Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20. № 1. С. 74–81

УДК 519.213.7
MSC2010 11K06

© Е. В. Капля[1]

Обобщение закона гиперболического секанса и логистического закона распределения в единый закон распределения с варьируемым коэффициентом эксцесса

Предложено и исследовано обобщение V логистического закона распределения. Для случайной величины, имеющей обобщённое логистическое распределение типа V, найдена характеристическая функция, сформирована производящая функция моментов, получено выражение дисперсии. Найдена и исследована зависимость коэффициента эксцесса обобщённого логистического распределения от степенного параметра. Определён интервал значений коэффициента эксцесса обобщённого логистического распределения. Установлено, что коэффициент эксцесса зависит только от степенного параметра.

Ключевые слова: *логистическое распределение, гиперболический секанс, плотность вероятности, характеристическая функция случайной величины, производящая функция моментов, коэффициент эксцесса, функция распределения вероятностей.*

Введение

Логистический закон распределения обладает постоянным коэффициентом эксцесса [1, 2]. Это ограничивает область применения стандартного логистического закона при аппроксимации экспериментальных данных. Вариабельность формы и коэффициента эксцесса можно обеспечить введением дополнительного степенного параметра [3–5] в стандартный логистический закон распределения. Различают 4 типа обобщений логистического закона распределения. Обобщения типа I—IV описаны в [2, 3]. Плотность распределения вероятности приращения угла направления ветра успешно аппроксимируется [4, 5] нестандартным типом обобщённого логистического закона распределения. Соответствие нового типа обобщённого логистического закона распределения и экспериментальных данных подтверждается в [4, 5] статистическими критериями согласия. Исследуемое распределение не является частным

[1] Филиал НИУ МЭИ в г. Волжском, 404110, Волгоградская область, г. Волжский, пр-т Ленина, 69. Электронная почта: ev-kaple@yandex.ru

случаем известных четырёх типов обобщений логистического закона, поэтому будем считать его новым обобщением V.

Цели исследования: 1) Решить нормировочный интеграл, входящий в состав функции плотности вероятности обобщённого логистического распределения типа V; 2) Вывести характеристическую функцию случайной величины, имеющей логистическое распределение типа V; 3) Сформировать производящую функцию моментов случайной величины; 4) Вывести зависимости дисперсии и коэффициента эксцесса обобщённого логистического распределения типа V от параметров закона распределения.

1. Обобщение V логистического закона распределения

Функцию плотности логистического распределения случайной величины X можно обобщить, добавив параметр B

$$f_V(x,\mu,B,E)=\frac{\left(\operatorname{sech}\frac{x-\mu}{E}\right)^B}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{sech}\frac{x-\mu}{E}\right)^B\,dx},\tag{1}$$

где B — безразмерный степенной параметр, $B>0$; sech — гиперболический секанс; E — параметр масштаба; μ — математическое ожидание случайной величины X.

Функция (1) обладает симметрией относительно прямой $x=\mu$. При $B=2$ формула (1) принимает вид стандартного логистического закона распределения.

Плотность логистического распределения типа IV в общем случае не обладает симметрией относительно вертикальной оси, проходящей через максимум. Функция плотности типа IV имеет 2 параметра [4], равенство которых приводит к симметрии. Обобщённое логистическое распределение типа IV, приведённое к симметричному виду, совпадает с распределением типа III, имеющим тот же максимум.

Предлагаемый закон распределения можно рассматривать как обобщение распределения гиперболического секанса (hyperbolic secant distribution) [3, 6] и логистического распределения [1–3].

2. Решение нормировочного интеграла

Решение нормировочного интеграла, входящего в формулу (1), можно выразить через гамма-функцию

$$J(B,E)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{sech}\frac{x-\mu}{E}\right)^B dx=E\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{B}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{B+1}{2}\right)}\cdot\sqrt{\pi},\tag{2}$$

где Γ — гамма-функция.

Нормировочный интеграл $J(B,E)$ пропорционален параметру E и связан с параметром B нелинейной зависимостью. В результате преобразований формула (2) приведена к виду

$$J(B,E)=E\cdot 2^B\cdot\frac{\left(\Gamma\left(\frac{B}{2}\right)\right)^2}{2\cdot\Gamma(B)}=E\cdot 2^{B-1}\cdot\frac{\left(\Gamma\left(\frac{B}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(B)}.\tag{3}$$

Решение интеграла $J(B,E)$ можно выразить, используя бета-функцию Эйлера

$$J(B,E) = E \cdot 2^{B-1} \cdot \beta\left(\frac{B}{2}, \frac{B}{2}\right), \tag{4}$$

где β — бета-функция Эйлера, $\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Альтернативные формулы (2)–(4) могут быть полезны в численных расчётах, выполняемых с помощью программных средств, содержащих только одну из двух функций бета-функцию или гамма-функцию, а также в тех случаях, когда точность вычисления значений бета-функции и гамма-функции различна. Формулы (2)–(4) справедливы при $B > 0$.

3. Плотность вероятности обобщённого логистического распределения

Решение нормировочного интеграла (4) позволяет представить функцию плотности вероятности (1) в явном виде с помощью бета-функции Эйлера

$$f_V(x;\mu,B,E) = \frac{\left(\operatorname{sech}\frac{x-\mu}{E}\right)^B}{E \cdot 2^{B-1} \cdot \beta\left(\frac{B}{2}, \frac{B}{2}\right)} \tag{5}$$

или с помощью гамма-функции (2) и (3)

$$f_V(x;\mu,B,E) = \frac{\Gamma\left(\frac{B+1}{2}\right)}{E \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{B}{2}\right)} \cdot \left(\operatorname{sech}\frac{x-\mu}{E}\right)^B, \tag{6}$$

$$f_V(x;\mu,B,E) = \frac{2\Gamma(B)}{E \cdot 2^B \cdot \left(\Gamma\left(\frac{B}{2}\right)\right)^2} \cdot \left(\operatorname{sech}\frac{x-\mu}{E}\right)^B. \tag{7}$$

4. Характеристическая функция

Характеристической функцией случайной величины является преобразование Фурье функции плотности вероятности случайной величины [7]:

$$\varphi_x(t;\mu,B,E) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(j \cdot t \cdot x) \cdot f_V(x;\mu,B,E)\,dx, \tag{8}$$

где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, μ — математическое ожидание случайной величины X, t — аргумент характеристической функции, $t \in \mathbb{R}$. Характеристическая функция случайной величины X, имеющей распределение $f_V(x;\mu,B,E)$, найдена в результате решения интеграла (8):

$$\varphi_x(t;\mu,B,E) = \exp(j \cdot t \cdot \mu) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{B-j\cdot t\cdot E}{2}\right)\Gamma\left(\frac{B+j\cdot t\cdot E}{2}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{B}{2}\right)\right)^2}. \tag{9}$$

Характеристическую функцию (9) можно привести к иному выражению с использованием бета-функции Эйлера:

$$\varphi_x(t;\mu,B,E) = \exp(j\cdot t\cdot\mu)\cdot\frac{\beta\left(\frac{B-j\cdot t\cdot E}{2},\frac{B+j\cdot t\cdot E}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{B}{2}\right)}, \qquad \forall t\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

Аргументы бета-функции должны быть положительны: $B-j\cdot t\cdot E>0$ и $B+j\cdot t\cdot E>0$, следовательно, в формуле (10) $|j\cdot t|<\frac{B}{E}$.

Мнимая часть характеристической функции (9) и (10) равна нулю для всех t,μ,B и E.

5. Производящая функция моментов

С целью вычисления моментов случайной величины X, характеризующейся плотностью распределения $f_V(x;\mu,B,E)$, составим производящую функцию моментов. Производящая функция моментов (moment-generating function) получена на основе интегрального выражения [8]

$$M_x(t;\mu,B,E) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(t\cdot x)\cdot f_V(x;\mu,B,E)\,dx.$$

Производящую функцию запишем, основываясь на характеристической функции, и исключая мнимую единицу. Производящая функция моментов случайной величины X с плотностью распределения $f_V(x;\mu,B,E)$ примет вид

$$M_x(t;\mu,B,E) = \exp(t\cdot\mu)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{B-E\cdot t}{2}\right)\Gamma\left(\frac{B+E\cdot t}{2}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{B}{2}\right)\right)^2}. \tag{11}$$

Момент n-го порядка равен [8] производной n-го порядка от производящей функции:

$$\mu_n(B,E) = \frac{\partial^n}{\partial t^n}M_x(t;\mu,B,E)\Big|_{t\,=\,0}. \tag{12}$$

С целью вычисления коэффициента эксцесса необходимы моменты второго и четвёртого порядка.

6. Дисперсия случайной величины

Дисперсия — второй центральный момент случайной величины. Дисперсия случайной величины X, имеющей плотность распределения $f_V(x;\mu,B,E)$, найдена в результате дифференцирования производящей функции моментов (11)

$$D_x(B,E) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}M_x(t;\mu,B,E)\Big|_{t\,=\,0} = \frac{1}{2}\cdot E^2\cdot\Psi\left(1,\frac{B}{2}\right), \tag{13}$$

где $\Psi(m,z)$ — полигамма-функция порядка m (polygamma function of order m). Дисперсия не зависит от математического ожидания μ. Полигамма-функцию представляют [9] производной

$$\Psi(m,z) = \frac{d^m}{dz^m}\psi(z) = \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\ln(\Gamma(z)),$$

где $\psi(z)$ — дигамма-функция (digamma function) — производная натурального логарифма гамма-функции [10]

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\left(\Gamma(z)\right) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Из формулы (13) следует квадратичная зависимость дисперсии $D_X(B,E)$ от параметра масштаба E. Дисперсия случайной величины X убывает с увеличением степенного параметра B.

7. Момент четвёртого порядка

Момент четвёртого порядка случайной величины X равен производной

$$\mu_4(B,E) = \frac{\partial^4}{\partial t^4}M_x(t;\mu,B,E)\Big|_{t\,=\,0}. \tag{14}$$

Момент четвёртого порядка найден в результате подстановки (11) в (14)

$$\mu_4(B,E) = \frac{1}{4}E^4\left(3\cdot\left(\Psi\left(1,\frac{B}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{2}\Psi\left(3,\frac{B}{2}\right)\right). \tag{15}$$

В общем случае $\mu_n(B,E) \propto \frac{1}{n}E^n$.

8. Методы оценки параметров распределения (5)–(7)

Производящая функция моментов (11) и теоретические моменты (12)–(15) могут использоваться для получения статистических точечных оценок неизвестных параметров μ, B и E функции плотности распределения (5)–(7) по экспериментальным данным с помощью метода моментов. Оценки параметров, найденные методом моментов, могут применяться в качестве первого приближения при поиске точечных оценок параметров плотности распределения (5)–(7) методом максимального правдоподобия.

9. Коэффициент эксцесса плотности распределения

Количественная характеристика островершинности функции плотности распределения — коэффициент эксцесса. Коэффициент эксцесса распределения случайной величины определяется отношением [11]

$$\Lambda_X = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3, \tag{16}$$

где μ_4 — четвёртый центральный момент случайной величины X, $\mu_2 = D_X$ — дисперсия (второй центральный момент случайной величины X).

Коэффициент эксцесса исследуемого закона распределения $f_V(x;\mu,B,E)$ найден на основе формул (13), (15) и (16):

$$\Lambda_X(B) = \frac{\Psi\left(3, \frac{B}{2}\right)}{2 \cdot \left[\Psi\left(1, \frac{B}{2}\right)\right]^2}. \tag{17}$$

Коэффициент эксцесса (17) зависит только от параметра B и не зависит параметра масштаба E. Зависимость $\Lambda_X(B)$ представлена на рис. 1.

Стандартное логистическое распределение характеризуется коэффициентом эксцесса, равным 1.2. Коэффициент эксцесса распределения гиперболического секанса равен 2.

Коэффициент эксцесса обобщённого логистического распределения (1) варьируется (рис. 1) в пределах $\Lambda_X \in (0;3)$, что подтверждает вариабельность формы и коэффициента эксцесса предложенного распределения $f_V(x;\mu,B,E)$. Функция $\Lambda_X(B)$ асимптотически стремится к нулю при $B \to \infty$.

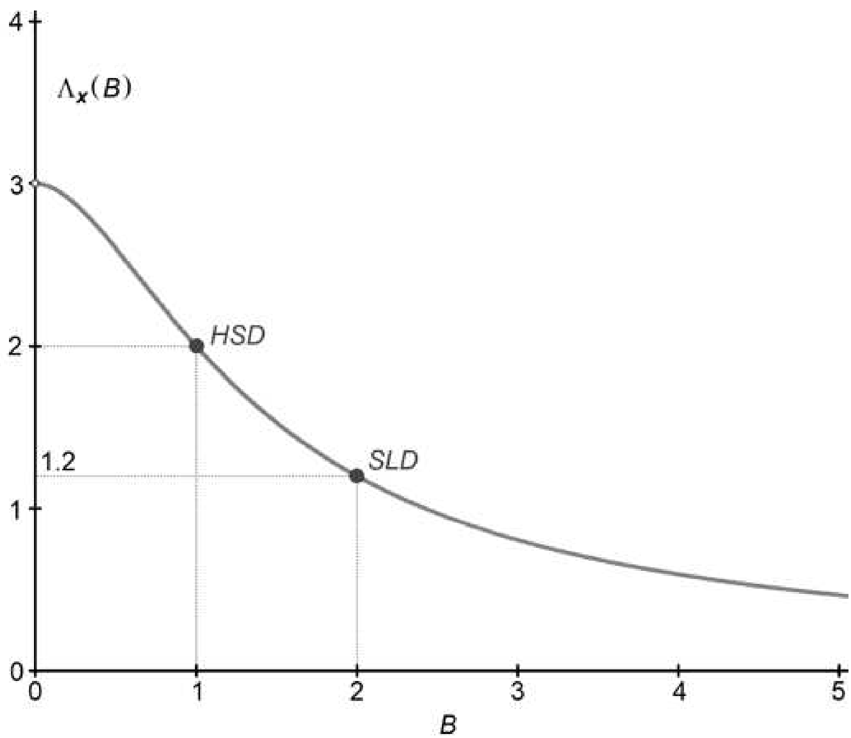

Рис. 1. Зависимость коэффициента эксцесса от степенного параметра B:
HSD — точка, соответствующая распределению гиперболического секанса;
SLD — точка, соответствующая стандартному логистическому распределению.

10. Частные случаи обобщения V

Предложенное обобщённое логистическое распределение типа V обобщает два известных распределения. Стандартное [3] распределение гиперболического секанса (hyperbolic secant distribution) может быть получено из функции $f_V(x;\mu,B,E)$ при $B=1$ и $E=\frac{2}{\pi}$:

$$f_{HSD}(x;\mu) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sech}\left(\frac{\pi}{2}(x-\mu)\right). \tag{18}$$

Стандартное логистическое распределение [1–3] следует из функции $f_V(x;\mu,B,E)$ при $B=2$:

$$f_{SLD}(x;\mu,E) = \frac{1}{2|E|}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x-\mu}{E}\right). \tag{19}$$

Функции плотности вероятности (18) и (19) характеризуются постоянным коэффициентом эксцесса. В частности, коэффициент эксцесса распределения (18) равен $\Lambda_X(1)=2$. Коэффициент эксцесса стандартного логистического распределения (19) равен $\Lambda_X(2)=1.2$.

Заключение

Найдено решение нормировочного интеграла, входящего в состав функции плотности вероятности обобщённого логистического распределения нового типа V. Нормировочный интеграл представлен формулами (2) и (3) с помощью гамма-функции и формулой (4) с использованием бета-функции Эйлера.

Получены выражения (5)–(7) плотности вероятности обобщённого логистического распределения типа V на основе решения (2)–(4) нормировочного интеграла. Предлагаемое распределение (1), (5)–(7) не является ни одним из стандартных четырёх типов обобщений логистического закона, а также не представляется их частным случаем, поэтому формулы (1), (5)–(7) можно считать новым обобщением V логистического закона.

Найдена характеристическая функция (9) случайной величины X, имеющей обобщённое логистическое распределение типа V. Сформирована производящая функция моментов (11) случайной величины X.

Получено выражение дисперсии (13) случайной величины X. Дисперсия пропорциональна квадрату параметра масштаба.

Найдена и исследована зависимость (17) коэффициента эксцесса от степенного параметра. Коэффициент эксцесса обобщённого логистического распределения типа V может принимать значения в интервале $0<\Lambda_X<3$. Установлено, что коэффициент эксцесса распределения типа V зависит только от степенного параметра.

Список литературы

[1] N. Balakrishnan, *Handbook of the logistic distribution*, Marcel Dekker, New York, 1992.

[2] N. Balakrishnan and V. B. Nevzorov, *A primer on statistical distributions*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2003.

[3] N. L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan, *Continuous univariate distributions*, 2-nd edition, v. 2, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 1995.

[4] Е. В. Капля, "Обобщение логистического закона распределения в статистическом анализе динамики направления ветра", *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*, **52**:6, (2016), 669–675.

[5] Е. В. Капля, "Обобщение логистического закона распределения в модели динамики направления ветра", *Геофизические процессы и биосфера*, **14**:4, (2015), 61–71.

[6] P. Ding, "Three occurrences of the hyperbolic-secant distribution", *The American Statistician*, **68**, (2014), 32–335.

[7] Б. Рамачандран, *Теория характеристических функций*, Наука, М., 1975.

[8] G. Casella and R. Berger, *Statistical inference*, 2-nd edition, Wadsworth Group, Duxbury, 2002.

[9] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark, *NIST handbook of mathematical functions*, U.S. Department of Commerce, Cambridge University Press., National Institute of Standards and Technology (NIST), 2010.

[10] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, 10th ed., Dover, New York, 1972.

[11] С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин, *Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных*, Справочное изд., Финансы и статистика, М., 1983.

Поступила в редакцию
30 октября 2019 г.

Kaplya E. V. The generalization of the hyperbolic secant distribution and the logistic distribution in the single dostribution with variable kurtosis. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2020. V. 20. No 1. P. 74–81.

ABSTRACT

The generalization V of the logistic distribution is proposed and investigated. For a random variable having a generalized logistic distribution of type V, the characteristic function is found, the generating function of moments is formed, and the expression of dispersion is obtained. The dependence of the kurtosis coefficient of the generalized logistic distribution on the power parameter is found and investigated. The interval of values of the coefficient of kurtosis of the generalized logistic distribution is determined. It is found that the coefficient of kurtosis depends only on the power parameter.

Key words: *logistic distribution, hyperbolic secant, probability density, characteristic function of the random variable, moment-generating function, excess kurtosis, probability distribution function.*