*Дальневосточный математический журнал.* 2020. Т. 20. № 1. С. 3–8

УДК 511.336, 511.335
MSC2010 11L05, 11D45

© М. О. Авдеева[1]

# Обобщенная формула следа Петерсона для конгруэнцподгупп

В работе доказывается обобщение формулы следа Петерсона для голоморфных параболических форм положительного чётного веса относительно конгруэнцподгупп $\Gamma_0(N)$ с характером Дирихле по модулю $N$.

Ключевые слова: *автоморфные формы, формулы следа, операторы Гекке, суммы Клостермана.*

Пусть $q$ и $N$ — натуральные с $q \equiv 0 (\mod N)$, $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ — характер Дирихле по модулю $N$,

$$\delta_q(n) = \frac{1}{q} \sum_{a \,(\mathrm{mod}\ q)} e^{2\pi i \frac{na}{q}} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ q) \\ 0, & \text{если} \quad n \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ q). \end{cases}$$

Положим для целых $m, n, d$

$$S_\psi(m, n, d; q) = \sum_{a, b \,(\mathrm{mod}\ q)} \psi(a) \delta_q(ab - d) e^{2\pi i \frac{ma + nb}{q}}.$$

При $d = 1$

$$S_\psi(m, n; q) = S_\psi(m, n, 1; q) = \sum_{a \,(\mathrm{mod}\ q)}^{*} \psi(a) e^{2\pi i \frac{ma + n\bar{a}}{q}}$$

— сумма Клостермана, в которой суммирование проводится по всем классам вычетов с НОД$(a, q) = 1$ и $a\bar{a} \equiv 1 (\mod q)$. При $N = 1$ характер $\psi$ тождественно равен 1, и в этом случае будем писать

$$S(m, n, d; q) = \sum_{a, b \,(\mathrm{mod}\ q)} \delta_q(ab - d) e^{2\pi i \frac{ma + nb}{q}}, \qquad S(m, n; q) = S(m, n, 1; q).$$

Пусть НОД$(N, d) = 1$. Тогда для $ab - d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ q)$ выполняется сравнение $ab \equiv d (\mod N)$ и $\psi(a) = \psi(ab)\bar{\psi}(b) = \psi(d)\bar{\psi}(b)$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: avdeeva@iam.khv.ru

**Предложение 1.** *Пусть НОД$(N,d)=1$. Тогда*

$$S_\psi(m,n,d;q)=\psi(d)S_{\bar\psi}(n,m,d;q).$$

**Предложение 2.** *Для любых целых $m,n,d$ выполняется равенство*

$$S_\psi(m,n,d;q)=S_\psi(m,d,n;q).$$

Доказательство. С помощью представления $\delta_q(n)$ через тригонометрическую сумму находим

$$S_\psi(m,n,d;q)=\frac{1}{q}\sum_{a,b,c\,(\mathrm{mod}\ q)}\psi(a)e^{2\pi i\frac{ma+nb-c(ab-d)}{q}}=$$
$$=\sum_{a,c\,(\mathrm{mod}\ q)}\psi(a)\delta_q(ac-n)e^{2\pi i\frac{ma+dc}{q}}=S_\psi(m,d,n;q).$$

□

Из предложений 1 и 2 немедленно следует еще одно.

**Предложение 3.** *Для любых целых $m,n,d$ сумма $S(m,n,d;q)$ не меняется при их перестановке.*

Так как из сравнения $ab\equiv d(\mod q)$ с НОД$(a,d)=1$ следует, что $b\equiv d\bar a(\mod q)$, то справедливо следующее утверждение.

**Предложение 4.** *Для любых целых $m,n,d$*

$$\sum_{a\,(\mathrm{mod}\ q)}^{*}\psi(a)\sum_{b\,(\mathrm{mod}\ q)}\delta_q(ab-d)\,e^{2\pi i\frac{ma+nb}{q}}=S_\psi(m,n,d;q).$$

В работе [1] было доказано тождество

$$S(m,n,d;q)=\sum_{l\backslash \text{НОД}(q,d,n)} l\,S(m,nd/l^2;q/l).$$

Принимая во внимание предложение 3, это тождество можно переписать в виде

$$S(m,n,d;q)=\sum_{l\backslash \text{НОД}(q,m,n)} l\,S(d,mn/l^2;q/l).$$

При $d=1$ получим тождество

$$S(m,n;q)=\sum_{l\backslash \text{НОД}(q,m,n)} l\,S(1,mn/l^2;q/l),$$

которое без доказательства было опубликовано в работе [2] и переоткрыто (с доказательством) в [3]. Практически повторяя рассуждение из [1], докажем следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Для любых целых $m,n,d$*

$$S_\psi(m,n,d;q)=\sum_{l\backslash \textit{НОД}(n,d,q)}\psi(l)l\,S_\psi(m,nd/l^2;q/l).$$

Доказательство. Заметим, что

$$S_\psi(m,n,d;q)=\sum_{l\backslash q}\ \sum_{\substack{a\,(\mathrm{mod}\ q)\\ \text{НОД}(a,q)=l}}\psi(a)\sum_{b\,(\mathrm{mod}\ q)}\delta_q(ab-d)\,e^{2\pi i\frac{ma+nb}{q}}=$$

$$=\sum_{l\backslash q}\ \sideset{}{^*}\sum_{a_0\,(\mathrm{mod}\ q/l)}\psi(la_0)e^{2\pi i\frac{ma_0}{q/l}}\cdot\sum_{b\,(\mathrm{mod}\ q)}\delta_q(la_0b-d)\,e^{2\pi i\frac{nb}{q}}=$$

$$=\sum_{l\backslash \text{НОД}(d,q)}\psi(l)\ \sideset{}{^*}\sum_{a_0\,(\mathrm{mod}\ q/l)}\psi(a_0)e^{2\pi i\frac{ma_0}{q/l}}\cdot\sum_{b\,(\mathrm{mod}\ q)}\delta_{q/l}(a_0b-d/l)\,e^{2\pi i\frac{nb}{q}}.$$

Так как числа

$$b_0+(q/l)b_1,\qquad 0\leqslant b_0<q/l,\qquad 0\leqslant b_1<l$$

пробегают полную систему вычетов по модулю $q$, то внутренняя сумма равна

$$\sum_{0\leqslant b_0<q/l}\delta_{q/l}(a_0b_0-d/l)e^{2\pi i\frac{nb_0}{q}}\sum_{b_1\ (\mathrm{mod}\ l)}e^{2\pi i\frac{nb_1}{l}}=l\delta_l(n)\sum_{b_0\ (\mathrm{mod}\ q/l)}e^{2\pi i\frac{(n/l)b_0}{q/l}}\delta_{q/l}(a_0b_0-d/l).$$

Отсюда с помощью предложения 4 находим

$$S_\psi(m,n,d;q)=\sum_{l\backslash \text{НОД}(n,d,q)}\psi(l)l\ \sideset{}{^*}\sum_{a_0\ (\mathrm{mod}\ q/l)}\psi(a_0)\sum_{b_0\ (\mathrm{mod}\ q/l)}\delta_{q/l}(a_0b_0-d/l)e^{2\pi i\frac{ma_0+(n/l)b_0}{l}}=$$

$$=\sum_{l\backslash \text{НОД}(n,d,q)}\psi(l)lS_\psi(m,nd/l^2;q/l).$$

Теорема 1 полностью доказана. □

*Замечание.* В несколько ином виде тождество теоремы 1 было доказано в [4]. В настоящем более удобном для приложений виде оно приведено в диссертации [5].

Как обычно, для натурального $N$

$$\Gamma_0(N)=\left\{M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b,c,d\in\mathbb{Z};\ ad-bc=1;\ c\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ N)\right\}$$

— конгруэнцподгруппа уровня $N$ мультипликативной модулярной группы $\Gamma{=}\Gamma_0(1)$. Элементы $\Gamma$ действуют на верхней полуплоскости

$$\mathbb{H}=\big\{z=x+iy\ \big|\ x,y\in\mathbb{R};\ y>0\big\}$$

посредством дробно-линейных преобразований:

$$z\to M(z)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}(z)=\frac{az+b}{cz+d}.$$

Так как матрицы $M$ и $-M$ действуют на $\mathbb{H}$ одинаково, то удобнее работать с факторгруппой

$$\overline{\Gamma}_0(N)=\Gamma_0(N)\Big/\left\{\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

(матрицы $M$ и $-M$ отождествляются).

Следуя монографии [6, глава 14], обозначим через $S_{2k}^{(\psi)}(\overline{\Gamma}_0(N))$ линейное пространство голоморфных на $\mathbb{H}$ параболических форм веса $2k$ ($k$ — натуральное), для которых

$$(cz+d)^{-2k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \psi(d) f(z) \qquad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N).$$

Здесь $\psi\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ —характер Дирихле по модулю $N$. Эти пространства конечномерны, и скалярное произведение Петерсона

$$\langle f, \mathrm{g}\rangle_{2k} = \iint\limits_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{\mathrm{g}(z)} y^{2k-2}\, dx\, dy$$

определяет на $S_{2k}(\overline{\Gamma}_0(N))$ структуру эрмитова пространства.

Для любой формы $f$ из $S_{2k}^{(\psi)}(\overline{\Gamma}_0(N))$ справедливо разложение в ряд Фурье

$$f(z) = \sum_{n\,=\,1}^{\infty} \rho_f(n) n^{k-1/2} e^{2\pi i n z}. \tag{1}$$

На пространстве $S_{2k}^{(\psi)}(\overline{\Gamma}_0(N))$ для любого натурального $n$ действуют операторы Гекке по правилу

$$T(n)f(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{n_1 n_2\,=\,n} \psi(n_1) \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^k \cdot \sum_{a\,=\,1}^{n_2} f\left(\frac{n_1 z + a}{n_2}\right).$$

Для любых натуральных $m$ и $n$ выполняется тождество

$$T(m)T(n) = \sum_{l\backslash \text{НОД}(m,n)} \psi(l) T\left(\frac{mn}{l^2}\right), \tag{2}$$

из которого следует, что операторы Гекке коммутируют между собой. В соответствии с разложением (1)

$$T(n)f(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{n_1 n_2\,=\,n} \psi(n_1) \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^k \cdot \sum_{m\,=\,1}^{\infty} \rho_f(m) m^{k-1/2} e^{2\pi i \frac{n_1 m z}{n_2}} \cdot \sum_{a\,=\,1}^{n_2} e^{2\pi i \frac{am}{n_2}}.$$

Так как внутренняя линейная сумма равна $n_2 \delta_{n_2}(m)$, то правая часть равна

$$\sum_{n_1 n_2\,=\,n} \psi(n_1) \sum_{m_1\,=\,1}^{\infty} n_1^{k-1/2} n_2^{-k+1/2} \rho_f(n_2 m_1)(n_2 m_1)^{k-1/2} e^{2\pi i n_1 m_1 z} =$$

$$= \sum_{m_1\,=\,1}^{\infty} \sum_{n_1 n_2\,=\,m} \psi(n_1) \rho_f(n_2 m_1)(n_1 m_1)^{k-1/2} e^{2\pi i n_1 m_1 z}.$$

Положив $n=n_1 m_1$, с помощью равенства $n_2 m_1 = nm/n_1^2$ находим

$$T(n)f(z) = \sum_{m\,=\,1}^{\infty} \left( \sum_{l\backslash \text{НОД}(m,n)} \psi(l) \rho_f\left(\frac{nm}{l^2}\right) m^{k-1/2} e^{2\pi i m z} \right). \tag{3}$$

Согласно общей теории (см. [6]) в $S_{2k}^{(\psi)}(\overline{\Gamma}_0(N))$ можно выбрать ортонормированный базис $\mathscr{B}_{2k}^{(\psi)}(N)$ относительно скалярного произведения Петерсона, состоящий из параболических форм $f$, для которых

$$T(n)f = \lambda_f(n)f, \qquad \text{НОД}(n, N) = 1. \tag{4}$$

При этом для всех таких $n$

$$\rho_f(n) = \lambda_f(n)\rho_f(1), \qquad \lambda_f(n) = \psi(n)\overline{\lambda_f(n)}. \tag{5}$$

Из (3), (4) и (5) следует, что для любого натурального $m$ и НОД$(n,N)=1$

$$\lambda_f(n)\rho_f(m) = \sum_{l\backslash \text{НОД}(m,n)} \psi(l)\rho_f\left(nml^{-2}\right). \tag{6}$$

Классическая формула Петерсона (см. [6]) устанавливает связь между суммами Клостермана и коэффициентами Фурье параболических форм из $\mathscr{B}_{2k}^{(\psi)}(N)$ в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}} \sum_{f\in\mathscr{B}_{2k}^{(\psi)}(N)} \overline{\rho_f(m)}\rho_f(n) = \\ &= \delta_{m,n} + 2\pi(-1)^k \sum_{q\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ N)} \frac{1}{q} S_\psi(m,n;q) J_{2k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{q}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $J_{2k-1}$ — функция Бесселя, которая определяется абсолютно сходящимся рядом

$$J_{2k-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/2)^{2k-1+2n}}{\Gamma(n+2k)\Gamma(n+1)}.$$

Мы обобщим (7) в следующем виде.

**Теорема 2.** *Для любых натуральных $m, n$ и $d$*

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}} \sum_{f\in\mathscr{B}_{2k}^{(\psi)}(N)} \overline{\rho_f(m)} \sum_{l\backslash \text{НОД}(n,d)} \psi(l)\rho_f\left(\frac{nd}{l^2}\right) = \\ &= \sum_{l\backslash \text{НОД}(n,d)} \psi(l)\delta_{m,nd/l^2} + (-1)^k \sum_{q\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ N)} \frac{1}{q} S_\psi(m,n;d;q) J_{2k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mnd}}{q}\right). \end{aligned}$$

Доказательство. С помощью теоремы 1 для последней суммы получаем представление

$$\begin{aligned} &(-1)^k \sum_{q\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ N)} \frac{1}{q} \sum_{l\backslash \text{НОД}(q,d,n)} \psi(l) l S_\psi\left(m, \frac{nd}{l^2}; \frac{q}{l}\right) J_{2k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mnd}}{q}\right) = \\ &= (-1)^k \sum_{l\backslash \text{НОД}(d,n)} \psi(l) \sum_{q_1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ N)} \frac{1}{q_1} S_\psi\left(m, \frac{nd}{l^2}; q_1\right) J_{2k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mnd/l^2}}{q_1}\right). \end{aligned}$$

Осталось только воспользоваться равенством (7). Теорема 2 доказана. □

С помощью соотношения мультипликативности (6) из теоремы 2 получаем еще одно утверждение.

**Теорема 3.** *Пусть НОД$(n, N) = 1$. Тогда для любых натуральных $m$ и $d$ левая часть теоремы 2 совпадает с*

$$\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}} \sum_{f \in \mathscr{B}_{2k}^{(\psi)}(N)} \overline{\rho_f(m)} \lambda_f(n)\ \rho_f(d).$$

Автор благодарит Быковского В. А. за постановку задачи и внимание.

## Список литературы


[1] D. R. Heath-Brown, "The Fourth Power Moment of the Riemann Zeta Function", *Proc. London Math. Soc.*, **38**:3, (1979), 385–422.

[2] A. Selberg, "Über die Fourierkoeffizienten elliptischen Modulformen negativer Dimension", *Neuvième Congrès Math. Scandinaves*, Helsingfors, 1938, 320–322.

[3] Н. В. Кузнецов, "Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Суммы сумм Клоостермана", *Матем. сб.*, **III (153)**:3, (1980), 334–383.

[4] А. И. Виноградов, "Укороченное уравнение для сверток", *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **211**, (1994), 104–119.

[5] J. A. Andersson, *Summation formulae and zeta functions*, Doctoral Dissertation, Department of mathematics Stockholm University, 2006, 107 pp.

[6] Х. Иванец, Э. Ковальский, *Аналитическая теория чисел*, МЦНМО, М, 2014, 715 с.


Поступила в редакцию
19 мая 2020 г.

*Avdeeva M. O.* The generalized Petersson trace formula for congruence subgroups. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2020. V. 20. No 1. P. 3–8.

ABSTRACT

In this paper, a generalization of the Petersson trace formula for holomorphic parabolic forms with positive even weight with respect to congruence subgroup $\Gamma_0(N)$ of the Dirichlet character modulo $N$ is proved

Key words: *automorphic forms, trace formulas, Hecke operators, Kloosterman sums.*