

УДК 531.36+534.1

MSC2010 37Н99

© С. О. Гладков¹, С. Б. Богданова¹

К теории синхронизации N взаимодействующих маятников, колеблющихся в параллельных плоскостях

Решена задача о взаимодействии N металлических маятников, колеблющихся в параллельных плоскостях, расстояние между точками подвеса которых фиксированно и равно b . Доказана принципиальная возможность их синхронизации благодаря учету двух физических факторов: 1. эффекту электромагнитного взаимодействия между ними и 2. электромагнитного излучения каждого маятника, приводящего к нелинейному затуханию. Проанализирована система полученных строгим математическим путем нелинейных динамических уравнений движения, и приведено их численное решение.

Ключевые слова: *электромагнитное взаимодействие, электромагнитное излучение, плоско-параллельное движение, динамические уравнения.*

Введение

Задача, о которой пойдет речь в настоящей работе, является логическим продолжением двух предыдущих авторских работ [1, 2], в которых строго аналитически было приведено описание физики синхронного поведения двух маятников (работа [1]) и произвольного числа маятников (работа [2]).

В результате были получены основные динамические уравнения движения, позволяющие на формальном математическом языке интерпретировать полную картину хаоса и последующего прихода системы к синхронизации в том случае, если движение маятников происходит в одной плоскости.

Здесь стоит ненадолго остановиться и обратить внимание на несколько ключевых моментов как теории, так и численного расчета, которые не были отражены в упомянутых статьях.

Вначале следует заметить, что при получении полной системы нелинейных динамических уравнений принципиальным моментом является факт невозможности

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.
Электронная почта: sglad51@mail.ru (С. О. Гладков), sonjaf@list.ru (С. Б. Богданова).

найти их аналитическое решение с помощью обычного метода линеаризации, что позволило бы как-то проследить за различными особенностями поведения всей системы в целом. Последнее связано с наличием слагаемого, пропорционального кубической степени угловой скорости $\dot{\varphi}$, ответственного за тормозное электромагнитное излучение, пренебречь которым попросту нельзя. Однако численное интегрирование позволяет нам провести полный анализ уравнений и, более того, рассмотреть все мыслимые и немыслимые возможности динамического развития подобных систем.

В этой связи, забегая немного вперед, необходимо отметить, что очень важным моментом в плане исследования качественного поведения рассматриваемой нами системы из N маятников являются знаки перед константами взаимодействия. Если стоит знак «плюс» (где конкретно в уравнениях – об этом немного ниже), то наступит чистая синхронизация и зависимость $\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1)$ будет лежать в первой и третьей четвертях плоскости $\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1)$ в виде идеальной биссектрисы. Если же выбрать знак «минус» у этого слагаемого, то мы получим идеальную биссектрису во второй и четвертой четвертях плоскости $\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1)$, что также характеризует синхронизацию, если придерживаться ее формального определения [3] в виде $\dot{\varphi}_2 = k\dot{\varphi}_1$, где $k = \frac{p}{q}$ некоторое рациональное число, которое может быть и отрицательным. Наконец, если положить эту знаковую функцию равной нулю, то фазовая картина становится совершенно фантастической и наблюдается чехарда перехода от первой – третьей четвертей ко второй – четвертой, а затем наоборот (см. рис. 15–16). Подобное поведение будет продолжаться бесконечно долго, и здесь стоит сказать несколько слов относительно того, что же следует подразумевать под понятием бесконечно долгого движения. В работе [2], где была проанализирована динамика движения N маятников, максимальное безразмерное время численного эксперимента ограничилось значением 240000, до которого, действительно, синхронизация не наблюдалась. Это было досадной ошибкой, поскольку дальнейший численный анализ мы не смогли осуществить из-за чрезвычайно длительного счета, который был естественным следствием сложного вида полученной системы дифференциальных уравнений. Отмеченное недоразумение мы устраним в настоящей статье, а численный расчет проведем до 3000000 единиц безразмерного времени (см. далее). Проведенный расчет демонстрирует синхронизацию в любой системе, содержащей произвольное количество маятников. Это оказалось возможным сделать благодаря полученной в этой статье значительно более простой системе нелинейных уравнений, абсолютно тождественных уравнениям работ [1, 2]. Руководствуясь лишь соображениями конкретизации расчета, а не чисто абстрактным математическим аппаратом, мы остановимся на анализе лишь двух нелинейных систем, в состав которых входят только три и четыре физических маятника.

Надо также заметить, что решение проблемы синхронизации оказалось возможным довести до логического конца благодаря значительному упрощению системы динамических уравнений, которые дают корректное решение поставленной задачи, и имеют чрезвычайно компактный и красивый вид (см. общие уравнения (36) и (37)).

Кроме того, стоит еще заметить, что в работах [1, 2] не были построены фазовые зависимости $\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1)$, $\dot{\varphi}_3(\dot{\varphi}_2)$, $\dot{\varphi}_3(\dot{\varphi}_1)$ и т.д., и этот небольшой пробел также будет устранен в настоящей статье.

1. Постановка задачи и основная часть

Для того чтобы описать динамику маятников в том случае, если их колебания происходят в параллельных плоскостях, мы будем опираться на схему вычислений, намеченную нами ранее (см. [1, 2]), и воспользуемся основной идеей этих работ.

В общем случае, если длины подвесов разные и равны l_1 и l_2 , то из геометрии рис. 1 следует

$$\mathbf{R} = l_2 - l_1 + \mathbf{b}.$$

Возводя это уравнение в квадрат и пользуясь ортогональностью векторов \mathbf{b} и l_1, l_2 ,

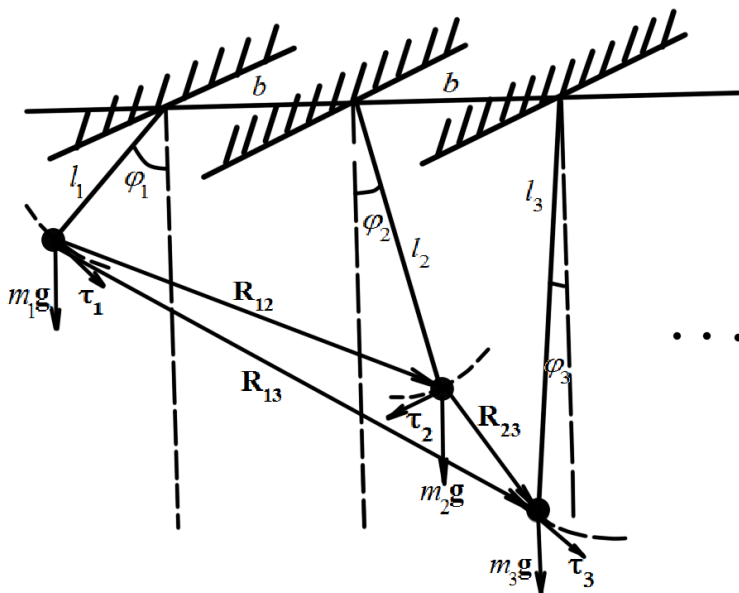


Рис. 1. Геометрическая постановка задачи

находим отсюда, что расстояние между центрами маятников будет

$$R = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + b^2 - 2l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (1)$$

Если маятники тождественны, то есть $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2 = m$, из соотношения (1) следует условие синхронизации колебаний в виде равенства $R=b$. Это автоматически приводит к простому уравнению

$$l - l \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

Откуда немедленно следует, что

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (2)$$

и

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2. \quad (3)$$

Условия (2) и (3) для эквивалентных маятников представляют собой идеальные условия синхронизации в случае, если разность их фаз $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$ равна нулю. Если она не равна нулю, то условие (2) следует представить как

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \delta.$$

Условие (3) при этом сохраняется. Заметим, что если придерживаться определения синхронизации, впервые сформулированного, по-видимому, в монографии [3], то его можно записать как

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{p}{q} \dot{\varphi}_1. \quad (4)$$

где p, q — близкие целые числа, причем как положительные, так и отрицательные.

Если длины подвесов разные, то есть $l_1 \neq l_2$, условие синхронизации можно записать только в виде равенства угловых частот в соответствии с (3), поскольку в этом случае $\varphi_1 \neq \varphi_2$. При этом становится понятно, что согласно условию (3) (или (4))

$$\varphi_1 = \omega_0 t + \alpha_1, \quad \varphi_2 = \omega_0 t + \alpha_2,$$

где $\alpha_{1,2}$ постоянные фазы.

Сказанное означает, что в условиях рассматриваемой задачи расстояние становится фиксированным и согласно (1)

$$R = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + b^2 - 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = const. \quad (5)$$

Как видно, условие (5) представляет собой не что иное, как обобщенное условие синхронизации колебаний для случая произвольных когерентных фаз. Для получения уравнений движения и их последующего анализа нам необходимо найти энергию взаимодействия между маятниками. Так же как и в работе [1], динамику движения удобно описывать на языке обобщенных координат, роль которых играют угловые переменные φ_i , где $i \in [1, N]$.

Согласно рис. 1 полную энергию системы, состоящей из N нетождественных маятников, можно представить следующим образом

$$E = T + U = U_0 + \sum_{\nu=1}^N \frac{m_\nu l_{c\nu}^2 \dot{\varphi}_\nu^2}{2} - g \sum_{\nu=1}^N m_\nu l_{c\nu} \cos \varphi_\nu + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^N U(R_{\mu\nu}), \quad (6)$$

где $U_0 = \sum_{\nu=1}^N m_\nu g H$, $l_{c\nu}$ — расстояние от точки подвеса ν — маятника до его центра масс, а H — одинаковая высота подвеса маятников над Землей. Отметим также, что в последней сумме выражения (6) считается, что суммирование осуществляется при условии $\mu \neq \nu$.

В отличие от зависимости (1) расстояние между центрами маятников удобно ввести в векторном виде, который позволяет автоматически учитывать криволинейность траектории их движения. Действительно, поскольку в начальный момент времени $t=0$ расстояние между центрами масс выбранных маятников было R_0 , то в любой последующий момент времени его можно представить как

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} = \mathbf{R}_0 - \int_0^t (\mathbf{v}_\mu(t) + \mathbf{v}_\nu(t)) dt,$$

где $\mathbf{v}_\mu, \mathbf{v}_\nu$ — скорости соответствующих шаров.

Будем полагать, что потенциальная энергия взаимодействия маятников имеет природу чисто электромагнитного происхождения, которое является следствием движения металлических маятников (наподобие гиромангнитного эффекта), как это было строго обосновано в работе [1]. Поэтому потенциальную энергию мы представим в виде

$$U = U_{EM} \left(\left| \mathbf{R}_0 - \int_0^t (\mathbf{v}_1(t) + \mathbf{v}_2(t)) dt \right| \right).$$

Исходя из результатов работы [1] выражение (1) можно легко найти благодаря основным принципам классической электродинамики (см., к примеру, [4]). В результате будем иметь для энергии электромагнитного взаимодействия

$$U_{EM}^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \int_{V_\mu} \int_{V_\nu} \frac{\mathbf{j}_\mu \mathbf{j}_\nu}{R} dV_\mu dV_\nu, \quad (7)$$

где вектор $\tilde{\mathbf{R}}$ определен как

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_{\mu\nu} + \mathbf{r}_\mu - \mathbf{r}_\nu,$$

а радиус-векторы $\mathbf{r}_\mu, \mathbf{r}_\nu$ представляют собой текущие направления в каждом из рассматриваемых шаров, отсчитываемых из центров этих шаров, по объемам которым ведется интегрирование в (7), V_μ и V_ν объемы этих шаров, c — скорость света, $\mathbf{j}_{\mu,\nu}$ — плотности токов в каждом из шаров, возникающие в результате неинерционности их движения. Поскольку плотность тока в движущемся шаре есть $\mathbf{j} = \rho_e \mathbf{v}$, где ρ_e — плотность электронов в шаре, а его скорость при колебательном движении определяется как $\mathbf{v} = l_c \dot{\varphi} \boldsymbol{\tau}$, где l_c — расстояние от точки подвеса до центра масс системы шар + стержень, то для плотности тока, полагая для простоты написания $\mu=1, \nu=2$, получаем

$$\mathbf{j}_1 = \rho_e \mathbf{v}_1 = \rho_e [\boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{l}_1 + \mathbf{r}_1)] = \rho_e \dot{\varphi}_1 [\mathbf{k}_1 \times (\mathbf{l}_1 + \mathbf{r}_1)] = \rho_e \dot{\varphi}_1 (l_{1c} \boldsymbol{\tau}_1 + r_1 \boldsymbol{\nu}_1),$$

Поэтому для плотности тока второго шара аналогично получим

$$\mathbf{j}_2 = \rho_e \dot{\varphi}_2 (l_{2c} \boldsymbol{\tau}_2 + r_2 \boldsymbol{\nu}_2), \quad (8)$$

где \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 соответственно единичные векторы, направленные по угловым скоростям $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ вдоль оси z , которая ориентирована по вектору \mathbf{b} (см. рис. 1). Единичные

вектора $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$ направлены по касательной к окружности движения, единичные вектора $\boldsymbol{\nu}_1$ и $\boldsymbol{\nu}_2$ можно считать виртуальными, поскольку $\boldsymbol{\nu}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{r_1}$, а $\boldsymbol{\nu}_2 = \frac{\mathbf{r}_2}{r_2}$. В результате подстановки $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$ и $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\nu}_2$ в формулу (8), а затем в (7) получаем

$$\begin{aligned} U &= \frac{\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \rho_e^2}{c^2} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{(l_{1c} \boldsymbol{\tau}_1 + r_1 \boldsymbol{\nu}_1)(l_{2c} \boldsymbol{\tau}_2 + r_2 \boldsymbol{\nu}_2) dV_1 dV_2}{\tilde{R}} = \\ &= \frac{\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \rho_e^2}{c^2} \left[l_{1c} l_{2c} (\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2) \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{dV_1 dV_2}{\tilde{R}} + l_{1c} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{r_2 (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}_2) dV_1 dV_2}{\tilde{R}} + \right. \\ &\quad \left. + l_{2c} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{r_1 (\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}_1) dV_1 dV_2}{\tilde{R}} + \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{r_1 r_2 (\boldsymbol{\nu}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}_2) dV_1 dV_2}{\tilde{R}} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Скалярное произведение единичных векторов $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$, как видно на рис. 1, есть $\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = \cos(\pi - \varphi_1 + \varphi_2) = -\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$, а для всех остальных скалярных произведений, фигурирующих в (9), результат интегрирования по угловым переменным дает нуль. В итоге выражение (9) сильно упрощается и мы получаем

$$U_{EM} = -l_{1c} l_{2c} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \rho_e^2}{c^2} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{dV_1 dV_2}{\tilde{R}}, \quad (10)$$

где объемы шаров здесь считаются одинаковыми,

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \left(R^2 + 2Rr_1 \cos \theta_1 - 2Rr_2 \cos \theta_2 + r_1^2 + r_2^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi - \varphi')) \right)^{1/2}, \\ dV_1 &= r_1^2 \sin \theta_1 dr_1 d\theta_1 d\varphi, \quad dV_2 = r_2^2 \sin \theta_2 dr_2 d\theta_2 d\varphi'. \end{aligned}$$

Напомним, что единичные векторы $\mathbf{k}_{1,2}$ направлены по вектору \mathbf{b} , и могут иметь случайный характер. В соответствии с размерностью взаимодействия, выражение (10) можно переписать в виде

$$U_{EM} = - \frac{\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \rho_e^2 V^2 l_{1c} l_{2c} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{c^2 b} \xi \quad (11)$$

где ξ — численный безразмерный коэффициент порядка единицы. Скалярное произведение единичных орт \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 есть $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = \cos \psi$, и знак этого произведения в определенные моменты времени может меняться. В этом плане можно просто считать, что $\cos \psi = \pm 1$.

В силу того что линейные скорости центра масс есть $\mathbf{v}_1 = \dot{\varphi}_1 l_{1c} \boldsymbol{\tau}_1$, а $\mathbf{v}_2 = \dot{\varphi}_2 l_{2c} \boldsymbol{\tau}_2$, где $\boldsymbol{\tau}_{1,2}$ единичные вектора касательной к траектории движения, то их легко представить в виде разложения по неподвижному двумерному базису \mathbf{i}, \mathbf{j} , показанному на рис. 1, то есть

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{i} \cos \varphi_1 + \mathbf{j} \sin \varphi_1, \\ \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{i} \cos \varphi_2 + \mathbf{j} \sin \varphi_2. \end{cases}$$

Используя результат следующих преобразований

$$\begin{aligned} \int_0^t (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) dt &= \int_0^t (l_{1c} \dot{\varphi}_1 (\mathbf{i} \cos \varphi_1 + \mathbf{j} \sin \varphi_1) + l_{2c} \dot{\varphi}_2 (\mathbf{i} \cos \varphi_2 + \mathbf{j} \sin \varphi_2)) dt = \\ &= l_{1c} \int_{\varphi_{01}}^{\varphi_1} d\varphi_1 (\mathbf{i} \cos \varphi_1 + \mathbf{j} \sin \varphi_1) + l_{2c} \int_{\varphi_{02}}^{\varphi_2} d\varphi_2 (\mathbf{i} \cos \varphi_2 + \mathbf{j} \sin \varphi_2) = \\ &= [\mathbf{i} (l_{1c} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_{01}) + l_{2c} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_{02})) - \\ &\quad - \mathbf{j} (l_{1c} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_{01}) + l_{2c} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_{02}))] \end{aligned}$$

приходим к формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{i} (R_{0x} + l_{1c} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_{01}) + l_{2c} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_{02})) + \\ &\quad + \mathbf{j} (R_{0y} - l_{1c} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_{01}) + l_{2c} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_{02})). \end{aligned} \quad (12)$$

где использовано разложение по базису $\mathbf{R}_0 = \mathbf{i}R_{0x} + \mathbf{j}R_{0y}$.

С учетом (12) общее выражение для потенциальной энергии в рассматриваемой двумерной задаче следует записать как

$$\begin{aligned} U_{EM} &= U_{EM} \left(\left| \mathbf{i} (R_{0x} + l_{1c} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_{01}) + l_{2c} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_{02})) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbf{j} (R_{0y} - l_{1c} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_{01}) + l_{2c} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_{02})) \right| \right), \end{aligned}$$

где энергия U_{EM} определяется формулой (11).

2. Мощность электромагнитного излучения движущихся маятников

Как было показано в [1], мощность электромагнитного излучения маятников, приводящая в конечном итоге к их синхронизации, может быть легко найдена, если воспользоваться общими свойствами потенциалов Лиенара–Вихерта. Согласно, например, [4, 5], любой движущийся заряд создает на некотором расстоянии от себя скалярный потенциал и векторный, которые можно описать следующими симметричными формулами

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{e}{2} \left(\frac{1}{R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c}} + \frac{1}{R + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c}} \right) = \frac{e}{R \left[1 - \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^2 \right]}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{e\mathbf{v}}{2c} \left(\frac{1}{R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c}} + \frac{1}{R + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c}} \right) = \frac{e\mathbf{v}}{Rc \left[1 - \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^2 \right]}, \end{aligned} \quad (13)$$

где единичный вектор $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$, а расстояние $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, где $\mathbf{r}_0(t)$ — траектория движения заряда. Эти формулы нетрудно обобщить на наш конкретный случай. То

есть вместо (13)

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{enV}{R \left[1 - \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^2 \right]} \approx \frac{enV}{R} \left[1 + \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^2 \right], \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{enV\mathbf{v}}{Rc \left[1 - \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^2 \right]} \approx \frac{enV\mathbf{v}}{Rc} \left[1 + \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^2 \right],\end{aligned}\quad (14)$$

где n — концентрация зарядов, а V — объем шарового маятника (см. выше). Поскольку распределения электромагнитных полей вне маятников можно вычислить с помощью известных определений (см. [4]), а именно

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \psi, \quad \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A},$$

то, подставляя сюда (14), получим

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{enV}{c^2} \left(\frac{\dot{\mathbf{v}}}{R} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})}{R^3} \right) + \frac{enV\mathbf{R}}{R^3} + \frac{enV\mathbf{R}}{R^3} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^2 + \frac{2enV\mathbf{v}}{R^3} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c} \right)^2 = \\ &= \frac{enV\mathbf{R}}{R^3} - \frac{enV}{c^2} \frac{\dot{\mathbf{v}}}{R} + \frac{enV\mathbf{R}}{R^3} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^2 + \frac{enV\mathbf{v}}{R^3} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c} \right)^2, \\ \mathbf{B} &= \frac{enV}{cR^3} [\mathbf{v} \times \mathbf{R}],\end{aligned}\quad (15)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, а $\mathbf{r}_0(t)$ траектория движения. Откуда следует, что $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{r}}_0 = -\mathbf{v}$.

Выделим в (15) одно слагаемое, непосредственно связанное с излучением, имеем для него

$$\mathbf{E}^{rad} = -\frac{enV}{c^2} \frac{\dot{\mathbf{v}}}{R}. \quad (16)$$

В соответствии с рис. 1 скорость движения маятника определяется как $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}$, а поэтому ускорение есть $\dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{l_c}\mathbf{n}$, где \mathbf{n} единичный вектор нормали к траектории движения, то есть к окружностям радиусов $l_{1,2c}$. Следовательно, исходя из определения интенсивности излучения согласно [6] и формуле (16)

$$I = \frac{c\mathbf{E}_{rad}^2}{8\pi} = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{enV}{c^2} \frac{\dot{\mathbf{v}}}{R} \right)^2 = \frac{(enV)^2}{8\pi c^3} \frac{1}{R^2} \left(\dot{\mathbf{v}}^2 + \frac{v^4}{l^2} \right).$$

Поскольку $v = l\dot{\varphi}$, то

$$I = \frac{(enV)^2}{8\pi c^3} \frac{l^2}{R^2} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4) \quad (17)$$

Не зависящая от расстояния мощность излучения, согласно приведенному в [5] определению, будет, очевидно, $W = \int IR^2 dO = 4\pi IR^2$. Опираясь на (17) находим для нее

$$W = \frac{(enVl)^2}{2c^3} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4). \quad (18)$$

3. Вывод системы общих динамических уравнений

Чтобы получить интересующие нас уравнения, воспользуемся подходом, предложенным в работе [7]. С этой целью запишем уравнение баланса мощностей

$$\sum \dot{E} + \sum \dot{Q} + \sum W = 0,$$

где \dot{Q} — диссипативная функция. Если пренебречь диссипативными свойствами среды (здесь предполагается, что маятники находятся в вакууме и торможение отсутствует, так как нас интересует только физика явления синхронизации, а не естественный приход системы в точку устойчивого равновесия благодаря диссипации энергии), то в этом идеальном случае

$$\sum \dot{E} + \sum W = 0, \quad (19)$$

Таким образом, с учетом (11) полная энергия системы маятников может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} E = U_0 + \sum_{\mu=1}^N \frac{m_{\mu} l_{c\mu}^2 \dot{\varphi}_{\mu}^2}{2} - g \sum_{\mu=1}^N m_{\mu} l_{c\mu} \cos \varphi_{\mu} - \\ - \frac{\rho_e^2 V^2}{c^2 b} \xi \sum_{\mu, \nu=1}^N \dot{\varphi}_{\mu} \dot{\varphi}_{\nu} (\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{k}_{\nu}) l_{c\mu} l_{c\nu} \cos(\varphi_{\mu} - \varphi_{\nu}). \end{aligned} \quad (20)$$

Дифференцируя (20) по времени и вынося за скобки (лишь в качестве примера) независимые переменные $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{E} = m_1 l_{1c}^2 \dot{\varphi}_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_{2c}^2 \dot{\varphi}_2 \ddot{\varphi}_2 + g (\dot{\varphi}_1 m_1 l_{1c} \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 m_2 l_{2c} \sin \varphi_2) - \frac{\xi \cos \psi \rho_e^2 V^2 l_{1c} l_{2c}}{c^2 b} \times \\ \times [\ddot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_1 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = \\ = \dot{\varphi}_1 \left[m_1 l_{1c}^2 \ddot{\varphi}_1 + m_1 l_{1c} \sin \varphi_1 - \frac{\xi \cos \psi \rho_e^2 V^2 l_{1c} l_{2c}}{c^2 b} (\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \right] + \\ + \dot{\varphi}_2 \left[m_2 l_{2c}^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_{2c} \sin \varphi_2 - \frac{\xi \cos \psi \rho_e^2 V^2 l_{1c} l_{2c}}{c^2 b} (\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \right]. \end{aligned}$$

С учетом излучения (18) общее уравнение (19) при условии независимости переменных $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$ распадается на систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + \omega_{10}^2 \sin \varphi_1 + \omega_{10}^2 \lambda_1 (-\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + \omega_{10}^2 \kappa_1 \dot{\varphi}_1^3 = 0, \\ \ddot{\varphi}_2 + \omega_{20}^2 \sin \varphi_2 + \omega_{20}^2 \lambda_2 (-\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + \omega_{20}^2 \kappa_2 \dot{\varphi}_2^3 = 0, \end{cases} \quad (21)$$

в которых введены сокращенные обозначения $\omega_{0\mu} = \sqrt{\frac{g}{l_{c\mu}}}$ и безразмерные параметры

$$\lambda_1 = \frac{\xi \cos \psi \rho_e^2 V^2 l_{2c}}{m_1 \omega_{10}^2 c^2 b l_{1c}}, \lambda_2 = \frac{\xi \cos \psi \rho_e^2 V^2 l_{1c}}{m_2 \omega_{20}^2 c^2 b l_{2c}}, \kappa_{\mu} = \frac{(enV)^2}{2m_{\mu} \omega_{0\mu}^2 c^3}.$$

В соответствии с общим выражением (20) для случая произвольного количества маятников N согласно правилу получения уравнений (21), находим

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\varphi}_1 + \omega_{10}^2 \sin \varphi_1 + \omega_{10}^2 \lambda_1 \sum_{\mu=2}^N (-\ddot{\varphi}_\mu \cos(\varphi_1 - \varphi_\mu) + \dot{\varphi}_\mu^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_\mu)) + \omega_{10}^2 \kappa_1 \dot{\varphi}_1^3 = 0, \\ \ddot{\varphi}_2 + \omega_{20}^2 \sin \varphi_2 + \omega_{20}^2 \lambda_2 \sum_{\mu \neq 2}^N (-\ddot{\varphi}_\mu \cos(\varphi_\mu - \varphi_2) - \dot{\varphi}_\mu^2 \sin(\varphi_\mu - \varphi_2)) + \omega_{20}^2 \kappa_2 \dot{\varphi}_2^3 = 0, \\ \ddot{\varphi}_3 + \omega_{30}^2 \sin \varphi_3 + \omega_{30}^2 \lambda_3 \sum_{\mu \neq 3}^N (-\ddot{\varphi}_\mu \cos(\varphi_\mu - \varphi_3) - \dot{\varphi}_\mu^2 \sin(\varphi_\mu - \varphi_3)) + \omega_{30}^2 \kappa_3 \dot{\varphi}_3^3 = 0, \\ \ddot{\varphi}_4 + \omega_{40}^2 \sin \varphi_4 + \omega_{40}^2 \lambda_4 \sum_{\mu \neq 4}^N (-\ddot{\varphi}_\mu \cos(\varphi_\mu - \varphi_4) - \dot{\varphi}_\mu^2 \sin(\varphi_\mu - \varphi_4)) + \omega_{40}^2 \kappa_4 \dot{\varphi}_4^3 = 0, \\ \dots \end{array} \right. \quad (22)$$

При получении уравнений (21) и (22) было использовано условие $|\ddot{\varphi}_\mu| \ll |\dot{\varphi}_\mu^2|$ (см. выражение (18)), подтвержденного результатом численного интегрирования для случая двух маятников и проиллюстрированного на рис. 2. То есть согласно (18) мощность излучения можно представить в приближенном виде как $W \approx \frac{(enVl_c)^2}{2c^3} \dot{\varphi}^4$. Если ввести безразмерное время $\tau = \omega_0 t$, то система (22) преобразуется к виду, весьма удобному для численного интегрирования, и оказывается значительно более простой, чем в работах [1, 2]. Действительно, для нее

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1'' + \sin \varphi_1 + \lambda_1 \sum_{\mu=2}^N (-\varphi_\mu'' \cos(\varphi_1 - \varphi_\mu) + \varphi_\mu'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_\mu)) + \kappa_1 \varphi_1'^3 = 0, \\ \varphi_2'' + \sin \varphi_2 + \lambda_2 \sum_{\mu \neq 2}^N (-\varphi_\mu'' \cos(\varphi_\mu - \varphi_2) - \varphi_\mu'^2 \sin(\varphi_\mu - \varphi_2)) + \kappa_2 \varphi_2'^3 = 0, \\ \varphi_3'' + \sin \varphi_3 + \lambda_3 \sum_{\mu \neq 3}^N (-\varphi_\mu'' \cos(\varphi_\mu - \varphi_3) - \varphi_\mu'^2 \sin(\varphi_\mu - \varphi_3)) + \kappa_3 \varphi_3'^3 = 0, \\ \varphi_4'' + \sin \varphi_4 + \lambda_4 \sum_{\mu \neq 4}^N (-\varphi_\mu'' \cos(\varphi_\mu - \varphi_4) - \varphi_\mu'^2 \sin(\varphi_\mu - \varphi_4)) + \kappa_4 \varphi_4'^3 = 0, \\ \dots \end{array} \right. \quad (23)$$

где штрихи означают дифференцирование по τ .

Как видно из уравнений (23), единственная стационарная точка определяется простым условием $\sin \varphi_{\mu st} = 0$, из которого и следует решение $\varphi_{\mu st} = 0$. Это решение будет являться асимптотически устойчивым, несмотря на осциллирующий характер движения маятников. Он представляет собой центральную точку в координатах $\varphi_\mu - \varphi_\nu$, относительно которой происходят хаотические, но локализованные вблизи нее колебания, и в которую все маятники синхронно «скатываются». В этом мы убедимся чуть позже с помощью метода численного решения системы уравнений (23). Для их решения следует задать начальные условия, которые можно выбрать, например, в виде

$$\varphi_\mu(0) = -\varphi_{0\mu}, \quad \varphi_\nu(0) = -\varphi_{0\nu}, \quad \dot{\varphi}_\mu(0) = \dot{\varphi}_\nu(0) = 0, \quad \text{где } \mu \neq \nu, \quad \mu, \nu \in [1, N].$$

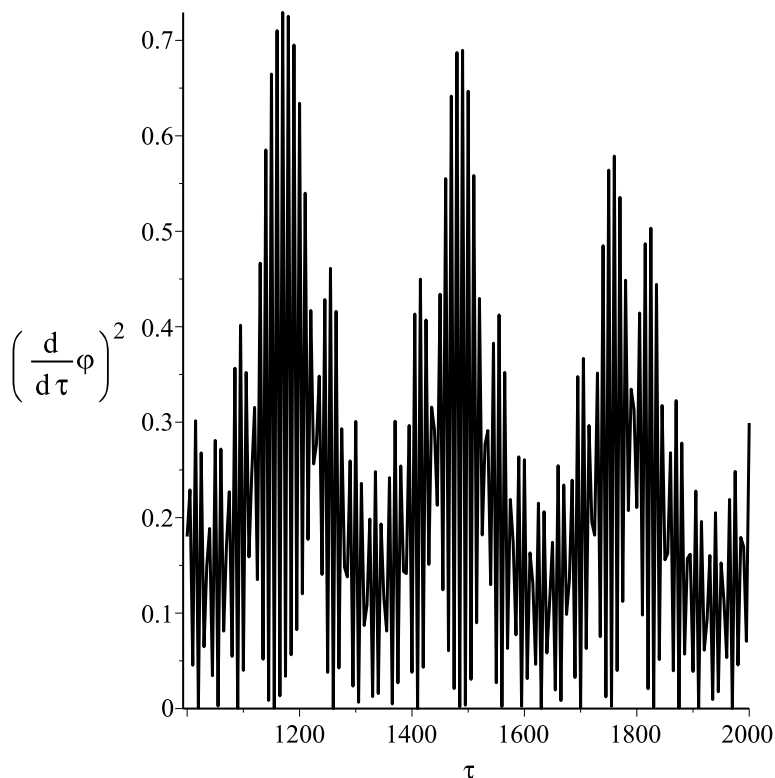


Рис. 2. Графики зависимостей $\dot{\varphi}_{1,2}^2(\tau)$ и $\ddot{\varphi}_{1,2}^2(\tau)$. В приведенном масштабе функция $\ddot{\varphi}_{1,2}^2(\tau)$ практически сливается с горизонтальной осью τ . То есть условие $|\ddot{\varphi}_{1,2}^2(\tau)| \ll |\dot{\varphi}_{1,2}^2(\tau)|$ выполняется.

Подчеркнем еще раз, что в излагаемом решении мы не принимаем во внимание какие-либо диссипативные явления типа сухого или вязкого трения, как это делается, скажем, для часовых механизмов и чему посвящено подавляющее большинство работ и монографий по теории синхронизации (см., к примеру, монографию [8]). Нашей главной целью было показать принципиальную возможность проявления эффекта синхронизации до момента остановки маятников. Строгое доказательство возможности синхронизации основано на учете двух чисто физических факторов: 1. энергии электромагнитного взаимодействия, существующего между металлическими шарами, и 2. их электромагнитного излучения, порождаемого неинерционным движением маятников по криволинейной траектории.

4. Случай $N = 3$

Численное решение системы уравнений (23) для случая трех эквивалентных маятников и для конкретных граничных условий

$$\varphi_1(0) = \alpha, \varphi_2(0) = \beta, \varphi_3(0) = \gamma, \varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = \varphi_3'(0) = 0.$$

можно проиллюстрировать с помощью рис. 3-8, на которых изображены зависимости $\varphi_2' = \varphi_2'(\varphi_1')$, $\varphi_3' = \varphi_3'(\varphi_2')$ и $\varphi_3' = \varphi_3'(\varphi_1')$. Как видно на приведенных рисунках, все маятники на безразмерном времени $\tau = 3 \cdot 10^6$ будут совершать синхронные колебания. В работах [1, 2] зависимости $\varphi'_\mu = \varphi'_\mu(\varphi'_\nu)$ построены не были, и этот пробел мы устраняем в настоящей статье.

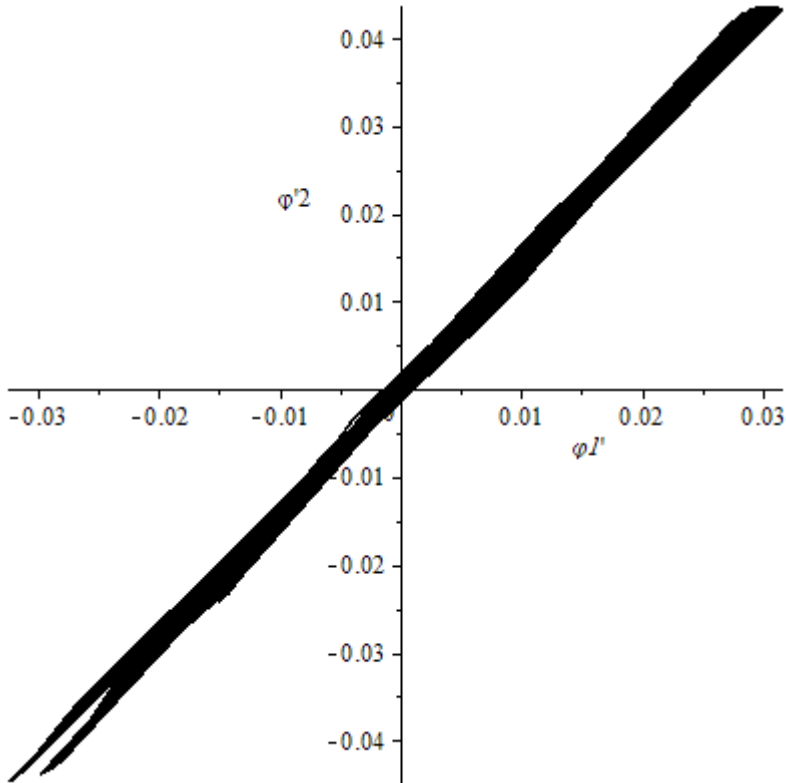


Рис. 3. Зависимость $\varphi_2'(\varphi_1')$ на интервале времен $\tau \in [2999500; 3000000]$. Начальные условия выбраны в виде $\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{3}$, $\varphi_2(0) = -\frac{\pi}{4}$, $\varphi_3(0) = \frac{\pi}{6}$ и $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = \varphi_3'(0) = 0$.

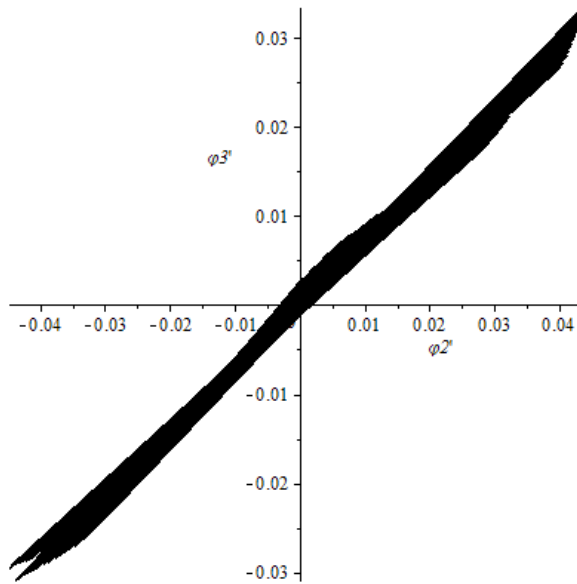


Рис. 4. Зависимость $\varphi_3'(\varphi_2')$ на интервале времен $\tau \in [2999500; 3000000]$ с начальными условиями: $\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{3}$, $\varphi_2(0) = -\frac{\pi}{4}$, $\varphi_3(0) = \frac{\pi}{6}$ и $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = \varphi_3'(0) = 0$.

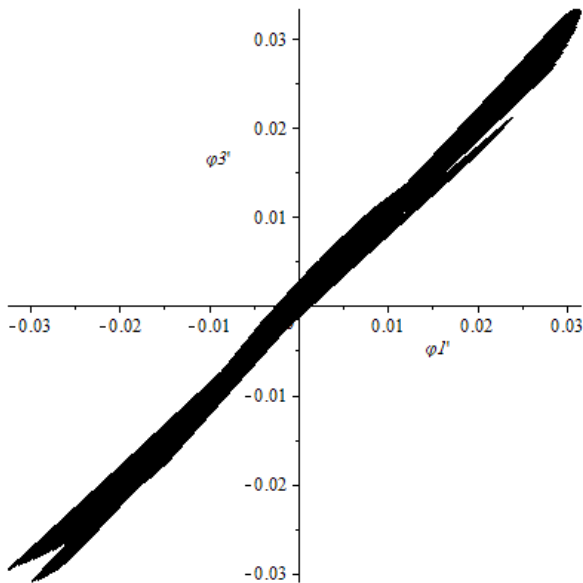


Рис. 5. Зависимость $\varphi_3'(\varphi_1')$ на интервале времен $\tau \in [2999500; 3000000]$ для начальных условий $\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{3}$, $\varphi_2(0) = -\frac{\pi}{4}$, $\varphi_3(0) = \frac{\pi}{6}$ и $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = \varphi_3'(0) = 0$.

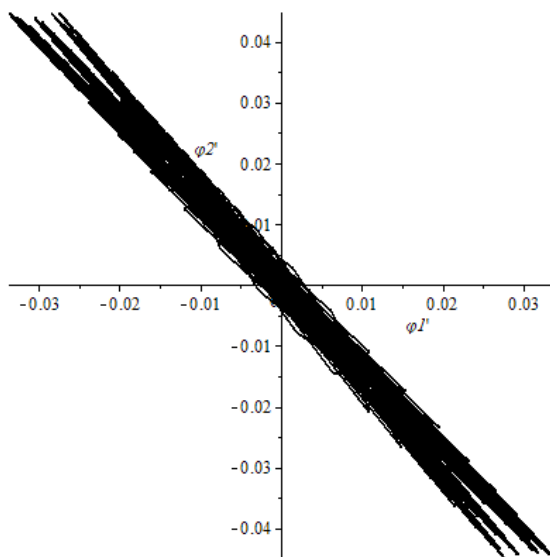


Рис. 6. Зависимость $\varphi_2'(\varphi_1')$ на интервале времен $\tau \in [2999500; 3000000]$ с малыми начальными углами отклонений: $\varphi_1(0) = \frac{\pi}{18}$, $\varphi_2(0) = -\frac{\pi}{18}$, $\varphi_3(0) = \frac{\pi}{36}$ и $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = \varphi_3'(0) = 0$.

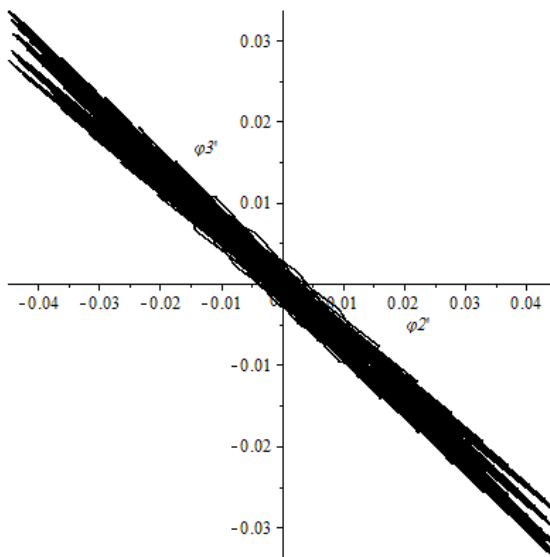


Рис. 7. Зависимость $\varphi_3'(\varphi_2')$ на интервале времен $\tau \in [2999500; 3000000]$. Начальные углы отклонения малы: $\varphi_1(0) = \frac{\pi}{18}$, $\varphi_2(0) = -\frac{\pi}{18}$, $\varphi_3(0) = \frac{\pi}{36}$ и $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = \varphi_3'(0) = 0$.

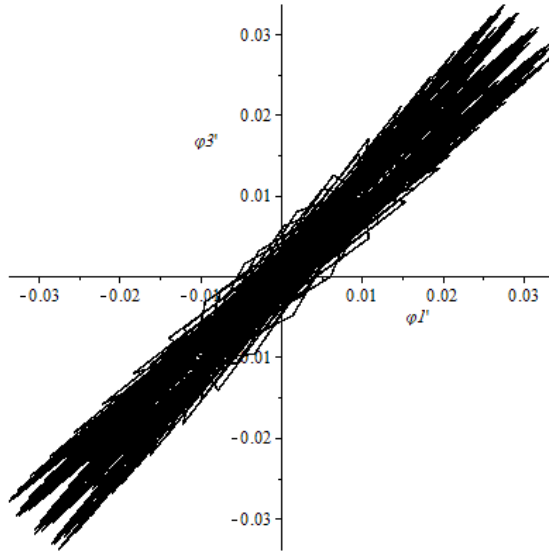


Рис. 8. Зависимость $\varphi_3'(\varphi_1')$ на интервале времен $\tau \in [2999500; 3000000]$. Начальные углы отклонения малы: $\varphi_1(0) = \frac{\pi}{18}$, $\varphi_2(0) = -\frac{\pi}{18}$, $\varphi_3(0) = \frac{\pi}{36}$ и $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = \varphi_3'(0) = 0$.

5. Случай $N = 4$

Как показывает численное решение системы уравнений (23) для случая $N = 4$, в условиях, когда все четыре маятника полностью эквивалентны, эффект синхронизации также существует, что и иллюстрируют рис. 9–12.

6. Разные знаковые функции

Интересно также рассмотреть поведение системы связанных маятников для случаев разных знаковых функций; и в качестве примера мы ограничимся двумя маятниками. Действительно, если безразмерные уравнения (23) оставить как есть, то есть в виде

$$\begin{cases} \varphi_1'' + \sin \varphi_1 + \lambda_1 (-\varphi_2'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_2'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + \kappa_1 \varphi_1'^3 = 0, \\ \varphi_2'' + \sin \varphi_2 + \lambda_2 (-\varphi_1'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \varphi_1'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + \kappa_2 \varphi_2'^3 = 0, \end{cases} \quad (24)$$

то решение будет представлять собой идеальную биссектрису, лежащую в первой и третьей четвертях плоскости $\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1)$ (см. рис. 13). Если же поменять знак «минус» на знак «плюс» в первых слагаемых обоих уравнений в круглых скобках, то есть записать их как

$$\begin{cases} \varphi_1'' + \sin \varphi_1 + \lambda_1 (\varphi_2'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_2'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + \kappa_1 \varphi_1'^3 = 0, \\ \varphi_2'' + \sin \varphi_2 + \lambda_2 (\varphi_1'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \varphi_1'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + \kappa_2 \varphi_2'^3 = 0, \end{cases} \quad (25)$$

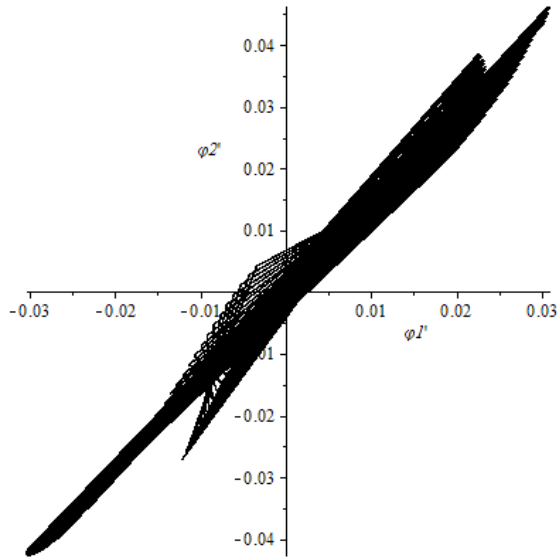


Рис. 9. Зависимость $\varphi_2'(\varphi_1')$ на интервале времен $\tau \in [2999500; 3000000]$ с начальными условиями: $\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{3}$, $\varphi_2(0) = -\frac{\pi}{4}$, $\varphi_3(0) = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_4(0) = \frac{\pi}{8}$ и $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = \varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0$.

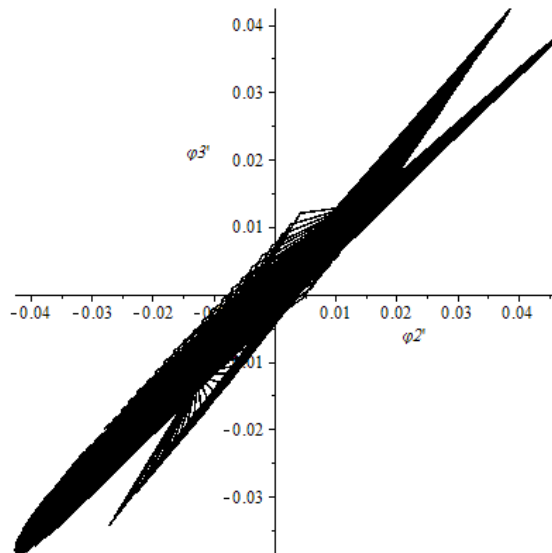


Рис. 10. Зависимость $\varphi_3'(\varphi_2')$ на интервале времен $\tau \in [2999500; 3000000]$. Начальные условия заданы $\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{3}$, $\varphi_2(0) = -\frac{\pi}{4}$, $\varphi_3(0) = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_4(0) = \frac{\pi}{8}$ и $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = \varphi_3'(0) = \varphi_4'(0) = 0$.

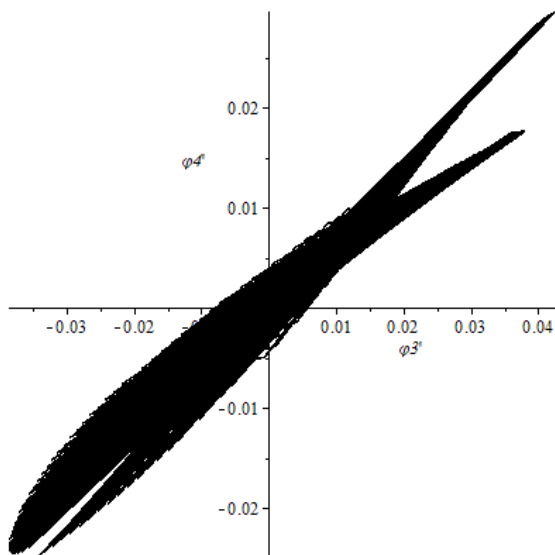


Рис. 11. Зависимость $\phi_4'(\phi_3')$ на интервале времен $\tau \in [2999500; 3000000]$. Начальные условия заданы $\phi_1(0) = -\frac{\pi}{3}$, $\phi_2(0) = -\frac{\pi}{4}$, $\phi_3(0) = \frac{\pi}{6}$, $\phi_4(0) = \frac{\pi}{8}$ и $\phi_1'(0) = \phi_2'(0) = \phi_3'(0) = \phi_4'(0) = 0$.

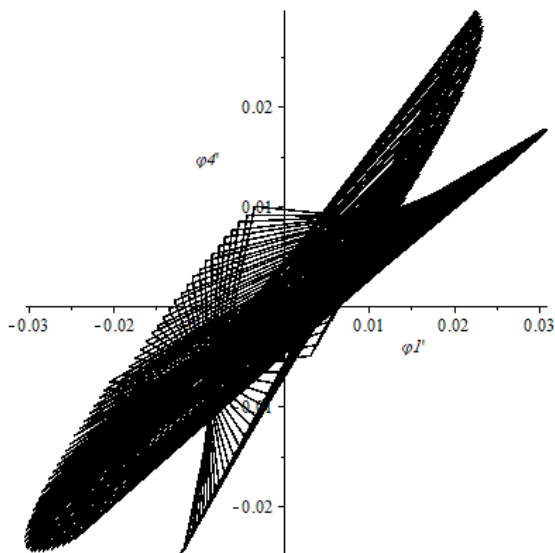


Рис. 12. Зависимость $\phi_4'(\phi_1')$ на интервале времен $\tau \in [2999500; 3000000]$. Начальные условия такие $\phi_1(0) = -\frac{\pi}{3}$, $\phi_2(0) = -\frac{\pi}{4}$, $\phi_3(0) = \frac{\pi}{6}$, $\phi_4(0) = \frac{\pi}{8}$ и $\phi_1'(0) = \phi_2'(0) = \phi_3'(0) = \phi_4'(0) = 0$.

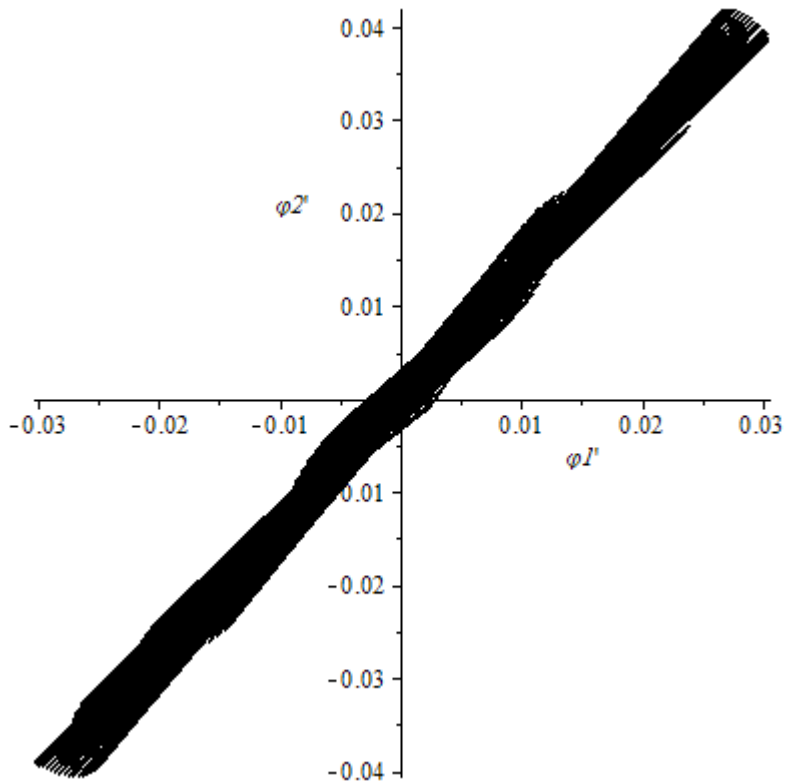


Рис. 13. Исследование знаковой функции. Зависимость $\varphi_2''(\varphi_1')$, построенная для системы (24) на интервале времен $\tau \in [999500; 1000000]$. Начальные условия заданы такими $\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{6}$, $\varphi_2(0) = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0$

то решение будет представлять собой ровную биссектрису второй и четвертой четвертей, как показано на рис. 14.

Если записать систему уравнений в следующем виде

$$\begin{cases} \varphi_1'' + \sin \varphi_1 + \lambda_1 \varphi_2'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \kappa_1 \varphi_1'^3 = 0, \\ \varphi_2'' + \sin \varphi_2 - \lambda_2 \varphi_1'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \kappa_2 \varphi_2'^3 = 0, \end{cases} \quad (26)$$

то решение будет вести себя периодическим образом, переходя от первой – третьей четвертей ко второй – четвертой и наоборот – в соответствии с рис. 15–16. С точки зрения численного анализа чрезвычайно важным, ввиду наглядности, является графическая иллюстрация решений системы уравнений (23), позволяющая показать весь ход процесса синхронизации и численно оценить время синхронизации $t_{synchron}$ для разных значений параметров λ и κ . Примечательной, на наш взгляд, является возможность оценки момента времени, когда только начинается захват фаз, приводящий к синхронизации. Это можно сделать воспользовавшись формальным определением эффект захвата фаз, сформулированным, например, в монографии [3], и численно найти конкретное значение $t = t_f$.

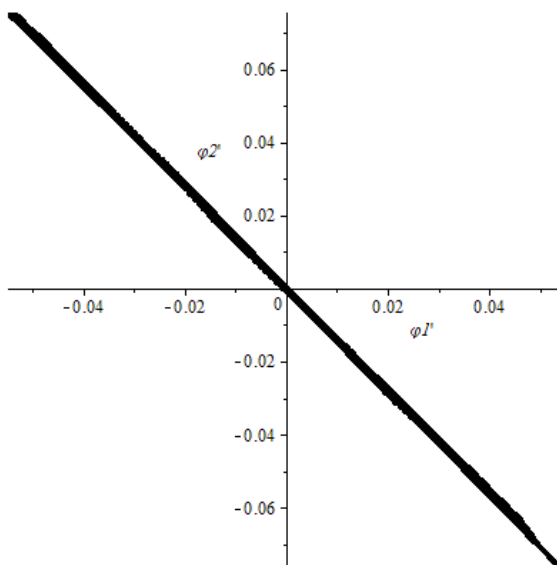


Рис. 14. Исследование знаковой функции. Зависимость $\varphi_2'(\varphi_1')$, построенная для системы (25) на интервале времен $\tau \in [199500; 200000]$ с теми же начальными условиями $\varphi_1(0) = -\frac{\pi}{6}$, $\varphi_2(0) = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0$.

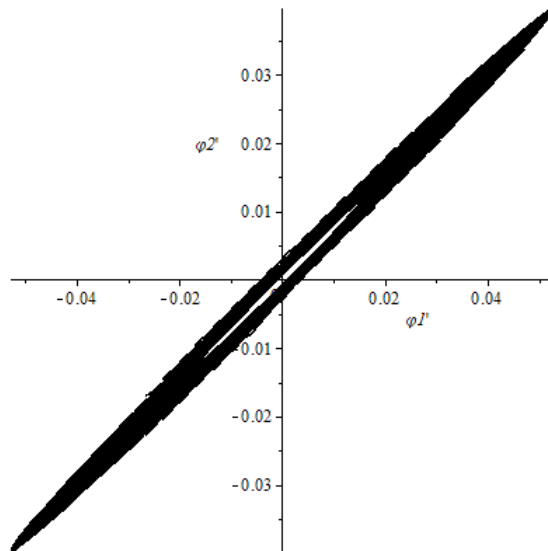


Рис. 15. Исследование знаковой функции. Зависимость $\varphi_2'(\varphi_1')$, построенная для системы (26) на интервале времен $\tau \in [599500; 600000]$ для одинаковых начальных углов отклонений: $\varphi_1(0) = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2(0) = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0$.

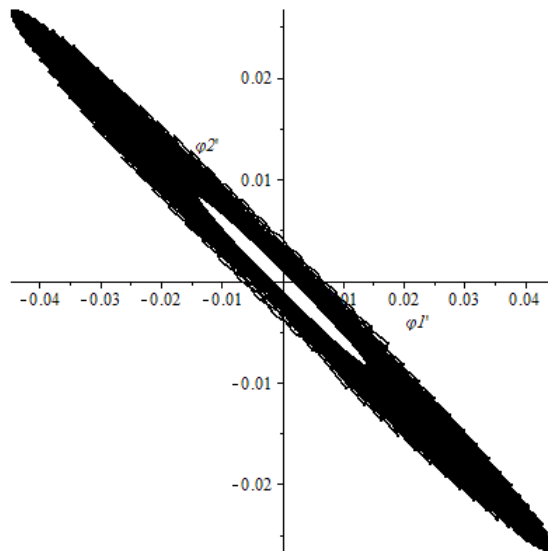


Рис. 16. Исследование знаковой функции. Зависимость $\varphi_2'(\varphi_1')$, построенная для системы (26) на интервале времен $\tau \in [991500; 992000]$. Начальные условия здесь также одинаковые: $\varphi_1(0) = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2(0) = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0$.

Заключение

Заканчивая настоящую статью, необходимо отметить следующее. Если следовать определению синхронизации, которое было сформулировано в монографии [8], то синхронизацию следует понимать как процесс захвата фазы колебаний. Если захват фаз отсутствует, то маятники ведут себя как хаотические динамические системы, поведение которых можно описать строго математически. Последнее является показательным примером детерминированного хаоса, описываемого системой уравнений (23).

Как показано, синхронизация должна наблюдаться в любой системе из произвольного числа N маятников. Рассмотренный нами случай, когда все маятники металлические, позволяет ответить на главный вопрос о физической природе явления синхронизации. При этом становится понятным, например, предсказание того факта, что даже деревянные или пластмассовые маятники тоже будут испытывать тенденцию к синхронизации, но время их синхронизации должно исчисляться уже не часами, а месяцами. Электромагнитная причина синхронизации может объяснить и массу других похожих явлений, которые мы находим, например, в биофизике и медицине (к примеру, работа [9]). Как показал численный эксперимент, который был реализован благодаря использованию программы Maple-17, безразмерное время синхронизации в системе из трех и четырех маятников составляет величину, примерно равную $3 \cdot 10^6$, которая в пересчете на обычное время $t = \frac{T}{\omega_0}$ для $\omega_0 = 10c^{-1}$ составляет примерно 3,5 дня. Обращает на себя внимание то, что амплитуда колебаний угловых частот, достигнув отметки приблизительно 0,06, остается практически неизменной, что позволяет нам ввести в терминологию такое понятие, как нелинейный стационарный режим. В общем случае его можно сформулировать, как

$$\frac{\dot{\varphi}_{st\mu}}{\dot{\varphi}_{st\nu}} = K_{\mu\nu} = const.$$

при условии $t \rightarrow \infty$. Получить его аналитически из общей системы уравнений (23) нам не удалось. Подчеркнем, что под истинным стационарным режимом рассмотренной выше нелинейной системы следует подразумевать выполнение сразу двух условий $\varphi_{st} = 0$ и $\frac{\dot{\varphi}_{st\mu}}{\dot{\varphi}_{st\nu}} = K_{\mu\nu} = const$. К слову заметим, что эти два условия применительно к уравнениям (24) приведут к еще одному, но теперь уже строгому аналитическому соотношению вида

$$\frac{\dot{\varphi}_{2st}}{\dot{\varphi}_{1st}} = \frac{a + \lambda_2}{1 + a\lambda_1} \approx \lambda_2 = const \sim 10^{-2},$$

где $a = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} q^3$, $\frac{\dot{\varphi}_{2st}}{\dot{\varphi}_{1st}} = \operatorname{tg} \gamma = K = const$.

В том случае, если мы рассматриваем малые углы отклонений маятников (см. рис. 6–8), то прослеживается не совсем чистая синхронизация. На наш взгляд физическая причина этого явления довольно тривиальна. Поскольку главный эффект, который заложен в основу синхронизации связан с эффектом нелинейного ЭМ излучения, и обусловлен он только движением по криволинейной траектории, то в случае

малых углов отклонения траектория движения оказывается практически прямолинейной. То есть излучение, как таковое, становится довольно слабым, что и приводит в итоге к “размазанным” биссектрисам углов.

Говоря о «системе связанных маятников», мы подразумеваем лишь природу электромагнитного взаимодействия, индукционно наводимого через потенциалы Лиенара – Вихерта. При этом тормозное излучение благодаря малости скорости колебаний маятников по сравнению со скоростью света направлено не в выделенную сторону, а изотропно по всем направлениям.

Согласно [5] мощность излучения не зависит от расстояния. Действительно, поскольку интенсивность излучения определяется как $I_{rad} = \frac{E_{rad}^2}{8\pi}c$, где E_{rad} дается формулой (15), то мощность $W = I_{rad}4\pi R^2$. Но так как (см. формулу (15)) $E_{rad} \sim \frac{1}{R}$, то мощность от расстояния не зависит (что является ее основным свойством), чего нельзя сказать об интенсивности излучения, которое от расстояния зависит.

Тормозное излучение не является векторной величиной, и не может быть направлено в какую-либо предпочтительную сторону. Формально оно характеризуется как мощность излучения W .

И еще. Доля излучения, идущая от произвольного маятника к остальным, может быть учтена с помощью феноменологически введенного коэффициента поглощения $q = \frac{W_i \text{ absorp}}{W_j}$, где $i \neq j$ и $i = \overline{1...N}$, $j = \overline{1...N}$. Система уравнений (23) при этом усложнится, но эффект синхронизации остается.

Поляризация каждого маятника, которая появляется в результате их нестационарного движения, может считаться пренебрежимо малой на фоне длительного времени синхронизации, и ее также можно не принимать во внимание.

Подытожим сказанное. Во-первых, при учете электромагнитного взаимодействия и излучения, идущего от колеблющихся в разных параллельных плоскостях металлических маятников, наступает эффект синхронизации колебаний, ведущий к выполнению условия $\dot{\varphi}_2 = \pm \dot{\varphi}_1$ при $t \rightarrow \infty$. Во-вторых, численно показано, что синхронизация наступает через вполне конкретное время t_{synchr} , значения которого зависят от множества входящих в задачу физических и геометрических параметров, но которое численно легко определяется. В-третьих, приведено численное решение уравнений (23) для случаев $N = 3$ и $N = 4$, иллюстрирующее на больших временах эффект синхронизации с характерными частотными зависимостями $\dot{\varphi}_i = \pm \dot{\varphi}_j$ при $t \rightarrow \infty$, где $i \neq j$.

Список литературы

- [1] С. О. Гладков, С. Б. Богданова, “Хаотическая динамика взаимодействующих маятников (решение проблемы синхронизации)”, *Инженерная физика*, 2019, № 1, 49–62.
- [2] С. О. Гладков, С. Б. Богданова, “Теория детерминированного хаоса в системе N взаимодействующих компланарных маятников”, *Инженерная физика*, 2019, № 3, 9–21.
- [3] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Berlin, 1984.
- [4] С. О. Гладков, “К теории распределения ЭМ полей для потенциалов Лиенара – Вихерта”, *Инженерная физика*, 2018, № 8, 3–10.

-
- [5] Л. Ландау, Е. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, М., 2001.
- [6] Л. Ландау, Е. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 2002.
- [7] С. О. Гладков, “К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра”, *ЖТФ*, **59**:3, (2018), 377–341.
- [8] А. Андронов, А. Витт, С. Хайкин, *Теория колебаний*, Физматлит, М., 1959.
- [9] S. O. Gladkov, “On the Possibility of Detecting Different Kinds of Diseases with the Help of Fixation of Electromagnetic Radiation Intensity of Red Blood Cells”, *Biomedical Journal Scientific and Technical Research*, **20** (1), (2019), 14806-14808.

Поступила в редакцию
12 сентября 2019 г.

Gladkov S. O., Bogdanova S.B. To the theory of synchronization of interacting pendulums oscillating in the parallel planes. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2020. V. 20. No 1. P. 15–37.

ABSTRACT

The problem of interacting metal pendulums oscillating in parallel planes, the distance b between the suspension points of which is fixed and equally, has been solved. The principle possibility of their synchronization is provided by taking into account two physical factors: 1. Effect of electromagnetic interaction between them and 2. Accounting for EM radiation of each pendulum, leading to non-linear attenuation. The system of nonlinear dynamic motion equations obtained by a strict mathematical path is analyzed, and their numerical solution is given. The article offers a new method for constructing the pairs of function which are holomorphic on the whole complex plane and satisfy functional equations such as the addition theorem for theta functions.

Key words: *electromagnetic interaction, electromagnetic radiation, flat – parallel motion, dynamic equations.*