Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20. № 1. С. 9–14

УДК 511.336, 511.335
MSC2010 11L05, 11D45

© М. О. Авдеева[1], Н. В. Горбатюк[1], Н. А. Шульга[1,2]

О суммах Гаусса и Клостермана

В работе вычисляются средние по параметрам сумм Клостермана, в которых также участвуют характеры Дирихле. Они возникают при построении арифметических формул следа в теории автоморфных форм.

Ключевые слова: *характеры Дирихле, суммы Гаусса, суммы Клостермана.*

Введение

Начиная с основополагающих работ Сельберга, Эйхлера и других авторов, формулы следа являются мощным инструментом при изучении многих задач теории чисел. При этом возникает необходимость вычисления средних по параметрам сумм Клостермана, в которых участвуют характеры Дирихле. В настоящей заметке мы доказываем ряд тождеств на эту тему, которые в неявной форме присутствуют в работых по аналитическим свойствам рядов Гекке.

Авторы благодарны Быковскому В. А. за постановку задач на эту тему.

Для натурального q и целого n положим

$$\delta_q(n) = \frac{1}{q} \sum_{a \,(\bmod q)} e^{2\pi i \frac{na}{q}} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n \equiv 0 \pmod q; \\ 0, & \text{если} \quad n \not\equiv 0 \pmod q). \end{cases} \tag{1}$$

Далее, для целых m, n и d

$$S(m,n,d;q) = \sum_{a,b \,(\bmod q)} \delta_q(ab-d) e^{2\pi i \frac{ma+nb}{q}}.$$

При $d = 1$

$$S(m,n;q) = S(m,n,1;q) = \sum_{a \,(\bmod q)}{}^{*} e^{2\pi i \frac{ma+n\overline{a}}{q}}$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54.
[2] Является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».
Электронная почта: avdeeva@iam.khv.ru (М. О. Авдеева), nik_gorbatyuk@mail.ru (Н. В. Горбатюк), nikita1279@yandex.ru (Н. А. Шульга).

— сумма Клостермана, в которой НОД$(a,q)=1$ и $a\overline{a}\equiv 1\,(\bmod q)$. Из определений непосредственно следует, что

$$S(m,n,d;q)=S(n,m,d;q) \tag{2}$$

и

$$S(m,n,d;q)=\frac{1}{q}\sum_{a,b,c\,(\bmod q)} e^{2\pi i\frac{ma+nb+dc-abc}{q}}.$$

Поэтому

$$S(m,n,d;q)=S(m,d,n;q)=S(d,n,m;q). \tag{3}$$

Следующее утверждение впервые было опубликовано в [1], и мы для полноты изложения приведем его доказательство из этой работы.

Лемма 1. *Пусть q — натуральное. Тогда для любых целых m,n и d*

$$S(m,n,d;q)=\sum_{l\backslash НОД(n,d,q)} l\,S(m,nd/l^2;q/l).$$

Доказательство. Действуя в соответствии с определениями, получим

$$S(m,n,d;q)=\sum_{l\backslash q}\sum_{\substack{a\,(\bmod q)\\ \text{НОД}(a,q)=l}} e^{2\pi i\frac{ma}{q}}\sum_{b\,(\bmod q)}\delta_q(ab-d)e^{2\pi i\frac{nb}{q}}=$$
$$=\sum_{l\backslash \text{НОД}(d,q)}\sum_{a_0\,(\bmod q/l)}{}^{*} e^{2\pi i\frac{ma_0}{q/l}}\sum_{b\,(\bmod q)}\delta_{q/l}\,(a_0b-d/l)e^{2\pi i\frac{nb}{q}}.$$

Так как целые числа

$$b=b_0+(q/l)b_1,\qquad 0\leqslant b_0<q/l,\qquad 0\leqslant b_1<l$$

пробегают полную систему вычетов по модулю q, то внутренняя сумма равна

$$\sum_{0\leqslant b_0<q/l}\delta_{q/l}\,(a_0b_0-d/l)e^{2\pi i\,\frac{nb_0}{q}}\sum_{b_1\,(\bmod l)} e^{2\pi i\,\frac{nb_1}{l}}=l\,\delta_l\,(n)\sum_{b_0\,(\bmod q/l)}\delta_{q/l}\,(a_0b_0-d/l).$$

Последняя сумма состоит из одного слагаемого с $b_0\equiv(d/l)\overline{a_0}\,(\bmod q/l)$, и мы получаем утверждение леммы 1. □

При $d=1$ с помощью равенств (2) и (3) получаем еще одно тождество.

Лемма 2. *Для любых целых m и n*

$$S(m,n;q)=\sum_{l\backslash НОД(m,n,q)} l\,S(1,mn/l^2;q/l).$$

Тождество леммы без доказательства впервые было опубликовано в [2] и переоткрыто в [3] с доказательством, основанным на соотношении мультипликативности для операторов Гекке из теории автоморфных функций. Позднее, в [4] было предложено его элементарное доказательство, отличающееся от доказательства леммы 1.

В работе [5] была доказана оценка

$$|S(m,n,d;q)| \leqslant \tau(q')\,\tau(q)\,q^{\frac{1}{2}}\,\text{НОД}^{\frac{1}{2}}(mn,md,nd,q)$$

с $q'=\text{НОД}(m,n,d,q)$, где $\tau(q)$ — число делителей натурального числа q. При $d=1$ она превращается в оценку

$$|S(m,n;q)| \leqslant \tau(q)\,q^{\frac{1}{2}}\,\text{НОД}^{\frac{1}{2}}(m,n,q)$$

из работы [6].

Начиная с этого момента $\chi:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ — примитивный характер Дирихле по модулю N. При этом сопряженный характер $\overline{\chi}$ также примитивен. По поводу определения и приводимых далее фактов см., например, монографию [7].

По определению

$$G(\chi) = \sum_{n \,(\bmod\, N)} \chi(n) e^{2\pi i \frac{n}{N}}$$

— сумма Гаусса, для которой

$$\overline{G(\chi)} = \chi(-1)G(\overline{\chi}), \quad |G(\chi)|^2 = G(\chi)\overline{G(\chi)} = N$$

и для любого целого m

$$\sum_{n \,(\bmod\, N)} \chi(n) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} = \overline{\chi}(m)G(\chi). \tag{4}$$

Если N_1 — делитель N, отличный от N, то для любого целого b

$$\sum_{a \,(\bmod\, N/N_1)} \chi(N_1 a + b) = 0. \tag{5}$$

Лемма 3. *Пусть q — натуральное, а n и d — целые. Тогда*

$$\sum_{m \,(\bmod\, q)} S(m,n,d;q) = q^2 \delta_q(n)\delta_q(d).$$

Доказательство. С помощью тождества (1) преобразуем левую часть к виду

$$\sum_{a,b \,(\bmod\, q)} \delta_q(ab-d) e^{2\pi i \frac{nb}{q}} \sum_{m \,(\bmod\, q)} e^{2\pi i \frac{ma}{q}} =$$

$$= q \sum_{a,b \,(\bmod\, q)} \delta_q(a)\delta_q(ab-d) e^{2\pi i \frac{nb}{q}} = q \sum_{b \,(\bmod\, q)} \delta_q(d) e^{2\pi i \frac{nb}{q}} = q^2 \delta_q(n)\delta_q(d).$$

Лемма 3 доказана. □

Теорема 1. *Пусть $q \equiv 0 \pmod{N}$. Тогда для любого целого b*

$$\sum_{n \,(\bmod\, q)} \chi(n)\, e^{2\pi i \frac{bn}{q}} = (q/N)\,\delta_{q/N}(b)\,\overline{\chi}(b/(q/N))\,G(\chi).$$

Доказательство. Опираясь на тождества (1) и (4), для левой части получаем цепочку равенств

$$\sum_{0\leqslant n<N}\sum_{0\leqslant n_1<q/N}\chi(n+Nn_1)\,e^{2\pi i\frac{b(n+Nn_1)}{q}}=\sum_{0\leqslant n<N}\chi(n)\,e^{2\pi i\frac{bn}{q}}\sum_{0\leqslant n_1<q/N}e^{2\pi i\frac{bn_1}{q/N}}=$$
$$=(q/N)\,\delta_{q/N}(b)\sum_{0\leqslant n<N}\chi(n)\,e^{2\pi i\frac{(b/(q/N))n}{N}}=(q/N)\,\delta_{q/N}(b)\,\overline{\chi}(b/(q/N))\,G(\chi).$$

Теорема 1 доказана. □

Теорема 2. *Пусть* $q\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ N)$. *Тогда для любых целых* m *и* d

$$\sum_{n\ (\mathrm{mod}\ q)}\chi(n)\,S(m,n,d;q)=(q/N)^2\,G^2(\chi)\,\delta_{q/N}(m)\,\delta_{q/N}(d)\,\overline{\chi}(m/(q/N))\,\overline{\chi}(d/(q/N)).$$

Доказательство. Воспользовавшись теоремой 1, для левой части получим последовательность равенств

$$\sum_{a,b\ (\mathrm{mod}\ q)}\delta_q(ab-d)e^{2\pi i\frac{ma}{q}}\sum_{n\ (\mathrm{mod}\ q)}\chi(n)e^{2\pi i\frac{bn}{q}}=$$
$$=(q/N)\,G(\chi)\sum_{a,b\ (\mathrm{mod}\ q)}\delta_q(ab-d)\,e^{2\pi i\frac{ma}{q}}\,\delta_{q/N}(b)\,\overline{\chi}(b/(q/N))=$$
$$=(q/N)\,G(\chi)\delta_{q/N}(d)\sum_{\substack{a\ (\mathrm{mod}\ q)\\ b_1\ (\mathrm{mod}\ N)}}\delta_N(ab_1-d/(q/N))\,e^{2\pi i\frac{ma}{q}}\,\overline{\chi}(b_1).$$

Представляя a в виде

$$a=a_1+Na_2\quad(0\leqslant a_1<N,\ 0\leqslant a_2<q/N),$$

преобразуем последнюю сумму. Получим

$$(q/N)\delta_{q/N}(m)\sum_{a_1,b_1\ (\mathrm{mod}\ N)}\delta_N(a_1b_1-d/(q/N))\,\overline{\chi}(b_1)\,e^{2\pi i\frac{(m/(q/N))a_1}{N}}.$$

Так как равенство $\delta_N(a_1b_1-d/(q/N))=1$ влечет за собой сравнение

$$a_1\equiv(d/(q/N))\overline{b_1}\ (\mathrm{mod}\ N)$$

и $\overline{\chi}(b_1)=\chi(\overline{b_1})$, то после замены $b_1\to\overline{b_1}\,(\mathrm{mod}\,N)$ с помощью (4) получаем утверждение теоремы 2. □

Теорема 3. *Пусть* $q\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ N)$. *Тогда для любых целых* m,n *и* d

$$\sum_{a_1,b_1\ (\mathrm{mod}\ q)}\chi(b_1)\,S(a_1,b_1,d;q)\,e^{2\pi i\frac{ma_1+nb_1}{q}}=$$
$$=(q^2/N)\,G(\chi)\,\delta_{q/N}(mn-d)\,\chi(m)\,\overline{\chi}\,((mn-d)/(q/N))\,.$$

Доказательство. Обозначим левую часть доказываемого тождества через $K_\chi(m,n,d;q)$. С помощью (1) и теоремы 1 находим

$$K_\chi(m,n,d;q) = \sum_{a,b,a_1,b_1 \pmod q} \chi(b_1)\delta_q(ab-d)\, e^{2\pi i \frac{(m+a)a_1+(n+b)b_1}{q}} =$$

$$= (q^2/N)\, G(\chi) \sum_{a,b \pmod q} \delta_q(m+a)\,\delta_{q/N}(n+b)\,\delta_q(ab-d)\,\overline{\chi}((n+b)/(q/N)) =$$

$$= (q^2/N)\, G(\chi) \sum_{b \pmod q} \delta_q(mb+d)\,\delta_{q/N}(n+b)\,\overline{\chi}((n+b)/(q/N)) =$$

$$= (q^2/N)\, G(\chi) \sum_{b_2 \pmod N} \delta_q((q/N)mb_2 - mn + d)\,\overline{\chi}(b_2) =$$

$$= (q^2/N)\, G(\chi)\,\delta_{q/N}(mn-d) \sum_{b_2 \pmod N} \delta_N(mb_2 - (mn-d)/(q/N))\,\overline{\chi}(b_2).$$

Из (5) следует, что для НОД$(m,N)>1$ сумма равна нулю. Поэтому

$$K_\chi(m,n,d;q) =$$

$$= (q^2/N)\, G(\chi)\,\delta_{q/N}(mn-d) \sum_{b_3 \pmod N} \delta_N(m\overline{m}\, b_3 - (mn-d)/(q/N))\,\overline{\chi}(\overline{m}b_3) =$$

$$= (q^2/N)\, G(\chi)\,\delta_{q/N}(mn-d)\overline{\chi}((mn-d)/(q/N))\,\chi(m).$$

Теорема 3 доказана. □

Список литературы

[1] D. R. Heath-Brown, “The Fourth Power Moment of the Riemann Zeta Function”, *Proc. London Math. Soc.*, **38**:3, (1979), 385–422.

[2] A. Selberg, “Über die Fourierkoeffizienten elliptischen Modulformen negativer Dimension”, *Neuvième Congrès Math. Scandinaves*, Helsingfors, 1938, 320–322.

[3] Н. В. Кузнецов, “Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Суммы сумм Клоостермана”, *Матем. сб.*, **III (153)**:3, (1980), 334–383.

[4] R. A. Smith, “A generalization of Kuznetsov's identity for Kloosterman sums”, *C.R. Math. Rep. Acad. Sci.*, **11**:6, (1980), 315–320.

[5] А. В. Устинов, “О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod q$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции”, *Алгебра и анализ*, **20**:5, (2008), 186–216.

[6] T. Estermann, “On Kloosterman's sum”, *Mathematika*, **8**:1, (1961), 83–86.

[7] Г. Дэвенпорт, *Мультипликативная теория чисел*, Наука, М., 1971, 200 с.

Поступила в редакцию
12 мая 2020 г.

Исследование первого автора выполнено в рамках госзадания. Исследования второго и третьего авторов выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00065).

Avdeeva M. O., Gorbatuk N. V., Shulga N. A. On Gauss and Kloosterman sums. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2020. V. 20. No 1. P. 9–14.

ABSTRACT

In this paper we calculate averages by parameters of Kloosterman sums, which include Dirichlet characters. They appear when constructing arithmetic trace formulas in the theory of automorphic forms.

Key words: *Dirichlet characters, Gauss sums, Kloosterman sums.*