f}_{s-1}'(2\omega_j)\right)\sigma_L(x_1+2\omega_j)\hat{f}_s(x_1-2\omega_j).$$

Применяя лемму 4, заключаем, что $f_s(z)=\sigma_L(z)e^{\beta z+\gamma}$. Отсюда вытекает свойство (8) при $l=1$.

Из (8) следует, что $(f_1,\dots,f_s)\sim(\sigma_L,\dots,\sigma_L)$. □

Список литературы

[1] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, “Трилинейные функциональные уравнения”, *УМН*, **60**:2, (2005), 151–152.

[2] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, “Законы слжения на якобианах плоских алгебраических кривых”, *Тр. МИАН*, **251**, (2005), 54–126.

[3] В. М. Бухштабер, И. М. Кричевер, “Интегрируемые уравнения, теоремы сложения и проблема Римана-Шоттки”, *УМН*, **61**:1, (2006), 25–84.

[4] R. Rochberg, L. Rubel, “A Functional Equation”, *Indiana Univ. Math. J.*, **41**:2, (1992), 363–376.

[5] M. Bonk, “The addition theorem of Weierstrass's sigma function”, *Math. Ann.*, **298**:1, (1994), 591–610.

[6] M. Bonk, “The Characterization of Theta Functions by Functional Equations”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **65**, (1995), 29–55.

[7] M. Bonk, “The addition formula for theta function”, *Aequationes Math.*, **53**:1–2, (1997), 54–72.

[8] В. А. Быковский, “Гиперквазимногочлены и их приложения”, *Функц. анализ и его прил.*, **50**:3, (2016), 34–46.

[9] А. А. Илларионов, “Функциональное уравнение и сигма-функция Вейерштрасса”, *Функц. анализ и его прил.*, **50**:4, (2016), 43–54.

[10] А. А. Илларионов, “Решение функциональных уравнений, связанных с эллиптическими функциями”, *Аналитическая теория чисел, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Тр. МИАН*, **299**, (2017), 105–117.

[11] А. А. Илларионов, М. А. Романов, “Гиперквазимногочлены для тэта-функции”, *Функц. анализ и его прил.*, **52**:3, (2018), 84–87.

[12] А. А. Илларионов, “О полилинейном функциональном уравнении”, *Матем. заметки*, (в печати).

[13] А. А. Илларионов, “Решение функциональных уравнений, связанных с эллиптическими функциями. II”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **16**, (2019), 481–492.

[14] А. А. Илларионов, “Гиперэллиптические системы последовательностей ранга 4”, *Матем. сб.*, **210**:9, (2019), 59–88.

Поступила в редакцию
30 мая 2019 г.

Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (проект N 18-01-00638)

Illarionov A.A., Markova N. V. Solution of functional equations related to elliptic functions. III. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2019. V. 19. No 2. P. 197–205.

ABSTRACT

Let $s, m \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$. We solve the functional equation

$$f_1(x_1+z)\dots f_{s-1}(x_{s-1}+z)f_s(x_1+\dots+x_{s-1}-z) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x_1,\dots,x_{s-1})\psi_j(z),$$

for unknown entire functions $f_1,\dots,f_s : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\varphi_j : \mathbb{C}^{s-1}\to\mathbb{C}$, $\psi_j : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ in the case of $s \geqslant 3$, $m \leqslant 2s-1$. All non-elementary solutions are described by the Weierstrass sigma-function. Previously, such results were known for $m \leqslant s+1$. The considered equation arises in the study of polylinear functional-differential operators and multidimensional vector addition theorems.

Key words: *addition theorem, functional equation, Weierstrass sigma-function, theta function, elliptic function.*