

УДК 517.958

MSC2010 35Q20 +35Q60

© Е. О. Коваленко^{1,2}; И. В. Прохоров^{1,2}

Определение коэффициента донного рассеяния при многолучевом зондировании океана

Рассмотрены математические проблемы построения гидролокационных изображений морского дна по данным измерений многолучевого гидролокатора бокового обзора. В рамках модели, основанной на нестационарном уравнении переноса излучения, исследована обратная задача, заключающаяся в нахождении коэффициента донного рассеяния. Предложен новый способ решения обратной задачи в предположении однократного рассеяния и импульсного режима зондирования. Проведен численный анализ качества изображений морского дна в зависимости от числа ракурсов зондирования, ширины диаграммы направленности приемных антенн и уровня объемного рассеяния в среде.

Ключевые слова: *уравнение переноса излучения, обратная задача, донное и объемное рассеяние, многолучевое зондирование.*

1. Введение

Изучение глубин Мирового океана и мониторинг прибрежных акваторий на современном этапе развития человеческого общества является несомненно актуальной задачей не только в практическом и геополитическом аспектах, но и с научной точки зрения [1–5]. В этой области много интересных нерешенных задач, требующих как теоретического осмысления, так и разработки новых алгоритмов и программных комплексов для их численного решения. Одним из наиболее перспективных технических средств для организации обзорно-поисковых работ на водных акваториях являются автономные необитаемые подводные аппараты (АНПА), снаряженные гидролокаторами бокового и кругового обзора. Применение АНПА для мониторинга водных акваторий является экономически выгодным и безопасным для человека [4, 5].

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.

² Дальневосточный федеральный университет, 690050, г. Владивосток, ул. Суханова, 8.
Электронная почта: kovalenko.eo@dvvu.ru (Е. О. Коваленко), prokhorov@iam.dvo.ru (И. В. Прохоров).

В работе рассматриваются проблемы построения и улучшения качества гидролокационных изображений морского дна по данным измерений, полученных с гидролокатора бокового обзора (ГБО), установленного на АНПА. Предполагается, что носитель приемо-передающей антенны, испускающей импульсный сигнал, движется с постоянной скоростью вдоль некоторой прямой. В качестве математической модели используется уравнение переноса высокочастотного акустического излучения [6–9] с граничным условием, описывающим диффузное отражение на донной поверхности [10–14]. Постановка обратной задачи заключается в нахождении коэффициента донного рассеяния при некотором условии переопределения решения уравнения переноса излучения. В рамках приближения однократного рассеяния для нахождения коэффициента диффузного отражения получено интегральное уравнение первого рода, которое для узкой диаграммы направленности приемной антенны имеет явное решение [10, 11]. При увеличении ширины диаграммы направленности применение явной формулы приводит к расфокусированию донных объектов на гидролокационных изображениях. Чтобы преодолеть этот дефект, можно решать интегральное уравнение для искомой функции, например, путем дискретизации непрерывной задачи и сведением ее к решению системы линейных алгебраических уравнений. Однако при традиционном способе зондирования с помощью двух однолучевых гидролокаторов бокового обзора, расположенных по разным бортам АНПА [8–12], мы получаем систему линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей. Решение задачи становится чувствительным к ошибкам исходных данных, и, как следствие, приемлемое изображение морского дна даже при слабо зашумленных данных получить невозможно [12].

В последнее время широкое распространение при поисково-обзорных работах с помощью автономных подводных аппаратов получили многолучевые эхолоты [4, 5]. Как правило, многолучевые ГБО применяются для повышения разрешающей способности в направлении, перпендикулярном к траектории движения носителя антенны. Использование ГБО подобного типа позволяет существенно ослабить требования, налагаемые на длительность импульсов, без понижения разрешающей способности ГБО. В настоящей работе мы будем рассматривать несколько иной случай многолучевого сканирования. А именно тот, когда измерения осуществляются многолучевой антенной, принимающей эхолокационный сигнал с различных направлений в плоскости, содержащей прямую линию, вдоль которой движется носитель антенн. Отметим, что аналогичную схему измерения можно реализовать однолучевым локатором путем увеличения количества галсов АНПА, причем число галсов и их расположение зависит от выбранных в схеме сканирования направлений.

2. Прямая и обратная задачи для нестационарного уравнения переноса излучения

Рассматривается нестационарное уравнение переноса излучения [6–19]

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \nabla_r + \mu \right) I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}' + J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t), \quad (1)$$

где $\mathbf{r} \in G \subset \mathbb{R}^3$, $t \in [0, T]$ и волновой вектор \mathbf{k} принадлежит единичной окружности $\Omega = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{k}| = 1\}$. Функция $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ интерпретируется как плотность потока энергии волны, распространяющейся в направлении \mathbf{k} со скоростью c в момент времени t в точке \mathbf{r} . Величины μ и σ имеют смысл коэффициентов затухания и рассеяния, а функция J описывает источники звукового поля.

Область G представляет собой верхнее полупространство, ограниченное горизонтальной плоскостью $\gamma = \{\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3 : r_3 = -l\}$, $l > 0$. Присоединим к уравнению (1) начальные и граничные условия [13, 14]

$$I^-(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)|_{t=0} = 0, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{k}) \in G \times \Omega, \quad (2)$$

$$I^-(\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) = \frac{\sigma_d(\mathbf{y})}{\pi} \int_{\Omega_+} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| I^+(\mathbf{y}, \mathbf{k}', t)(\mathbf{y}, \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}, \quad (\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) \in \Gamma^-. \quad (3)$$

В соотношениях (2), (3) использованы обозначения $I^\pm(\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} I(\mathbf{y} \pm \varepsilon \mathbf{k}, \mathbf{k}, t \pm \varepsilon/c)$,

$$\Gamma^\pm = \{(\mathbf{y}, \mathbf{k}, t) \in \gamma \times \Omega_\pm \times (0, T)\}, \quad \Omega_\pm = \{\mathbf{k} \in \Omega : \text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) = \pm 1\},$$

где $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ — единичный вектор внешней нормали к границе области G . Условие (2) означает, что излучение в среде в начальный момент времени отсутствует, а краевое условие (3) описывает диффузное отражение на морском дне по закону Ламберта с коэффициентом донного рассеяния $\sigma_d(\mathbf{y})$.

Задача 1. Уравнение (1) с начальными и граничными условиями (2), (3) при заданных $\mu, \sigma, \sigma_d, J, c$ образуют начально-краевую задачу для нахождения неизвестной функции I на множестве $G \times \Omega \times (0, T)$.

Задачу 1 также называют прямой задачей для уравнения переноса излучения. Исследование корректности Задачи 1 и ей подобных проводилось в работах [13–19].

Будем предполагать, что функция J описывает точечный импульсный источник звука, перемещающийся с постоянной скоростью V в направлении оси r_2

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) \sum_{i=1}^m \delta(t - t_i), \quad \mathbf{V} = (0, V, 0), \quad t_i > 0, \quad (4)$$

где δ — дельта-функция Дирака. Дополним систему соотношений (1)–(3) условиями

$$\int_{\Omega} S_j(\mathbf{k}) I^+(\mathbf{V}t, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = P_j(t), \quad j = 1, \dots, q, \quad (5)$$

где $S_j(\mathbf{k})$ отлична от нуля в некоторой подобласти $\Omega_j \subset \Omega$, и сформулируем обратную задачу.

Задача 2. Найти функцию $\sigma_d(\mathbf{y})$ из соотношений (1), (2), (3), (5) при заданных $\mu, \sigma, J, c, P_j, S_j$.

Обратная Задача 2 имеет различные физические приложения и возникает, например, при акустическом зондировании морского дна гидролокатором бокового

обзора, который движется прямолинейно с постоянной скоростью V и озвучивает окружающее пространство импульсными сигналами. На носителе расположены антенны, измеряющие суммарную интенсивность $P_j(t)$ в секторе Ω_j в момент времени t . Если $q=2$ и множества $\Omega_1 = \{\mathbf{k} \in \Omega: k_1 < 0\}$, $\Omega_2 = \{\mathbf{k} \in \Omega: k_1 > 0\}$, то мы имеем дело с простейшим случаем гидролокатора бокового обзора — с одной приемной антенной по каждому борту носителя [9].

3. Приближение однократного рассеяния. Вывод основных соотношений

Решение начально-краевой задачи (1)–(3) эквивалентно решению следующего уравнения интегрального типа [8–12]:

$$\begin{aligned}
 I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) &= I_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + \frac{\sigma_d(\mathbf{r} - d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)\mathbf{k})}{\pi} \exp(-\mu d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)) \times \\
 &\times \int_{\Omega_+} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| I^+ \left(\mathbf{r} - d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)}{c} \right) d\mathbf{k}' + \\
 &+ \int_0^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)} \exp(-\mu\tau) \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} I \left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c} \right) d\mathbf{k}' d\tau
 \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$I_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)} \exp(-\mu\tau) J \left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c} \right) d\tau, \tag{7}$$

$d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t) = \min\{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}), ct\}$, $d(\mathbf{r}, -\mathbf{k})$ — расстояние от точки $\mathbf{r} \in G$ в направлении $-\mathbf{k}$ до границы области G . Если $\mathbf{r} - d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)\mathbf{k} \notin \partial G$, то второе слагаемое в уравнении (6) отсутствует. Учитывая простое строение области G для функции $d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)$ в точках, принадлежащих плоскости $r_3 = 0$, можно выписать явное представление $d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t) = \min\{l/k_3, ct\}$ при $k_3 > 0$ и $d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t) = ct$ при $k_3 \leq 0$. Указанное представление для функции d неоднократно будет использовано в дальнейшем.

Возьмем в качестве нулевого приближения для решения уравнения (6) функцию I_0 из (7) и построим процесс простых итераций. На первом шаге итерационного процесса для решения начально-краевой задачи (1)–(3) получим так называемое приближение однократного рассеяния

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = I_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + I_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + I_G(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t),$$

где

$$I_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{\sigma_d(\mathbf{r} - d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)\mathbf{k})}{\pi} \exp(-\mu d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)) \times \\ \times \int_{\Omega_+} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| I_0^+ \left(\mathbf{r} - d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)}{c} \right) d\mathbf{k}', \quad (8)$$

$$I_G(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)} \exp(-\mu\tau) \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} I_0 \left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c} \right) d\mathbf{k}' d\tau. \quad (9)$$

Подставляя выражения для I_0 в (8), (9) и обозначая через $\mathbf{y} = \mathbf{r} - d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)\mathbf{k}$, получим

$$I_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{\sigma_d(\mathbf{y})}{\pi} \exp(-\mu d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)) \int_{\Omega_+} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| \times \\ \times \int_0^{d(\mathbf{y}, -\mathbf{k}', t)} \exp(-\mu\tau) J \left(\mathbf{y} - \tau\mathbf{k}', \mathbf{k}', t - \frac{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)}{c} - \frac{\tau}{c} \right) d\tau d\mathbf{k}', \\ I_G(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)} \exp(-\mu\tau) \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} \int_0^{d(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, -\mathbf{k}', t - \tau/c)} \exp(-\mu\tau') \times \\ \times J \left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k} - \tau'\mathbf{k}', \mathbf{k}', t - \frac{\tau + \tau'}{c} \right) d\tau' d\mathbf{k}' d\tau.$$

Подставляя I_0, I_γ, I_G в (5), получим

$$P_j(t) = P_{j,0}(t) + P_{j,\gamma}(t) + P_{j,G}(t),$$

где

$$P_{j,0}(t) = \int_{\Omega} S_j(\mathbf{k}) I_0^+(\mathbf{V}t, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k}, \\ P_{j,\gamma}(t) = \int_{\Omega} S_j(\mathbf{k}) I_\gamma^+(\mathbf{V}t, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k}, \\ P_{j,G}(t) = \int_{\Omega} S_j(\mathbf{k}) I_G^+(\mathbf{V}t, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k}. \quad (10)$$

Рассмотрим слагаемое $P_{j,0}(t)$, которое интерпретируется как суммарная мощность нерассеянного сигнала, измеряемого в точке $\mathbf{V}t$

$$P_{j,0}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\Omega} S_j(\mathbf{k}) \int_{\epsilon}^{d(\mathbf{r}, -\mathbf{k}, t)} \exp(-\mu\tau) J \left(\mathbf{V}t - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c} \right) d\tau d\mathbf{k} = \\ = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{G_\epsilon} S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{x}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|} \right) \exp(-\mu|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|) J \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{x}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|}, t - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|}{c} \right) d\tau d\mathbf{k},$$

где $G_\epsilon = G \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| \leq ct\} \setminus \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x} - \mathbf{V}t| < \epsilon\}$. Из представления (4), определяющего источник излучения, непосредственно вытекает, что носитель функции J не принадлежит множеству G_ϵ , поэтому $P_{j,0}(t) = 0$.

Так как $d(\mathbf{y}, -\mathbf{k}', t) = ct$ при $\mathbf{k}' \in \Omega_+$, то для функции $P_{j,\gamma}(t)$, определяющей вклад отраженного дном излучения, получаем представление

$$P_{j,\gamma}(t) = \int_{\Omega} S_j(\mathbf{k}) \frac{\sigma_d(\mathbf{y})}{\pi} \exp(-\mu d(\mathbf{V}t, -\mathbf{k})) \int_{\Omega_+} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| \times \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{y} - \tau\mathbf{k}', \mathbf{k}', t - \frac{d(\mathbf{V}t, -\mathbf{k})}{c} - \frac{\tau}{c}\right) d\tau d\mathbf{k}' d\mathbf{k}. \quad (11)$$

Проводя замену переменных $\mathbf{y} = \mathbf{V}t - d(\mathbf{V}t, -\mathbf{k})\mathbf{k}$, $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \tau\mathbf{k}'$ и учитывая вид источника J , из соотношения (11) находим

$$P_{j,\gamma}(t) = \int_{\gamma} S_j\left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|}\right) \frac{\sigma_d(\mathbf{y})}{\pi} \exp(-\mu|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|) \int_{\Omega_+} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}'| \times \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) J\left(\mathbf{y} - \tau\mathbf{k}', \mathbf{k}', t - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|}{c} - \frac{\tau}{c}\right) \left|\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^3}\right| d\tau d\mathbf{k}' d\mathbf{y} = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma} S_j\left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|}\right) \frac{\sigma_d(\mathbf{y})}{\pi} \exp(-\mu|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|) \int_{B(\mathbf{y}, ct)} \left|\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3}\right| \times \exp(-\mu|\mathbf{y} - \mathbf{x}|) \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{V}\left(t - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|}{c} - \frac{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|}{c}\right)\right) \times \delta\left(t - t_i - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|}{c} - \frac{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|}{c}\right) \left|\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^3}\right| dx dy, \quad (12)$$

Как правило, параметры среды μ, c и периоды зондирования $t_{i+1} - t_i$ таковы, что $\exp(-\mu c|t - t_i|) \ll 1, t \notin (t_i, t_{i+1})$. Это дает основание пренебрегать на текущем интервале приема эхолокационными сигналами из других периодов зондирования. В таком случае в (12) вместо суммы при $t \in (t_i, t_{i+1})$ останется лишь одно i -ое слагаемое.

Разобьем интеграл в (12) по множеству γ на сумму двух интегралов по множеству $\gamma_+ = \{\mathbf{y} \in \gamma : y_1 > 0\}$ и $\gamma_- = \{\mathbf{y} \in \gamma : y_1 < 0\}$ соответственно и в каждом из интегралов осуществим замену переменных интегрирования. Якобиан перехода от переменных

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}\left(t - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|}{c}\right), \\ t' = t - t_i - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|}{c},$$

к переменным $\mathbf{x}, y_{1,\pm}$ при $\mathbf{x}' = 0, t' = 0$ равен

$$\frac{|y_1|(t - t_i)}{|\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i||\mathbf{V}t - \mathbf{y}|},$$

где

$$|\mathbf{V}t - \mathbf{y}| = \frac{V}{c}(Vt - y_2) + \frac{c(t - t_i)}{2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right), \quad (13)$$

$$|\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i| = \frac{V}{c}(y_2 - Vt) + \frac{c(t - t_i)}{2} \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right), \quad (14)$$

$$y_{1,\pm} = \pm \sqrt{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2 - (Vt - y_2)^2 - l^2}, \quad \text{при } \mathbf{y} \in \gamma_{\pm}. \quad (15)$$

Уравнения (15) описывают в трехмерном пространстве линию, которая является результатом пересечения эллипсоида (с фокусами в точках $\mathbf{V}t$ и $\mathbf{V}t_i$)

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{V}t - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i| = c(t - t_i)\} \quad (16)$$

и полуплоскости γ_{\pm} . Беря во внимание вышесказанное, из (12) получаем

$$\begin{aligned} P_{j,\gamma}(t) = & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_-}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|} \right) \sigma_d(\mathbf{y}_-) \left| \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{y}_- - \mathbf{V}t_i}{|\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i|^2} \right| \left| \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_-}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2} \right| + \right. \\ & \left. + S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_+}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|} \right) \sigma_d(\mathbf{y}_+) \left| \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{y}_+ - \mathbf{V}t_i}{|\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i|^2} \right| \left| \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_+}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2} \right| \right) \times \\ & \times \frac{\exp(-\mu(|\mathbf{V}t - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} + \mathbf{V}t_i|))}{|y_1|(t - t_i)} dy_2, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\mathbf{y}_{\pm} = (\pm|y_1|, y_2, -l)$ и $|\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i|, |\mathbf{y} - \mathbf{V}t|$ определяются формулами (13), (14).

Так как $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ и справедливо уравнение (16), то из (17) получаем

$$\begin{aligned} P_{j,\gamma}(t) = & \frac{l^2 \exp(-\mu c(t - t_i))}{\pi (t - t_i)} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_-}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|} \right) \sigma_d(\mathbf{y}_-) + S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_+}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|} \right) \sigma_d(\mathbf{y}_+) \right) dy_2}{|y_1| |\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i|^2 |\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Возвращаясь к интегрированию по угловой переменной

$$\begin{aligned} \mathbf{k} = & (-\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, \cos \theta) = \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta < \pi, \\ \mathbf{k}_+ = & \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_+}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|}, \quad 0 \leq \varphi < \pi, \quad \mathbf{k}_- = \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_-}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|}, \quad \pi \leq \varphi < 2\pi, \end{aligned}$$

и учитывая, что

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{V}t - \mathbf{y}| &= \frac{c(t - t_i)}{2\left(1 - \frac{V}{c}k_2\right)} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right), \\
 |\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i| &= c(t - t_i) \left(1 - \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{2\left(1 - \frac{V}{c}k_2\right)}\right), \\
 \mathbf{y}_\pm &= \mathbf{V}t - \mathbf{k}_\pm |\mathbf{V}t - \mathbf{y}| = \mathbf{V}t - \frac{c(t - t_i)\mathbf{k}}{2\left(1 - \frac{V}{c}k_2\right)} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right), \\
 dy_2 &= \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}| dk_2}{1 - \frac{V}{c}k_2},
 \end{aligned}$$

из (18) получаем

$$P_{j,\gamma}(t) = \frac{l^2 \exp(-\mu c(t - t_i))}{\pi (t - t_i)} \int_{-1}^1 \frac{(S_j(\mathbf{k}_-) \sigma_d(\mathbf{y}_-) + S_j(\mathbf{k}_+) \sigma_d(\mathbf{y}_+)) dk_2}{|y_1| |\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i|^2 |\mathbf{V}t - \mathbf{y}| \left(1 - \frac{V}{c}k_2\right)}. \quad (19)$$

Так как $|\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i| + |\mathbf{V}t - \mathbf{y}| = c(t - t_i)$, то для всех \mathbf{y} , принадлежащих поверхности γ , выполнены неравенства $|\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i| \geq l, |\mathbf{V}t - \mathbf{y}| \geq l$, поэтому формула (19) справедлива только при $t > t_i + 2l/c$.

По аналогии с вышеприведенными для функции $P_{j,\gamma}(t)$ выкладками упростим выражение (10) для объемного рассеяния $P_{j,G}(t)$

$$\begin{aligned}
 P_{j,G}(t) &= \int_{\Omega} S_j(\mathbf{k}) \int_0^{d(\mathbf{V}t, -\mathbf{k}, t)} \exp(-\mu\tau) \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} \int_0^{d(\mathbf{V}t - \tau\mathbf{k}, -\mathbf{k}', t - \tau/c)} \exp(-\mu\tau') \times \\
 &\quad \times J\left(\mathbf{V}t - \tau\mathbf{k} - \tau'\mathbf{k}', \mathbf{k}', t - \frac{\tau + \tau'}{c}\right) d\tau' d\mathbf{k}' d\tau d\mathbf{k} = \\
 &= \int_{\Omega} S_j(\mathbf{k}) \int_0^{\infty} \chi_{G_t}(\mathbf{V}t - \tau\mathbf{k}) \exp(-\mu\tau) \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \chi_{G'}(\mathbf{V}t - \tau\mathbf{k} - \tau'\mathbf{k}') \exp(-\mu\tau') \times \\
 &\quad \times J\left(\mathbf{V}t - \tau\mathbf{k} - \tau'\mathbf{k}', \mathbf{k}', t - \frac{\tau + \tau'}{c}\right) d\tau' d\mathbf{k}' d\tau d\mathbf{k},
 \end{aligned}$$

где $\chi_{G_t}(\mathbf{r})$ — характеристическая функция области $G_t = G \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| \leq ct\}$ и $\chi_{G'}(\mathbf{r})$ — характеристическая функция области $G' = G \cap \{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}'| \leq ct - \tau\}$.

В результате двух последовательных замен $\mathbf{x} = \mathbf{V}t - \tau\mathbf{k}$ и $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \tau'\mathbf{k}'$ для всех

значений t из промежутка (t_i, t_{i+1}) , получаем

$$P_{j,G}(t) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{x}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|} \right) \chi_{G_t}(\mathbf{x}) \chi_{G'}(\mathbf{x}') \frac{\exp(-\mu(|\mathbf{V}t - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|))}{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \times \quad (20)$$

$$\times \delta \left(\mathbf{x}' - \mathbf{V} \left(t - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right) \right) \delta \left(t - t_i - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}.$$

Вычислим Якобиан перехода от переменных

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' - \mathbf{V} \left(t - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}'|}{c} \right),$$

$$t' = t - t_i - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}'|}{c},$$

к переменным \mathbf{x}', x_1 при $\mathbf{x}'' = 0, t' = 0$. Он равен

$$\frac{|x_1|(t - t_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{V}t_i| |\mathbf{V}t - \mathbf{x}|},$$

где

$$|\mathbf{V}t - \mathbf{x}| = \frac{V}{c}(Vt - x_2) + \frac{c(t - t_i)}{2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right),$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{V}t_i| = \frac{V}{c}(x_2 - Vt) + \frac{c(t - t_i)}{2} \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right),$$

$$x_1 = \pm \sqrt{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|^2 - (Vt - x_2)^2 - x_2^2}. \quad (21)$$

Уравнения (21) описывают две части эллипсоида (с фокусами в точках $\mathbf{V}t$ и $\mathbf{V}t_i$)

$$\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{V}t - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{V}t_i| = c(t - t_i) \},$$

в полупространствах $\mathbb{R}_+^3 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0 \}$ и $\mathbb{R}_-^3 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 < 0 \}$ соответственно.

Из представления (20) получаем

$$P_{j,G}(t) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \left(S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{x}_-}{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|} \right) + S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{x}_+}{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|} \right) \right) \times \quad (22)$$

$$\times \chi_{G_t}(\mathbf{x}) \chi_{G'}(\mathbf{V}t_i) \frac{\exp(-\mu(|\mathbf{V}t - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{V}t_i|))}{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}| |\mathbf{x} - \mathbf{V}t_i| |x_1|(t - t_i)} dx_2 dx_3.$$

Возвращаясь к интегрированию по сфере и учитывая соотношения $(0 \leq \varphi < 2\pi,$

$0 \leq \theta < \pi$)

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{V}t - \mathbf{k}|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|, \quad \mathbf{k} = (-\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, \cos \theta) = \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{x}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|}, \\ |\mathbf{V}t - \mathbf{x}| &= \frac{c(t - t_i)}{2\left(1 - \frac{V}{c}k_2\right)} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right), \\ |\mathbf{x} - \mathbf{V}t_i| &= c(t - t_i) \left(1 - \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{2\left(1 - \frac{V}{c}k_2\right)}\right), \\ dx_2 dx_3 &= \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|^2 \sin^2 \theta |\sin \varphi| d\varphi d\theta}{1 - \frac{V}{c} \cos \varphi \sin \theta} = \frac{|x_1| |\mathbf{V}t - \mathbf{x}| \sin \theta d\varphi d\theta}{1 - \frac{V}{c} \cos \varphi \sin \theta} = \frac{|x_1| |\mathbf{V}t - \mathbf{x}| d\mathbf{k}}{1 - \frac{V}{c} k_2}, \end{aligned}$$

из равенства (22) получаем

$$\begin{aligned} P_{j,G}(t) &= \frac{\sigma \exp(-\mu c(t - t_i))}{4\pi (t - t_i)} \int_{\Omega} \frac{S_j(\mathbf{k}) \chi_{G_t}(\mathbf{V}t - \mathbf{k}|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{V}t_i| \left(1 - \frac{V}{c}k_2\right)} d\mathbf{k} = \\ &= \frac{\sigma c \exp(-\mu c(t - t_i))}{2\pi c^2 (t - t_i)^2} \int_{\Omega} \frac{\chi_{G_t}(\mathbf{V}t - \mathbf{k}|\mathbf{V}t - \mathbf{x}|) S_j(\mathbf{k})}{1 - 2\frac{V}{c}k_2 + \frac{V^2}{c^2}} d\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{23}$$

Так как область G представляет собой верхнее полупространство ограниченное, плоскостью $x_3 = -l$, то интегрирование в соотношении (23) осуществляется на некоторой подобласти сферы Ω , определенной неравенством $k_3 |\mathbf{V}t - \mathbf{x}| < l$, или, что то же самое,

$$k_3 = \cos \theta < l/|\mathbf{V}t - \mathbf{x}| = \frac{2l \left(1 - \frac{V}{c}k_2\right)}{c(t - t_i) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}, \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \Omega.$$

Суммируя выражения (19), (23), мы находим аппроксимацию функции $P_j(t) = P_{j,\gamma}(t) + P_{j,G}(t)$ в приближении однократного рассеяния.

При проведении гидролокации морского дна с помощью автономных необитаемых подводных аппаратов или надводных судов, как правило, носитель антенны имеет небольшую скорость в сравнении со скоростью распространения акустического сигнала [4, 5]. При $V/c \ll 1$ подынтегральные выражения в (19), (23) существенно упрощаются, что позволяет легко определить интервалы изменения углов в (23): θ меняется от $\theta_i = \arccos\left(\frac{2l}{c(t - t_i)}\right)$ до π , а угол $\varphi \in [0, 2\pi)$. После таких упрощений

выражения (19), (23) принимают вид

$$\begin{aligned}
 P_{j,\gamma}(t) &= \frac{l^2 \exp(-\mu c(t-t_i))}{\pi(t-t_i)} \times \\
 &\times \int_0^{2\pi} \frac{\left(S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_-}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|} \right) \sigma_d(\mathbf{y}_-) + S_j \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}_+}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|} \right) \sigma_d(\mathbf{y}_+) \right) |\sin \varphi| \cos \theta_i d\varphi}{|y_1| |\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i|^2 |\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2} = \\
 &= \frac{l^2 \exp(-\mu c(t-t_i))}{\pi(t-t_i)} \int_0^{2\pi} \frac{S_j(\mathbf{k}(\varphi, \theta_i)) \sigma_d(\mathbf{y}(\varphi, \theta_i)) d\varphi}{|\mathbf{y} - \mathbf{V}t_i|^2 |\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2} = \\
 &= \frac{cl^2 \exp(-\mu c(t-t_i))}{2\pi (c(t-t_i)/2)^5} \int_0^{2\pi} S_j(\mathbf{k}(\varphi, \theta_i)) \sigma_d(\mathbf{y}(\varphi, \theta_i)) d\varphi. \tag{24}
 \end{aligned}$$

$$P_{j,G}(t) = \frac{\sigma c \exp(-\mu c(t-t_i))}{8\pi(c(t-t_i)/2)^2} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_i}^{\pi} S_j(\mathbf{k}(\theta, \varphi)) \sin \theta d\theta d\varphi. \tag{25}$$

Если диаграмма приемной антенны S_j является узконаправленной в плоскостях перпендикулярных донной поверхности $r_3 = -l$: $S_j(\mathbf{k}(\theta, \varphi)) = \delta(\varphi - \varphi_j)$, где $\delta(\varphi - \varphi_j)$ — дельта-функция Дирака, то формулы (24), (25) при $t \in (t_i + 2l/c, t_{i+1})$ принимают очень простой вид

$$\begin{aligned}
 P_{j,\gamma}(t) &= \frac{cl^2 \exp(-\mu c(t-t_i))}{2\pi (c(t-t_i)/2)^5} \sigma_d(\mathbf{y}(\varphi_j, \theta_i)), \quad \theta_i(t) = \arccos \left(\frac{2l}{c(t-t_i)} \right), \tag{26} \\
 P_{j,G}(t) &= \frac{\sigma c \exp(-\mu c(t-t_i))}{8\pi(c(t-t_i)/2)^2} \int_{\theta_i}^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{\sigma c \exp(-\mu c(t-t_i))}{8\pi(c(t-t_i)/2)^2} \left(1 + \frac{2l}{c(t-t_i)} \right).
 \end{aligned}$$

Отметим интересную особенность слагаемого $P_{j,G}(t)$ — оно не зависит от направления « j », в котором осуществляется прием сигнала. Нетрудно увидеть, что это свойство обусловлено однородностью коэффициента объемного рассеяния и в большинстве случаев сохраняется не только для узконаправленных приемных антенн.

Из (26) для определения функции σ_d при любом j получаем явную формулу

$$\begin{aligned}
 \sigma_{d,j}(\mathbf{y}) &= \left(P_j(t) - \frac{\sigma c \exp(-2\mu|\mathbf{y} - \mathbf{V}t|)}{8\pi|\mathbf{y} - \mathbf{V}t|^2} \left(1 + \frac{l}{|\mathbf{y} - \mathbf{V}t|} \right) \right) \times \\
 &\times \left(\frac{cl^2 \exp(-2\mu|\mathbf{y} - \mathbf{V}t|)}{2\pi |\mathbf{y} - \mathbf{V}t|^5} \right)^{-1}, \tag{27}
 \end{aligned}$$

где $t = (y_2 + y_1 \text{ctg} \varphi_j) / V$.

Очевидно, что при узкоколлимированной (по углу φ) диаграмме направленности для нахождения коэффициента донного рассеяния σ_d достаточно проводить измерения с помощью двух приемных антенн, расположенных по разным бортам носителя, например, когда $S_1 = \delta(\varphi - \pi/2)$ и $S_2 = \delta(\varphi - 3\pi/2)$. Этот случай соответствует широко распространённому способу построения гидролокационных изображений — последовательно полоса за полосой, перпендикулярно движению носителя антенн.

4. Численный алгоритм решения обратной задачи

При увеличении ширины диаграммы направленности расчет функции σ_d по формуле (27) приводит к росту погрешности. В частности, при восстановлении контрастных структур на гидролокационных изображениях имеет место так называемый эффект «размазывания», или дефокусировки, изображения (см. рис. 1, 2). Для устранения дефектов изображений применяют различные методы фокусировки, которые в математическом плане сводятся к решению интегрального уравнения первого рода. При дискретизации искомой функции решение интегрального уравнения эквивалентно решению системы линейных алгебраических уравнений, как правило, плохо обусловленной, что существенно затрудняет определение искомой функции [12].

В настоящем разделе мы опишем геометрический подход к решению обратной задачи. Для этого нам придется несколько видоизменить исходную формулировку Задачи 2. Отметим, что рассматриваемая задача в каком-то смысле близка к задачам малоракурсной томографии, для которых на сегодняшний день известно немало методов решения (см., например, [20]). Упомянем еще работы [21–23], в которых предложены оригинальные алгоритмы частичного определения границ неоднородностей при одно- и двухлучевом рентгеновском облучении неоднородных сред.

Представим плоскость γ в виде объединения двумерных выпуклых подобластей γ_i , $i = 1, \dots, p$, $\bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j = \emptyset$, $i \neq j$, и множества $\gamma_0 = \gamma \setminus \bigcup_{i=1}^p \gamma_i$. В каждой из областей γ_i функция $\sigma_d(\mathbf{y})$ постоянна, а в области γ_0 она принимает свое наименьшее значение. То есть коэффициент отражения внутри областей, описывающих неоднородности, больше, чем на остальной части донной поверхности. Задача состоит в определении подобластей γ_i , $i = 1, \dots, p$ по заданным значениям $P_j(t)$, $j = 1, \dots, q$ и известному значению функции σ_d в области γ_0 .

Для простоты изложения предположим, что диаграмма направленности $S_j(\mathbf{k}(\varphi, \theta))$ равна $1/2\beta$ при $\varphi \in (\varphi_j - \beta, \varphi_j + \beta)$ и нулю вне интервала $(\varphi_j - \beta, \varphi_j + \beta)$, причем носитель каждой из функций S_j сосредоточен либо в интервале $0 < \varphi < \pi/2 - \delta/2 < \varphi < \pi/2 + \delta/2$, либо в интервале $0 < 3\pi/2 - \delta/2 < \varphi < 3\pi/2 + \delta/2$, где $\delta < \pi$. Такие ограничения типичны при акустическом зондировании гидролокатором бокового обзора и позволяют восстанавливать функцию σ_d отдельно при $r_1 > 0$ и $r_1 < 0$ [8, 9]. Априорная информация о структуре коэффициента донного рассеяния и ограничения, налагаемые на диаграммы направленности приемных антенн, будут учтены при построении алгоритма определения контрастных структур.

Беря во внимание сформулированные ограничения, перепишем выражение для $P_{j,\gamma}$ в несколько ином виде:

$$P_{j,\gamma}(t) = \frac{cl^2 \exp(-2\mu|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|)}{2\pi |\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^5} \times \\ \times \frac{1}{2\beta} \int_{\varphi_j - \beta}^{\varphi_j + \beta} \sigma_d(\sin \varphi \sqrt{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2 - l^2}, Vt - \cos \varphi \sqrt{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2 - l^2}) d\varphi.$$

Так как в точке $t = (y_2 + y_1 \operatorname{ctg} \varphi_j)/V$ справедливо $|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2 = y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2$, то выражения для $P_{j,\gamma}(t)$ и $P_{j,G}(t)$ в этой точке можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 P_{j,\gamma}((y_2 + y_1 \operatorname{ctg} \varphi_j)/V) &= \frac{cl^2 \exp(-2\mu\sqrt{y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2})}{2\pi (y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2)^{5/2}} \times \\
 &\times \frac{1}{2\beta} \int_{\varphi_j - \beta}^{\varphi_j + \beta} \sigma_d(|y_1|\sin \varphi/|\sin \varphi_j|, y_2 + y_1 \operatorname{ctg} \varphi_j - |y_1|\cos \varphi/|\sin \varphi_j|) d\varphi = \\
 &= \frac{cl^2 \exp(-2\mu\sqrt{y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2})}{2\pi (y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2)^{5/2}} \times \\
 &\times \frac{1}{2\beta} \int_{\varphi_j - \beta}^{\varphi_j + \beta} \sigma_d(|y_1|\sin \varphi/|\sin \varphi_j|, y_2 + |y_1|(\cos \varphi_j - \cos \varphi)/|\sin \varphi_j|) d\varphi,
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 P_{j,G}((y_2 + y_1 \operatorname{ctg} \varphi_j)/V) &= \\
 &= \frac{c\sigma \exp(-2\mu\sqrt{y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2})}{8\pi (y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2)} \left(1 + \frac{l}{\sqrt{y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2}} \right).
 \end{aligned} \tag{29}$$

Обозначим через

$$\widehat{P}_{j,\gamma}(\mathbf{y}) \equiv P_{j,\gamma}((y_2 + y_1 \operatorname{ctg} \varphi_j)/V), \quad \widehat{P}_{j,G}(\mathbf{y}) \equiv P_{j,G}((y_2 + y_1 \operatorname{ctg} \varphi_j)/V),$$

где функции $P_{j,\gamma}$, $P_{j,G}$ определены в (28), (29), и схематично запишем алгоритм определения γ_i :

1. для каждого номера $j = 1, \dots, q$ вычисляются функции $\sigma_{d,j}(\mathbf{y})$ по формулам

$$\sigma_{d,j}(\mathbf{y}) = \left(\widehat{P}_j(\mathbf{y}) - \widehat{P}_{j,G}(\mathbf{y}) \right) \left(\frac{cl^2 \exp(-2\mu\sqrt{y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2})}{2\pi (y_1^2/\sin^2 \varphi_j + l^2)^{5/2}} \right)^{-1}, \tag{30}$$

2. строится функция $\widehat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ путем выбора минимального значения из набора $\sigma_{d,1}(\mathbf{y}), \dots, \sigma_{d,q}(\mathbf{y})$, то есть

$$\widehat{\sigma}_d(\mathbf{y}) = \min_{j=1, \dots, q} \sigma_{d,j}(\mathbf{y}).$$

При узкой диаграмме направленности приемных антенн все функции $\sigma_{d,j}(\mathbf{y})$ совпадают с $\sigma_d(\mathbf{y})$, следовательно, функция $\widehat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ в этом случае также совпадает с $\sigma_d(\mathbf{y})$. Как мы покажем далее на серии вычислительных экспериментов, при увеличении ширины диаграммы направленности графическое изображение функции $\widehat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ достаточно хорошо передает строение областей γ_i .

5. Численные эксперименты

Для демонстрации работоспособности алгоритма решения обратной задачи были проведены несколько серий экспериментов. Тестирование алгоритма осуществлялось на функции $\sigma_d(r)$, графическое представление которой при $r_1 > 0$ дано на

рис. 1а. Функция σ_d принимает значение 0.9 во всех включениях $\gamma_i, i=1, \dots, 7$

$$\gamma_1 = \{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, -l) : \sqrt{(y_1 - 62)^2 + (y_2 - 160)^2} < 6 \},$$

$$\gamma_2 = \{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, -l) : \sqrt{(y_1 - 25)^2 + (y_2 - 150)^2} < 4 \},$$

$$\gamma_3 = \{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, -l) : \sqrt{(y_1 - 29)^2 + (y_2 - 170)^2} < 4 \},$$

$$\gamma_4 = \{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, -l) : \sqrt{(y_1 - 70)^2 + (y_2 - 170)^2} < 4 \},$$

$$\gamma_5 = \{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, -l) : \sqrt{(y_1 - 25)^2 + (y_2 - 160)^2} < 4 \},$$

$$\gamma_6 = \{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, -l) : \sqrt{(y_1 - 57)^2 + (y_2 - 145)^2} < 5 \},$$

$$\gamma_7 = \{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, -l) : \sqrt{(y_1 - 40)^2 + ((y_2 - 160)/2.7)^2} < 8 \},$$

а в дополнении: γ_0 имеет значение 0.1. Остальные величины имели следующие характерные для акустического зондирования в океанической среде значения [5, 9, 11]: $l = 12\text{м}, \mu = 0.018\text{м}^{-1}, \sigma = 0.1\mu, t_{i+1} - t_i = 0.4\text{с}$ для любого $i, V = 1\text{м/с}, c = 1500\text{м/с}$.

На рис. 1b–1h представлены изображения функций $\sigma_{d,j}$, рассчитанные по формулам (30) в случае, когда углы $\varphi_j, j = 1, \dots, 7$ распределены равномерно в интервале $\pi/6 < \varphi_j < 5\pi/6$, то есть $\delta/2 = \pi/3$. При этом ширина каждой j -ой диаграммы направленности S_j составляла 5 градусов. На рисунке 2 представлены результаты аналогичного эксперимента с шириной диаграммы направленности 10 градусов.

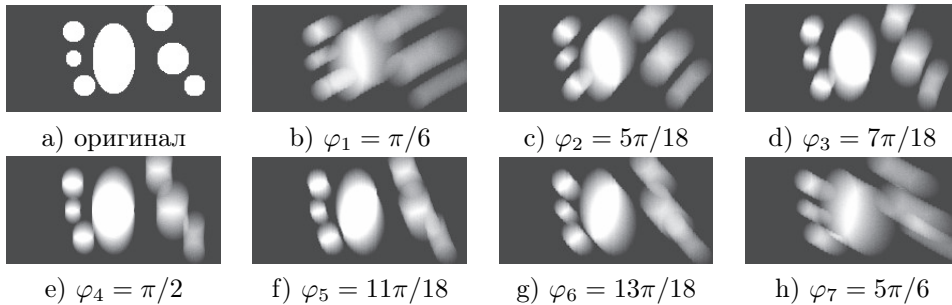


Рис. 1. Графическое представление коэффициента донного рассеяния $\sigma_d(\mathbf{y})$ (оригинал) и восстановленных функций $\sigma_{d,j}(\mathbf{y}), j = 1, \dots, 7$ при однолучевом зондировании с шириной диаграмм направленности 5 градусов.

На рисунке 3 представлено изображение функции $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$, построенное на основании применения алгоритма фокусировки путем обработки функций $\sigma_{d,j}$ при ширине диаграммы направленности 5 градусов. Как видно на рисунке, восстановленное изображение значительно лучше, чем при однолучевой реконструкции.

На рисунке 4 представлены результаты серии экспериментов, иллюстрирующие качество изображений морского дна в зависимости от ширины диаграммы направленности. В верхнем ряду (рис. 4а–4д) представлены результаты восстановления функции $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ при ширине диаграммы направленности $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 5^\circ, 10^\circ$. В нижнем ряду (рис. 4е–4h) для сравнения приведены изображения функции $\sigma_{d,4}(\mathbf{y})$, соответствующие реконструкции морского дна без фокусировки при однолучевом зондировании перпендикулярно движению носителя антенн $\varphi = \pi/2$.

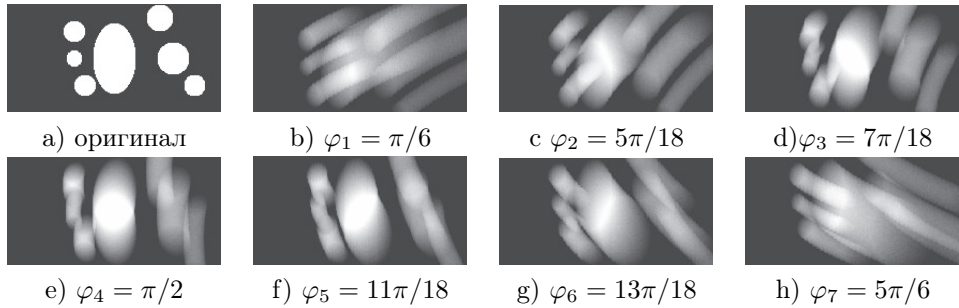


Рис. 2. Коэффициент донного рассеяния $\sigma_d(\mathbf{y})$ (оригинал) и функции $\sigma_{d,j}(\mathbf{y})$, при однолучевом зондировании с шириной диаграмм направленности 10 градусов.

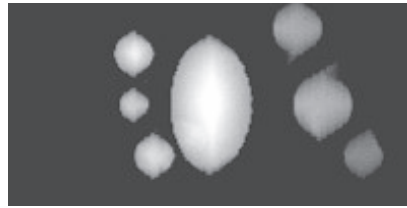


Рис. 3. Графическое представление функции $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ (обработанное изображение морского дна)

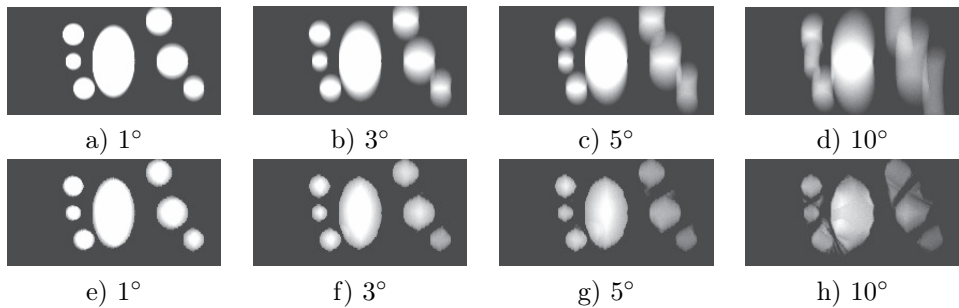


Рис. 4. На рисунках a,b,c,d приведено графическое изображение функции $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ при изменении ширины диаграммы направленности. На рисунках e,f,g,h изображена функция $\sigma_{d,4}(\mathbf{y})$ при аналогичных характеристиках диаграммы направленности.

В четвертом эксперименте демонстрируется влияние числа ракурсов зондирования q на качество реконструкции. На рис. 5 приведены изображения функции $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ при $q = 1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 25$. На рис. 5а приведена реконструкция морского дна при однолучевом зондировании $q = 1$ — в этом случае фокусировка почти полностью отсутствует. Анализ других изображений показывает, что с увеличением количества приемных антенн повышается и качество восстанавливаемых изображений. Однако, начиная с $q = 15$ изображения практически не изменяются.

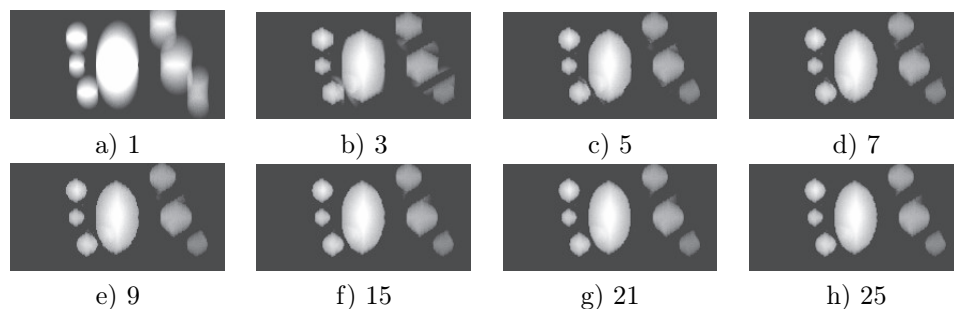


Рис. 5. Функция $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ при различных значениях параметра q .

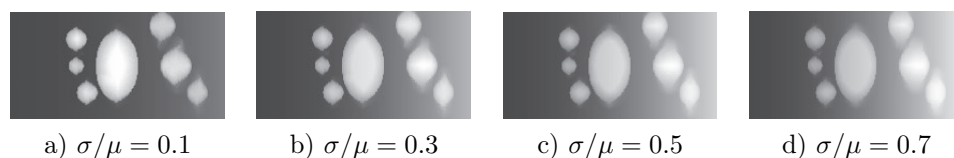


Рис. 6. Функция $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ при различном уровне объемного рассеяния σ/μ .

В заключительном эксперименте анализируется влияние объемного рассеяния на качество реконструкции донных объектов. Чтобы проиллюстрировать влияние объемного рассеяния при расчете функций $\sigma_{d,j}$, в формуле (30) мы полагали $\hat{P}_{j,G}(\mathbf{y})=0$ для всех ракурсов зондирования j . Анализ полученных изображений показывает, что качество фокусировки падает незначительно. Тем не менее количественные значения функций $\hat{\sigma}_d(\mathbf{y})$ и σ_d отличаются достаточно сильно, и эта разница растет с увеличением дальности зондирования.

6. Заключение

Исследована обратная задача для нестационарного уравнения переноса излучения применительно к проблеме акустического зондирования морского дна многолучевым гидролокатором бокового обзора. В приближении однократного рассеяния и на ряде априорных предположений о коэффициенте донного рассеяния предложен новый способ решения обратной задачи, продемонстрировано влияние разного числа ракурсов зондирования, ширины диаграммы приемных антенн и доли объемного рассеяния на качество реконструкции морского дна.

Список литературы

- [1] Р. Д. Урик, *Основы гидроакустики*, Судостроение, Л., 1978.
- [2] А. Ishimaru, *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, Academic Press, New York, 1978.
- [3] А. В. Богородский, Г. В. Яковлев, Е. А. Корепин, А. К. Должиков, *Гидроакустическая техника исследования и освоения океана*, Гидрометеиздат, Л., 1984.

- [4] G. Griffiths, *Technology and Applications of Autonomous Underwater Vehicles*, CRC Press, London, 2002.
- [5] Ю. В. Матвиенко, В. А. Воронин, С. П. Тарасов, А. В. Скняря, Е. В. Тутынин, “Пути совершенствования гидроакустических технологий обследования морского дна с использованием автономных необитаемых подводных аппаратов”, *Подводные исследования и робототехника*, **8**:2, (2009), 4–15.
- [6] J. A. Turner, R. L. Weaver, “Radiative transfer of ultrasound”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **96**:6, (1994), 3654–3674.
- [7] J. E. Quijano, L. M. Zurk, “Radiative transfer theory applied to ocean bottom modeling”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **126**:4, (2009), 1711–1723.
- [8] И. В. Прохоров, В. В. Золотарев, И. Б. Агафонов, “Задача акустического зондирования во флуктуирующем океане”, *Дальневосточный математический журнал*, **11**:1, (2011), 76–87.
- [9] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “Исследование задачи акустического зондирования морского дна методами теории переноса излучения”, *Акустический журнал*, **61**:3, (2015), 400–408.
- [10] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, В. А. Кан, “Об одной задаче определения рельефа дна флуктуирующего океана”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **18**:2, (2015), 99–110.
- [11] Е. О. Kovalenko, A. A. Sushchenko, I. V. Prokhorov, “Processing of the information from side-scan sonar”, *Proceedings of SPIE*, **10035**, (2016), 100352C.
- [12] Е. О. Kovalenko, A. A. Sushchenko, V. A. Kan, “Focusing of sonar images as an inverse problem for radiative transfer equation”, *Proceedings of SPIE*, **10833**, (2018), 108336D.
- [13] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, А. Ким, “Начально-краевая задача для уравнения переноса излучения с диффузными условиями сопряжения”, *Сибирский журнал индустриальной математики*, **20**:1, (2017), 75–85.
- [14] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “Задача Коши для уравнения переноса излучения в неограниченной среде”, *Дальневосточный математический журнал*, **18**:1, (2018), 101–111.
- [15] A. A. Amosov, “Initial-Boundary Value Problem for the Non-Stationary Radiative Transfer Equation with Fresnel Reflection and Refraction Conditions”, *Journal of Mathematical Sciences*, **231**:3, (2018), 279–337.
- [16] A. A. Amosov, “Initial-Boundary Value Problem for the Non-stationary Radiative Transfer Equation with Diffuse Reflection and Refraction Conditions”, *Journal of Mathematical Sciences*, **235**:2, (2018), 117–137.
- [17] A. A. Amosov, “Nonstationary radiation transfer through a multilayered medium with reflection and refraction conditions”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**:17, (2018), 8115–8135.
- [18] И. В. Прохоров, “Задача Коши для уравнения переноса излучения с френелевскими и ламбертовскими условиями сопряжения”, *Матем. заметки*, **105**:1, (2019), 95–107.
- [19] A. Kim, I. V. Prokhorov, “Initial-boundary value problem for a radiative transfer equation with generalized matching conditions”, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **16**, (2019), 1036–1056.
- [20] О. В. Филонин, *Малоракурсная томография*, СНЦ РАН, Самара, 2006.
- [21] D. S. Anikonov, V. G. Nazarov, I. V. Prokhorov, “Algorithm of finding a body projection within an absorbing and scattering medium”, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, **18**:8, (2011), 885–893.
- [22] Д. С. Аниконов, В. Г. Назаров, “Задача двуракурсной томографии”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **52**:3, (2012), 372–378.

- [23] Д. С. Аниконов, В. Г. Назаров, И. В. Прохоров, “Задача одноракурсного зондирования неизвестной среды”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **14:2**, (2011), 21–27.

Поступила в редакцию
3 октября 2019 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке
ПФИ ДВО РАН “Дальний Восток” (проект
№ 18-5-050)

Kovalenko E. O., Prokhorov I. V. Determination of the coefficient of bottom scattering during multi-beam sounding of the ocean. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2019. V. 19. No 2. P. 206–222.

ABSTRACT

Mathematical problems of constructing sonar images of the seabed according to measurements of a multi-beam side-scan sonar are considered. In the framework of the model based on the non-stationary equation of radiation transfer, the inverse problem of finding the bottom scattering coefficient is investigated. A new method is proposed for solving the inverse problem under the assumption of single scattering and pulsed sounding mode. A numerical analysis of the quality of the images of the seabed is carried out depending on the number of sensing angles, the width of the radiation pattern of the receiving antennas and the level of volume scattering in the medium.

Key words: radiative transfer equation, inverse problem, bottom and volume scattering, multi-beam sounding.