Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20. № 1. С. 90–107

УДК 517.958+519.21+004.7
MSC2010 05-04 + 34A35

© Д. Б. Прокопьева[1], Т. А. Жук[2], Н. И. Головко[2]

Вывод уравнений типа Колмогорова – Чепмена с оператором Фоккера – Планка

Рассматривается система массового обслуживания (СМО) с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором с экспоненциальным обслуживанием. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого является случайным диффузионным процессом с упругими границами и ненулевым коэффициентом сноса. Относительно нестационарных и стационарных характеристик числа заявок СМО получены дифференциальные уравнения типа Колмогорова — Чепмена с дифференциальным оператором Фоккера — Планка, имеющие теоретическое и прикладное значение в теории дифференциальных уравнений. Системы обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока используют при моделировании узлов глобальных вычислительных сетей.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения типа Колмогорова — Чепмена, дифференциальный оператор Фоккера — Планка, дважды стохастический пуассоновский поток, диффузионный процесс, система массового обслуживания, вероятностные характеристики числа заявок.*

Введение

Системы массового обслуживания (СМО) являются аналитическими моделями информационных сетей и их элементов. Моделирование информационных сетей является актуальной технической и научной проблемой. Математические модели связывают заданные условия работы СМО с показателями эффективности СМО, описывают ее способность справляться с потоком заявок [1–3]. Статистический анализ потока заявок, поступающих на web-серверы, показывает диффузионный характер

[1] Тихоокеанское высшее военно-морское училище им. С.О. Макарова, 690062, г. Владивосток, Камский переулок, 6.
[2] Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8.
Электронная почта: prokopievad@yandex.ru (Д. Б. Прокопьева), Tatyana_zhukdv@mail.ru (Т. А. Жук), golovko.ni@dvfu.ru (Н. И. Головко).

изменения интенсивности входного пуассоновского потока [4, 5]. Системы обслуживания со скачкообразной интенсивностью входного потока используют при моделировании узлов локальных вычислительных сетей, а системы обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока удобно использовать при моделировании узлов глобальных вычислительных сетей [6]. Многие работы посвящены исследованию диффузионных процессов в системах массового обслуживания. Диффузионная аппроксимация в СМО с переменными интенсивностями входного потока и обслуживания исследовалась в [7]. Существование и единственность решений уравнений, связывающих длительность очереди и процесс ожидания, в моделях СМО с диффузионной интенсивностью входного потока со многими серверами изучена в [8]. Технические аспекты, возникающие в сетях с очередями, и диффузионный процесс как непрерывный марковский процесс в СМО, рассмотрены в [9].

Для систем массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса $a=0$ в работе [10] выведены уравнения относительно характеристик числа заявок. В данной работе математическая модель СМО построена в виде системы дифференциальных уравнений относительно нестационарных и стационарных характеристик числа заявок следующей СМО. На вход СМО с бесконечным накопителем поступает пуассоновский поток заявок с диффузионной интенсивностью $\lambda(t)$. Диффузионный процесс $\lambda(t)$ изменяется на промежутке $[\alpha,\beta]$ с упругими границами и имеет ненулевой коэффициент сноса $a\neq 0$, коэффициент диффузии b. Обслуживание в СМО осуществляется на одном приборе по экспоненциальному закону с параметром μ.

Для построения модели использованы методы теории массового обслуживания, в частности одна из важнейших методик — динамика вывода уравнений Колмогорова – Чепмена [11, 12]. Динамикой Колмогорова называют Δt-метод вывода интегро-дифференциальных уравнений для систем массового обслуживания с марковскими свойствами процессов входного потока и (или) обслуживания [11]. Построение математической модели СМО важно для практических приложений, так как математическая модель СМО позволяет вычислять различные вероятностные показатели эффективности функционирования СМО, например, моменты числа заявок в СМО. В частности, актуальной является задача сравнения стационарных показателей эффективности функционирования рассматриваемой СМО с показателями СМО с постоянной интенсивностью входного потока, полученной в результате усреднения случайной интенсивности входного потока в стационарном режиме.

Обозначим условную функцию распределения $\lambda(t)$

$$R(t,x;\tau,y) = \mathsf{P}\{\lambda(\tau) < y|\lambda(t) = x\}, t < \tau,$$

а также условную плотность распределения $\lambda(t)$

$$r(t,x;\tau,y) = \frac{\partial R(t,x;\tau,y)}{\partial y}.$$

Условная плотность распределения $r(t,x;\tau,y)$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial r(t,x;\tau,y)}{\partial \tau} = \frac{b}{2}\frac{\partial^2 r(t,x;\tau,y)}{\partial y^2} - a\frac{\partial r(t,x;\tau,y)}{\partial y},$$

которое также называют уравнением Фоккера — Планка, а условная функция распределения $R(t,x;\tau,y)$ удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова [12]. В [12] приведен вывод данных уравнений с помощью интегрального метода Колмогорова. В [13,14] приводится вывод прямого уравнения Колмогорова (уравнения Фоккера – Планка) с применением аппроксимации диффузионного процесса ступенчатым полумарковским процессом с помощью Δt-метода. В [12,14] приведена классификация границ диффузионного процесса, в частности, упругих, эластичных, поглощающих и отражающих.

Для удобства вывода уравнений примем следующие обозначения. Пусть для абстрактной случайной величины ξ определена функция распределения $F(x)=\mathsf{P}\{\xi<x\}$ и плотность распределения $f(x)=dF(x)/dx$. Так как

$$\mathsf{P}\{x\leqslant\xi<x+\Delta x\}=\int\limits_x^{x+\Delta x}f(x)dx=f(x)\Delta x+O((\Delta x)^2),$$

плотность распределения случайной величины ξ будем вводить следующим образом:

$$f(x)=\mathsf{P}\{x\leqslant\xi<x+\Delta x\}/\Delta x+O(\Delta x),$$

где $O((\Delta x)^k)$ — величина k-го порядка малости относительно Δx.

В дальнейшем интенсивность входного потока в нестационарном режиме будем обозначать через $\lambda(t)$, в стационарном — через $\hat{\lambda}$. Пусть $Q_k(t,x)=\mathsf{P}\{\nu(t)=k,x\leqslant\lambda(t)<x+\Delta x\}/\Delta x+O(\Delta x)$, где $\nu(t)$ — число заявок в СМО в момент t, $q_k(x)=\mathsf{P}\{\nu=k,x\leqslant\hat{\lambda}<x+\Delta x\}/\Delta x+O(\Delta x)$, где ν — число заявок в СМО в стационарном режиме, $Q_k(t,x)$, $q_k(x)$ — нестационарные и стационарные, соответственно, характеристики числа заявок — плотности по x, $k\geqslant0$; $f(t,x)=\mathsf{P}\{x\leqslant\lambda(t)<x+\Delta x\}/\Delta x+O(\Delta x)$ — нестационарная плотность интенсивности входного потока $\lambda(t)$; $f(x)=\mathsf{P}\{x\leqslant\hat{\lambda}<x+\Delta x\}/\Delta x+O(\Delta x)$ — стационарная плотность $\hat{\lambda}$, $x\in[\alpha,\beta]$.

Заметим, что интегралы $\int\limits_\alpha^\beta Q_k(t,x)dx=P_k(t)$, $\int\limits_\alpha^\beta q_k(x)dx=p_k$, $k\geqslant0$, представляют собой нестационарное и стационарное распределение числа заявок соответственно.

Будем рассматривать функции $f(x)$, $q_k(x)$ в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $C^2[\alpha,\beta]$, функции $f(t,x)$, $Q_k(t,x)$ в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $\mathcal{L}$. Функции в $\mathcal{L}$ являются непрерывными и ограниченными при $\{t\geqslant0,\ x\in[\alpha,\beta]\}$, непрерывными и ограниченными являются их частные производные по t, по x первого и второго порядков при $\{t\geqslant0,\ x\in(\alpha,\beta)\}$. Будем считать частные производные по x функций первого и второго порядка непрерывно продолжаемыми при $x\to\alpha, x\to\beta$. В дальнейшем будем использовать частные производные данных функций, повторно не оговаривая указанные свойства.

Основные результаты

В [10] приведен вывод уравнений относительно $f(t,x),Q_l(t,x),q_l(x)$ с помощью Δt-метода для рассматриваемой СМО с диффузионной интенсивностью входного потока с упругими границами α,β с нулевым коэффициентом сноса $a=0$. В данной работе аналогичные уравнения получены для ненулевого коэффициента сноса $a\neq0$.

Теорема 1. *Нестационарная плотность $f(t,x) \in \mathcal{L}$ диффузионного процесса $\lambda(t)$ с упругими границами α, β, ненулевым коэффициентом сноса $a \neq 0$ и коэффициентом диффузии b удовлетворяет следующим уравнениям:*

1) во внутренних точках $x \in (\alpha, \beta)$ прямому уравнению Колмогорова, которое также называют уравнением Фоккера — Планка

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \frac{b}{2}\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} - a\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}, \tag{1}$$

2) в граничных точках $x=\alpha, x=\beta$ краевым условиям

$$\frac{b}{2}\frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial x} - af(t,\alpha) = 0,\ \frac{b}{2}\frac{\partial f(t,\beta)}{\partial x} - af(t,\beta) = 0, \tag{2}$$

3) начальному условию с начальной плотностью $f_0(x)$

$$f(0,x) = f_0(x),\ \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_0(x)\,dx = 1, \tag{3}$$

4) условию нормировки

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t,x)\,dx = 1, t \geqslant 0. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим полумарковский процесс $\lambda_{п\mathcal{M}}(t)$, аппроксимирующий диффузионный процесс $\lambda(t)$. Дискретное пространство значений $\lambda_{п\mathcal{M}}(t)$ задается однородной марковской цепью λ_n со значениями на равномерной сетке: $\{x_k : \alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = \beta, 0 \leqslant k \leqslant m, x_{i+1} = x_i + \Delta x, \Delta x \neq 0, 0 \leqslant i \leqslant m-1\}$.

Изменения процесса $\lambda_{п\mathcal{M}}(t)$ происходят через интервалы времени Δt :

$$\triangle t = (\Delta x)^2/b \tag{5}$$

в моменты времени $t_n, n \geqslant 1$, где $b > 0$ — коэффициент диффузии диффузионного процесса $\lambda(t)$. Однородная марковская цепь $\lambda_n = \lambda_{п\mathcal{M}}(t_n + 0)$, $n \geqslant 0$, представляет собой вложенную марковскую цепь с дискретным временем. Полумарковский скачкообразный процесс $\lambda_{п\mathcal{M}}(t)$ доопределим в точках разрыва непрерывным справа.

Вероятности переходов $p_{ij} = \mathsf{P}\{\lambda_{n+1} = x_j | \lambda_n = x_i\}$ однородной марковской цепи λ_n определим следующим образом:

$$p_{ij} = P\{\lambda_{n+1} = x_j | \lambda_n = x_i\} = \frac{1}{2} - p\Delta x,\ j = i-1,\ 1 \leqslant i \leqslant m;$$
$$p_{ij} = \frac{1}{2} + p\Delta x,\ j = i+1,\ 0 \leqslant i \leqslant m-1;$$
$$p_{00} = \frac{1}{2} - p\Delta x; \quad p_{mm} = \frac{1}{2} + p\Delta x,\ p \neq 0.$$

В остальных случаях вероятности переходов p_{ij} равны нулю. На рис. 1 стрелками показаны переходы марковской цепи λ_n с ненулевыми вероятностями, вероятности переходов подписаны над и под стрелками.

В результате предельного перехода $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$ полумарковская цепь $\lambda_{n\mathcal{M}}(t)$ переходит в диффузионный процесс $\lambda(t)$ с ненулевым коэффициентом сноса $a \neq 0$ и коэффициентом диффузии $b > 0$ (см. [13], §49).

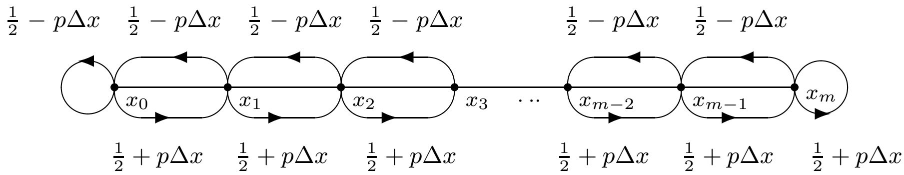

Рис. 1. Вероятности переходов.

Действительно, согласно определению диффузионный процесс — это непрерывный марковский процесс с независимыми приращениями второго порядка (с ненулевым моментом второго порядка и нулевыми моментами старшего порядка). Вычислим моменты приращения для полумарковской цепи $\lambda_{n\mathcal{M}}(t)$ [12].

1. Момент приращения первого порядка

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|y-x|<\varepsilon} (y-x)\, F\,(t, x; t+\Delta t, y)\, dy =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(-\Delta x \Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big) + \Delta x \Big(\frac{1}{2} + p\Delta x\Big) \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} 2p(\Delta x)^2 =$$

$$= 2p \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = 2pb$$

равен коэффициенту сноса диффузионного процесса $\lambda(t)$.

Следовательно, $a = 2pb$, или

$$p = \frac{a}{2b}. \tag{6}$$

2. Момент приращения второго порядка

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|y-x|<\varepsilon} (y-x)^2\, F\,(t, x; t+\Delta t, y)\, dy =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left((-\Delta x)^2 \Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big) + (\Delta x)^2 \Big(\frac{1}{2} + p\Delta x\Big) \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = b$$

равен коэффициенту диффузии диффузионного процесса $\lambda(t)$.

3. Момент приращения k-го порядка полумарковской цепи $\lambda_{n\mathcal{M}}(t)$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|y-x|<\varepsilon} (y-x)^k\, F\,(t, x; t+\Delta t, y)\, dy =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{b}{(\Delta x)^2}\left((-\,\Delta x)^k\left(\frac{1}{2}-p\Delta x\right)+(\Delta x)^k\left(\frac{1}{2}+p\Delta x\right)\right)=0, k\geqslant 3,$$

равен моменту приращения k-го порядка диффузионного процесса $\lambda(t)$.

Аппроксимация диффузионного процесса $\lambda(t)$ полумарковской цепью $\lambda_{пм}(t)$ рассмотрена также в работах [10, 14].

В дальнейшем при выводе уравнений будем наблюдать следующие марковские процессы в моменты времени t_n: вложенную однородную марковскую цепь λ_n с дискретным временем, входной дважды стохастический пуассоновский поток заявок с диффузионной интенсивностью, экспоненциальное обслуживание.

Обозначим вероятности $p(n,k)=\mathsf{P}\{\lambda_n=x_k\}$. Получим уравнения сначала относительно вероятностей $p(n,k)$ состояний марковской цепи λ_n во внутренних точках $1\leqslant k\leqslant m-1$, затем относительно плотности диффузионного процесса $f(t,x)$ во внутренних точках $x\in(\alpha,\beta)$.

Вероятность того, что марковская цепь λ_n примет в $(n+1)$-й момент времени значение x_k по формуле полной вероятности равна

$$p\,(n+1,k)\;=p\,(n,k-1)\left(\frac{1}{2}+p\Delta x\right)+p\,(n,k+1)\left(\frac{1}{2}-p\Delta x\right).$$

После элементарных преобразований равенство примет вид

$$p\,(n+1,k)-p\,(n,k)\;=\frac{1}{2}\Big(p\,(n,k-1)-2p\,(n,k)+p\,(n,k+1)\Big)+ \\ +p\Delta x\Big(p\,(n,k-1)-p\,(n,k+1)\Big),$$

или

$$\frac{p\,(n+1,k)-p\,(n,k)}{\Delta t}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p\,(n,k-1)-2p\,(n,k)+p\,(n,k+1)}{\Delta t}+ \\ +p\cdot\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\cdot\frac{p\,(n,k-1)-(n,k+1)}{\Delta x}. \tag{7}$$

В левой части (7) стоит дискретный аналог частной производной по t. Числитель первого слагаемого в правой части — аналог производной второго порядка по x. Заменим в знаменателе первого слагаемого (7) $\Delta t=(\Delta x)^2/b$ согласно (5). Второе слагаемое преобразуем с учетом соотношения (6)

$$\frac{p\,(n+1,k)-p\,(n,k)}{\Delta t}=\frac{b}{2}\cdot\frac{p\,(n,k-1)-2p\,(n,k)+p\,(n,k+1)}{(\Delta x)^2}- \\ -\,a\cdot\frac{p\,(n,k+1)-p\,(n,k-1)}{2\Delta x},\qquad 1\leqslant k\leqslant m-1. \tag{8}$$

Получим из (8) уравнение для плотности $f(t,x)$ диффузионного процесса во внутренних точках. Перейдем в уравнении (8) от функции дискретных аргументов $p(n,k)$ сначала к функции непрерывных аргументов $\tilde{p}(t,x)$ по формуле

$$p(n,k)=p\left(\frac{t}{\Delta t},\frac{x}{\Delta x}\right)=\tilde{p}(t,x),$$

в узлах сетки $t=t_n, x=x_k$. Затем сеточную функцию $\tilde{p}(t,x), t=t_n, x=x_k$, естественным образом продлим до ступенчатой функции $\tilde{\tilde{p}}(t,x)$ непрерывных аргументов t,x, непрерывную справа в точках разрыва $t=t_n, x=x_k$. Введем далее ступенчатую плотность $\tilde{f}(t,x)$ ступенчатого процесса $\lambda_{n\mathcal{M}}(t)$:

$$\tilde{\tilde{p}}(t,x) = \mathsf{P}\{x \leqslant \lambda_{n\mathcal{M}}(t) < x + \Delta x\} = \tilde{f}(t,x)\Delta x.$$

Перейдя в уравнении (8) от функции дискретных аргументов $p(n,k)$ к функции непрерывных аргументов $\tilde{f}(t,x)$ получим разностное уравнение

$$\frac{\tilde{f}(t+\Delta t,x) - \tilde{f}(t,x)}{\Delta t} = \frac{b}{2} \cdot \frac{\tilde{f}(t,x-\Delta x) - 2\tilde{f}(t,x) + \tilde{f}(t,x+\Delta x)}{(\Delta x)^2} - \\ - a \cdot \frac{\tilde{f}(t,x+\Delta x) - \tilde{f}(t,x-\Delta x)}{2\Delta x},$$

из которого в результате предельного перехода при $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0, \tilde{f}(t,x) \to f(t,x)$ следует уравнение (1). Для краткости в дальнейшем в уравнениях будем выполнять переход от функции дискретных аргументов $p(n,k)$ сразу к функции непрерывных аргументов $f(t,x)$.

Рассмотрим уравнения, связывающие $p(n,k)$, в граничных точках $k=0, k=m$. В соответствии с введенными переходными вероятностями находим

$$p\,(n+1,0) \;=\; \left(\frac{1}{2} - p\Delta x\right) p\,(n,0) + \left(\frac{1}{2} - p\Delta x\right) p\,(n,1)\,, \tag{9}$$

$$p\,(n+1,m) \;=\; \left(\frac{1}{2} + p\Delta x\right) p\,(n,m-1) + \left(\frac{1}{2} + p\Delta x\right) p\,(n,m)\,. \tag{10}$$

В уравнениях (9), (10) перейдем от функции дискретных аргументов $p(n,k)$ к непрерывной функции $\tilde{\tilde{f}}(t,x)$ непрерывных аргументов, аппроксимирующей функцию $\tilde{f}(t,x)$:

$$\tilde{\tilde{f}}\,(t+\Delta t,\alpha) \;=\; \left(\frac{1}{2} - p\Delta x\right) \tilde{\tilde{f}}\,(t,\alpha) + \left(\frac{1}{2} - p\Delta x\right) \tilde{\tilde{f}}\,(t,\alpha+\Delta x)\,, \tag{11}$$

$$\tilde{\tilde{f}}\,(t+\Delta t,\beta) \;=\; \left(\frac{1}{2} + p\Delta x\right) \tilde{\tilde{f}}\,(t,\beta-\Delta x) + \left(\frac{1}{2} + p\Delta x\right) \tilde{\tilde{f}}\,(t,\beta)\,. \tag{12}$$

Из (11), (12) после применения к функциям $\tilde{\tilde{f}}(t+\Delta t,\alpha)$ и $\tilde{\tilde{f}}(t+\Delta t,\beta)$ формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точек (t,α) и (t,β) получим

$$\tilde{\tilde{f}}\,(t,\alpha) + \frac{\partial \tilde{\tilde{f}}\,(t,\alpha)}{\partial t}\Delta t + o\,(\Delta t) \;=\; \frac{1}{2}\tilde{\tilde{f}}\,(t,\alpha) - p\Delta x \tilde{\tilde{f}}\,(t,\alpha) + \frac{1}{2}\tilde{\tilde{f}}\,(t,\alpha) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{\tilde{f}}\,(t,\alpha)}{\partial x}\Delta x - p\Delta x \tilde{\tilde{f}}\,(t,\alpha) - p\Delta x \frac{\partial \tilde{\tilde{f}}\,(t,\alpha)}{\partial x}\Delta x + o\,(\Delta x)\,,$$

$$\tilde{\tilde{f}}\,(t,\beta) + \frac{\partial \tilde{\tilde{f}}\,(t,\beta)}{\partial t}\Delta t + o\,(\Delta t) \;=\; \frac{1}{2}\tilde{\tilde{f}}\,(t,\beta) + p\Delta x \tilde{\tilde{f}}\,(t,\beta) + \frac{1}{2}\tilde{\tilde{f}}\,(t,\beta) - \\ - \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{\tilde{f}}\,(t,\beta)}{\partial x}\Delta x + p\Delta x \tilde{\tilde{f}}\,(t,\beta) - p\Delta x \frac{\partial \tilde{\tilde{f}}\,(t,\beta)}{\partial x}\Delta x + o\,(\Delta x)\,.$$

Откуда после приведения подобных слагаемых, деления уравнений на Δx, в результате предельного перехода при $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$, $\tilde{\tilde{f}}(t,x) \to f(t,x)$ с учетом (5) следуют граничные уравнения (2).

Начальное условие (3) задается по условию теоремы. Условие нормировки (4) очевидно. Теорема 1 доказана. □

Заметим, что согласно [12, 14] границы диффузионного процесса α, β являются упругими.

Теорема 2. *Стационарная плотность $f(x) \in C^2[\alpha,\beta]$ диффузионного процесса $\lambda(t)$ с упругими границами α,β, ненулевым коэффициентом сноса $a \neq 0$ и коэффициентом диффузии b удовлетворяет следующим уравнениям:*

1) во внутренних точках $x \in (\alpha,\beta)$ обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{b}{2} f''(x) - af'(x) = 0, \tag{13}$$

2) в граничных точках $x = \alpha, x = \beta$ краевым условиям

$$\frac{b}{2} f'(\alpha) - af(\alpha) = 0, \ \frac{b}{2} f'(\beta) - af(\beta) = 0, \tag{14}$$

3) условию нормировки

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 1. \tag{15}$$

Доказательство. Уравнения для стационарной плотности диффузионного процесса (13), (14) получаются из уравнений (1), (2) с учетом того, что в стационарном режиме $f_t'(t,x) = 0$. Условие нормировки (15) следует из (4) в стационарном режиме. Теорема 2 доказана. □

Обозначим через $\mathcal{A}$ дифференциальный оператор уравнения Фоккера – Планка, или для краткости — оператор Фоккера – Планка:

$$\mathcal{A}f(t,x) = \frac{b}{2}\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} - a\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}, \qquad \mathcal{A}f(x) = \frac{b}{2} f''(x) - af'(x),$$

одинаково действующий на нестационарную $f(t,x)$ и стационарную $f(x)$ плотности диффузионного процесса $\lambda(t)$.

Теорема 3. *Нестационарные характеристики $Q_l(t,x) \in \mathcal{L}$, $l \geqslant 0$, рассматриваемой СМО удовлетворяют следующим уравнениям:*

1) во внутренних точках $x \in (\alpha,\beta)$ нестационарным уравнениям типа Колмогорова — Чепмена с дифференциальным оператором Фоккера – Планка

$$\frac{\partial Q_0(t,x)}{\partial t} = -\,xQ_0(t,x) + \mu Q_1(t,x) + \frac{b}{2}\frac{\partial^2 Q_0(t,x)}{\partial x^2} - a\frac{\partial Q_0(t,x)}{\partial x}, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_l(t,x)}{\partial t} &= xQ_{l-1}(t,x) - (x+\mu)Q_l(t,x) + \mu Q_{l+1}(t,x) + \\ &+ \frac{b}{2}\frac{\partial^2 Q_l(t,x)}{\partial x^2} - a\frac{\partial Q_l(t,x)}{\partial x}, \qquad l \geqslant 1, \end{aligned} \tag{17}$$

2) в граничных точках $r_1=\alpha$, $r_2=\beta$ *краевым условиям*

$$\frac{b}{2}\frac{\partial Q_l(t,r_i)}{\partial x}-aQ_l(t,r_i)=0,\; l\geqslant 0, i=1,2, \tag{18}$$

3) начальным условиям с начальными плотностями $\xi_l(x)$

$$Q_l(0,x)=\xi_l(x),\;\; \xi_l(x)\geqslant 0,\int\limits_{\alpha}^{\beta}\xi_l(x)\,dx=1,\;\; l\geqslant 0, \tag{19}$$

4) условию нормировки

$$\sum_{l\geqslant 0}Q_l(t,x)=f(t,x),\;\; t\geqslant 0,\;\; x\in[\alpha,\beta]. \tag{20}$$

Доказательство. Обозначим через ν_n число заявок в СМО в момент времени t_n, $p(l,n,k)=P\{\nu_n=l,\lambda_n=x_k\}$ — вероятности состояний СМО, $p_{jk}(i,l)=$ $=P\{\nu_{n+1}=l,\lambda_{n+1}=x_k\mid\nu_n=i,\lambda_n=x_j\}$ — переходные вероятности состояний СМО.

По формуле полной вероятности получаем

$$p(l,n+1,k)=\sum_i\sum_j p_{jk}(i,l)p(l,n,k). \tag{21}$$

Обозначим через $\upsilon_r(\Delta t)$ вероятность поступления r заявок на интервале Δt, через $\omega_r(\Delta t)$ вероятность обслуживания r заявок на интервале $\Delta t, r\geqslant 0$. Далее значения x_j марковской однородной цепи λ_n для краткости будем обозначать λ.

Для вероятностей $\upsilon_r(\Delta t)$ [11] справедливы соотношения

$$\upsilon_0(\Delta t)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t),\upsilon_1(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t),\upsilon_r(\Delta t)=o(\Delta t),r\geqslant 2,$$

где $o(\Delta t)$ — бесконечно малая величина относительно Δt.

Если число заявок в СМО больше 0, то вероятности $\omega_r(\Delta t)$ согласно [11] равны

$$\omega_0(\Delta t)=1-\mu\Delta t+o(\Delta t),\omega_1(\Delta t)=\mu\Delta t+o(\Delta t),\omega_r(\Delta t)=o(\Delta t),r\geqslant 2.$$

Если число заявок в СМО равно 0, то вероятности $\omega_r(\Delta t)$ согласно [11] находят иначе:

$$\omega_0(\Delta t)=1,\omega_r(\Delta t)=0,r\geqslant 1.$$

Получим уравнения для $l\geqslant 1$ сначала относительно вероятностей состояния системы массового обслуживания $p(l,n,k)$ во внутренних точках $k:1\leqslant k\leqslant m-1$, затем относительно нестационарных характеристик $Q_l(t,x)$ во внутренних точках $x\in(\alpha,\beta)$.

Переходные вероятности $p_{jk}(i,l)$ найдем по формуле полной вероятности

$$p_{k-1,k}(l-1,l)=\Bigl(\frac{1}{2}+p\Delta x\Bigr)(\upsilon_1\omega_0+\upsilon_2\omega_1+\ldots)=$$

$$=\Bigl(\frac{1}{2}+p\Delta x\Bigr)x_{k-1}\Delta t+o(\Delta t),\qquad 1\leqslant k\leqslant m,\quad l\geqslant 1,$$

$$p_{k,k-1}(l-1,l)=\Bigl(\frac{1}{2}-p\Delta x\Bigr)x_k\Delta t+o(\Delta t),\qquad 1\leqslant k\leqslant m,\quad l\geqslant 1,$$

$$p_{k-1,k}(l,l) = \Big(\frac{1}{2} + p\Delta x\Big)(\upsilon_0\omega_0 + \upsilon_1\omega_1 + \ldots) =$$
$$= \Big(\frac{1}{2} + p\Delta x\Big)\Big(1 - (x_{k-1} + \mu)\Delta t\Big) + o(\Delta t), \qquad 1 \leqslant k \leqslant m, \quad l \geqslant 1,$$
$$p_{k,k-1}(l,l) = \Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big)\Big(1 - (x_k + \mu)\Delta t\Big) + o(\Delta t), \qquad 1 \leqslant k \leqslant m, \quad l \geqslant 1,$$
$$p_{k-1,k}(l+1,l) = \Big(\frac{1}{2} + p\Delta x\Big)(\upsilon_0\omega_1 + \upsilon_1\omega_2 + \ldots) =$$
$$= \Big(\frac{1}{2} + p\Delta x\Big)\mu\Delta t + o(\Delta t), \qquad 1 \leqslant k \leqslant m, \quad l \geqslant 0,$$
$$p_{k,k-1}(l+1,l) = \Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big)\mu\Delta t + o(\Delta t), \qquad 1 \leqslant k \leqslant m, \quad l \geqslant 0,$$
$$p_{k-1,k}(0,0) = \Big(\frac{1}{2} + p\Delta x\Big)(1 - x_k\Delta t) + o(\Delta t), \qquad 1 \leqslant k \leqslant m,$$
$$p_{k,k-1}(0,0) = \Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big)(1 - x_k\Delta t) + o(\Delta t), \qquad 1 \leqslant k \leqslant m,$$
$$p_{0,0}(l,l) = \Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big)\Big(1 - (x_0 + \mu)\Delta t\Big) + o(\Delta t), \qquad l \geqslant 1,$$
$$p_{0,0}(l-1,l) = \Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big)x_0\Delta t + o(\Delta t), \qquad l \geqslant 1,$$
$$p_{0,0}(l+1,l) = \Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big)\mu\Delta t + o(\Delta t), \qquad l \geqslant 0,$$
$$p_{0,0}(0,0) = \Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big)\Big(1 - x_0\Delta t\Big) + o(\Delta t),$$
$$p_{m,m}(l-1,l) = \Big(\frac{1}{2} + p\Delta x\Big)x_m\Delta t + o(\Delta t), \qquad l \geqslant 1,$$
$$p_{m,m}(l+1,l) = \Big(\frac{1}{2} + p\Delta x\Big)\mu\Delta t + o(\Delta t), \qquad l \geqslant 0,$$
$$p_{m,m}(0,0) = \Big(\frac{1}{2} + p\Delta x\Big)\Big(1 - x_m\Delta t\Big) + o(\Delta t),$$
$$p_{m,m}(l,l) = \Big(\frac{1}{2} + p\Delta x\Big)\Big(1 - (x_m + \mu)\Delta t\Big) + o(\Delta t), \qquad l \geqslant 1.$$

Используя формулу (21) и вероятности перехода, получим разностные уравнения относительно $p(l,n,k)$ для $l \geqslant 1$ во внутренних точках $k : 1 \leqslant k \leqslant m-1$:

$$p(l,n+1,k) = p(l-1,n,k-1)p_{k-1,k}(l-1,l) + p(l-1,n,k+1)p_{k+1,k}(l-1,l) +$$
$$+ p(l,n,k-1)p_{k-1,k}(l,l) + p(l,n,k+1)p_{k+1,k}(l,l) +$$
$$+ p(l+1,n,k-1)p_{k-1,k}(l+1,l) + p(l+1,n,k+1)p_{k+1,k}(l+1,l) =$$
$$= \frac{1}{2}\Delta t\Big(p(l-1,n,k-1)(x_k - \Delta x) + p(l-1,n,k+1)(x_k + \Delta x)\Big) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Big(p(l,n,k-1)(1 - (x_{k-1} + \mu)\Delta t) + p(l,n,k+1)(1 - (x_{k+1} + \mu)\Delta t)\Big) +$$
$$+ \frac{1}{2}\mu\Delta t\Big(p(l+1,n,k-1) + p(l+1,n,k+1)\Big) +$$
$$+ p\Delta x\Delta t\Big(p(l-1,n,k-1)(x_k - \Delta x) - p(l-1,n,k+1)(x_k + \Delta x)\Big) +$$

$$+p\Delta x\Big((p(l,n,k-1)(1-(x_{k-1}+\mu)\Delta t)-p(l,n,k+1)(1-(x_{k+1}+\mu)\Delta t)\Big)+$$
$$+\mu\, p\Delta x\Delta t\Big(p(l+1,n,k-1)-p(l-1,n,k+1)\Big)+o(\Delta t)=$$

$$\begin{gathered}=\frac{1}{2}\Delta t\, x_k\Big(p(l-1,n,k-1)+p(l-1,n,k+1)\Big)+\\+\frac{1}{2}\Big(p(l,n,k-1)+p(l,n,k+1)\Big)+p\Delta x\Big(p(l,n,k-1)-p(l,n,k+1)\Big)+\\+\frac{1}{2}\Delta t\mu\Big(p(l+1,n,k-1)+p(l+1,n,k+1)\Big)-\\-\frac{1}{2}\Delta t\,\Big((x_{k-1}+\mu)(p(l,n,k-1)+(x_{k+1}+\mu)p(l,n,k+1)\Big)+o(\Delta t).\end{gathered}\tag{22}$$

Из левой и правой частей равенства (22) вычтем $p(l,n,k)$ и разделим на Δt, получим

$$\begin{gathered}\frac{p(l,n+1,k)-p(l,n,k)}{\Delta\, t}=\frac{1}{2}x_k\Big(p(l-1,n,k-1)+p(l-1,n,k+1)\Big)+\\+\frac{1}{2}\cdot\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\cdot\frac{p(l,n,k+1)-2p(l,n,k)+p(l,n,k-1)}{(\Delta x)^2}+\\+\frac{1}{2}\mu\Big(p(l+1,n,k+1)+p(l+1,n,k-1)\Big)-\\-\frac{1}{2}\Big((x_{k-1}+\mu)(p(l,n,k-1)+(x_{k+1}+\mu)p(l,n,k+1)\Big)+\\+2p\cdot\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\cdot\frac{p(l,n,k-1)-p(l,n,k+1)}{2\Delta x}+O(\Delta\, t),\qquad l\geqslant 1.\end{gathered}\tag{23}$$

В построенной разностной схеме (23) от функций $p(l,n,k)$ дискретных аргументов перейдем к функциям $\tilde{p}(l,t,x)$ непрерывных аргументов по формуле

$$p(l,n,k)=p(l,\frac{t}{\Delta t},\frac{x}{\Delta x})=\tilde{p}(l,t,x),$$

в узлах сетки $t{=}t_n,x{=}x_k$. Затем сеточные функции $\tilde{p}(l,t,x)$ естественным образом продлим до ступенчатых функций $\tilde{\tilde{p}}(l,t,x)$ непрерывных аргументов t,x таким образом, чтобы функции $\tilde{\tilde{p}}(l,t,x)$ были непрерывны справа в точках разрыва $t{=}t_n,x{=}x_k$. Введем ступенчатые функции $\tilde{Q}_l(t,x)$:

$$\tilde{\tilde{p}}(l,t,x)=\mathsf{P}\left\{\nu(t)=l,\; x\leqslant\lambda_{n\mathcal{M}}(t)<x+\Delta\, x\right\}\;=\tilde{Q}_l(t,x)\Delta x.$$

Заменив далее в разностной схеме (23) $x_k{=}x,x_{k-1}{=}x-\Delta x,x_{k+1}{=}x+\Delta x,1\leqslant k\leqslant m-1$, ступенчатые функции $\tilde{Q}_l(t,x)$ на непрерывные функции $Q_l(t,x)$ непрерывных аргументов пространства $\mathcal{L}$ получим уравнения относительно $Q_l(t,x)$, $l\geqslant 1$:

$$\begin{gathered}\frac{Q_l(t+\Delta t,x)-Q_l(t,x)}{\Delta t}=\frac{1}{2}x\Big(Q_{l-1}(t,x-\Delta x)+Q_{l-1}(t,x+\Delta x)\Big)-\\-\frac{1}{2}\Big((x-\Delta x+\mu)Q_l(t,x-\Delta\, x)+(x+\Delta x+\mu)Q_l(t,x+\Delta\, x)\Big)+\\+\frac{1}{2}\mu\Big(Q_{l+1}(t,x-\Delta\, x)+Q_{l+1}(t,x+\Delta x)\Big)+\end{gathered}$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\cdot\frac{Q_l(t,x-\Delta x)-2Q_l(t,x)+Q_l(t,x+\Delta x)}{(\Delta x)^2}+$$
$$-2p\cdot\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\cdot\frac{Q_l(t,x+\Delta x)-Q_l(t,x-\Delta x)}{2\Delta x}+O(\Delta t). \tag{24}$$

В результате предельного перехода при $\Delta t\to 0,\Delta x\to 0$ из (24) следуют уравнения (17) с учетом того, что $\Delta t=(\Delta x)^2/b, p=a/(2b)$.

Получим уравнение относительно $Q_0(t,x)$ во внутренних точках $x\in(\alpha,\beta)$. Пусть $l=0, 1\leqslant k\leqslant m-1$. Из (21) с учетом вероятностей перехода следует

$$\begin{gathered}
p(0,n+1,k)=p(0,n,k-1)p_{k-1,k}(0,0)+p(0,n,k+1)p_{k+1,k}(0,0)+\\
+p(0,n,k-1)p_{k-1,k}(1,0)+p(1,n,k+1)p_{k+1,k}(1,0)=\\
=-\frac{1}{2}\Delta t x_k\Big(p(0,n,k-1)+p(0,n,k+1)\Big)+\frac{1}{2}p(0,n,k-1)+\\
p(0,n,k+1))+\frac{1}{2}\mu\Delta t\Big(p(1,n,k-1)+p(1,n,k+1)\Big)+\\
+p\Delta x(p(0,n,k-1)-p(0,n,k+1))+o(\Delta t).
\end{gathered} \tag{25}$$

Из левой и правой частей равенства (25) вычтем $p(0,n,k)$, разделим обе части на Δt:

$$\begin{gathered}
\frac{p(0,n+1,k)-p(0,n,k)}{\Delta t}=-\frac{1}{2}x_k\Big(p(0,n,k-1)+p(0,n,k+1)\Big)+\\
+\frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\frac{p(0,n,k+1)-2p(0,n,k)+p(0,n,k-1)}{(\Delta x)^2}+\\
+\frac{1}{2}\mu\Big(p(1,n,k+1)+p(1,n,k-1)\Big)-\\
-2p\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\frac{p(0,n,k+1)-p(0,n,k-1)}{2\Delta x}.
\end{gathered}$$

От функций $p(l,n,k)$ дискретных аргументов перейдем к непрерывным функциям $Q_l(t,x)$ непрерывных аргументов пространства $\mathcal{L}$:

$$\begin{gathered}
\frac{Q_0(t+\Delta t,x)-Q_0(t,x)}{\Delta t}=-\frac{1}{2}x\Big(Q_0(t,x-\Delta x)+Q_0(t,x+\Delta x)\Big)+\\
+\frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\frac{Q_0(t,x-\Delta x)-2Q_0(t,x)+Q_0(t,x+\Delta x)}{\Delta^2 x}+\\
+\frac{1}{2}\mu\Big(Q_1(t,x-\Delta x)+Q_1(t,x+\Delta x)\Big)-\\
-2p\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\frac{Q_0(t,x+\Delta x)-Q_0(t,x-\Delta x)}{2\Delta x}.
\end{gathered} \tag{26}$$

В результате предельного перехода при $\Delta t\to 0,\Delta x\to 0$, $\Delta t=(\Delta x)^2/b, p=a/(2b)$ из уравнения (26) следует уравнение (16).

Получим уравнения относительно вероятностей состояния системы массового обслуживания $p(l,n,k)$ в граничных точках точках $k=0,k=m$ для $l\geqslant 0$, затем относительно нестационарных характеристик $Q_l(t,x)$ в граничных точках точках $x=\alpha,x=\beta$ для $l\geqslant 0$.

Применив формулу полной вероятности (21) и вероятности перехода для граничных точек, получим для $l \geqslant 1, k = 0$

$$
\begin{gathered}
p(l,n+1,0) = p(l-1,n,0)p_{0,0}(l-1,l) + p(l-1,n,1)p_{1,0}(l-1,l)+\\
+p(l,n,0)p_{0,0}(l,l) + p(l,n,1)p_{1,0}(l,l)+\\
+p(l+1,n,0)p_{0,0}(l+1,l) + p(l+1,n,1)p_{1,0}(l+1,l) =\\
= p(l-1,n,0)\Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big)x_0\Delta t + p(l-1,n,1)\Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big)x_1\Delta t+\\
+p(l,n,0)\Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big)\Big(1-(x_0+\mu)\Delta t\Big) + p(l,n,1)\Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big)\Big(1-(x_1+\mu)\Delta t\Big)+\\
+p(l+1,n,0)\Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big)\mu\Delta t + p(l+1,n,1)\Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big)\mu\Delta t + o(\Delta t) =\\
= \frac{1}{2}\Delta\, t x_0\Big(p(l-1,n,0)+p(l-1,n,1)\Big) + \frac{1}{2}\Big(p(l,n,0)+p(l,n,1)\Big) -\\
- p\Delta\, x\Big(p(l,n,0)+p(l,n,1)\Big) - \frac{1}{2}\Delta t(x_0+\mu)\Big(p(l,n,0)+p(l,n,1)\Big)+\\
+\frac{1}{2}\mu\Delta t\Big(p(l+1,n,0)+p(l+1,n,1)\Big) + o(\Delta t) =
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
= \frac{1}{2}\Big(p(l,n,0)+p(l,n,1)\Big) - p\Delta\, x\Big(p(l,n,0)+p(l,n,1)\Big)+\\
+\frac{1}{2}\mu\Delta t\Big(p(l+1,n,0)+p(l+1,n,1)\Big) - \frac{1}{2}\Delta t(x_0+\mu)\Big(p(l,n,0)+p(l,n,1)\Big)+\\
+\frac{1}{2}\Delta\, t x_0\Big(p(l-1,n,0)+p(l-1,n,1)\Big) + o(\Delta t).
\end{gathered} \tag{27}
$$

В (27) перейдем от функций $p(l,n,k)$ дискретных аргументов к непрерывным функциям $Q_l(t,x)$ непрерывных аргументов пространства $\mathcal{L}$:

$$
\begin{gathered}
Q_l(t+\Delta\, t,\alpha) = \frac{1}{2}\Big(Q_l(t,\alpha)+Q_l(t,\alpha+\Delta\, x)\Big) - p\Delta\, x\Big(Q_l(t,\alpha)+Q_l(t,\alpha+\Delta\, x)\Big)+\\
+\frac{1}{2}\mu\Delta\, t\Big(Q_{l+1}(t,\alpha)+Q_{l+1}(t,\alpha+\Delta\, x)\Big) - \frac{1}{2}\Delta\, t(\alpha+\mu)\Big(Q_l(t,\alpha)+Q_l(t,\alpha+\Delta\, x)\Big)+\\
+\frac{1}{2}\Delta\, t\alpha\Big(Q_{l-1}(t,\alpha)+Q_{l-1}(t,\alpha+\Delta\, x)\Big) + o(\Delta\, t), \qquad l \geqslant 1.
\end{gathered} \tag{28}
$$

Применив формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано к функциям $Q_l(t+ +\Delta t,\alpha)$ по переменной t

$$
Q_l(t+\Delta\, t,\alpha) = Q_l(t,\alpha) + \frac{\partial Q_l(t,\alpha)}{\partial t}\Delta t + o(\Delta t),
$$

к функциям $Q_l(t,\alpha+\Delta x)$ по переменной x в окрестности точки $x=\alpha$

$$
Q_l(t,\alpha+\Delta x) = Q_l(t,\alpha) + \frac{\partial Q_l(t,\alpha)}{\partial x}\Delta\, x + o(\Delta\, x),
$$

получим в (28)

$$
Q_l(t,\alpha) + \frac{\partial Q_l(t,\alpha)}{\partial t}\Delta\, t + o(\Delta\, t) = Q_l(t,\alpha) + \frac{1}{2}\Delta\, x\frac{\partial Q_l(t,\alpha)}{\partial x} - 2p\Delta\, xQ_l(t,\alpha) -
$$

$$
\begin{gathered}
-p(\Delta x)^2\frac{\partial Q_l(t,\alpha)}{\partial x}+\mu\Delta\, tQ_{l+1}(t,\alpha)+\frac{1}{2}\mu\Delta\, t\Delta\, x\frac{\partial Q_{l+1}(t,\alpha)}{\partial x}-\\
-(\alpha+\mu)\Delta\, tQ_l(t,\alpha)-\frac{1}{2}(\alpha+\mu)\Delta\, t\Delta\, x\frac{\partial Q_l(t,\alpha)}{\partial x}+\alpha\Delta\, tQ_{l-1}(t,\alpha)+\\
+\frac{1}{2}\alpha\Delta\, t\Delta\, x\frac{\partial Q_{l-1}(t,\alpha)}{\partial x}+o(\Delta\, x),\qquad l\geqslant 1.
\end{gathered}\tag{29}
$$

После приведения подобных слагаемых $Q_l(t,\alpha)$ в (29), деления на Δx, в результате предельного перехода при $\Delta t\to 0, \Delta x\to 0$ получим уравнения

$$
\frac{1}{2}\frac{\partial Q_l(t,\alpha)}{\partial x}-2pQ_l(t,\alpha)=0, l\geqslant 1.
$$

Откуда с учетом $p=a/2b$ следуют граничные уравнения (18) при $x=\alpha, l\geqslant 1$.

Применив формулу полной вероятности (21) и вероятности перехода для граничных точек, получим для $l=0, k=0$

$$
\begin{gathered}
p(0,n+1,0)=p(0,n,0)p_{0,0}(0,0)+p(0,n,1)p_{1,0}(0,0)+\\
+p(1,n,0)p_{0,0}(1,0)+p(1,n,1)p_{0,0}(1,0)=\\
=p(0,n,0)\Big(\frac{1}{2}-p\Delta x\Big)\Big(1-x_0\Delta t\Big)+p(0,n,0)\Big(\frac{1}{2}-p\Delta x\Big)\Big(1-x_1\Delta t\Big)+\\
+p(1,n,0)\Big(\frac{1}{2}-p\Delta x\Big)\mu\Delta t+p(1,n,1)\Big(\frac{1}{2}-p\Delta x\Big)\mu\Delta t+o(\Delta t)=\\
=\frac{1}{2}\Big(p(0,n,0)+p(0,n,1)\Big)-\\
-p\Delta\, x\Big(p(0,n,0)+p(0,n,1)\Big)-\frac{1}{2}\Delta tx_0\Big(p(0,n,0)+p(0,n,1)\Big)+\\
+\frac{1}{2}\mu\Delta t\Big(p(1,n,0)+p(1,n,1)\Big)+o(\Delta t)=
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
=\frac{1}{2}\Big(p(0,n,0)+p(0,n,1)\Big)-p\Delta\, x\Big(p(0,n,0)+p(0,n,1)\Big)+\\
+\frac{1}{2}\mu\Delta t\Big(p(1,n,0)+p(1,n,1)\Big)-\frac{1}{2}\Delta tx_0\Big(p(0,n,0)+p(0,n,1)\Big)+o(\Delta t).
\end{gathered}\tag{30}
$$

В (30) перейдем от функций $p(l,n,k)$ дискретных аргументов к непрерывным функциям $Q_l(t,x)$ непрерывных аргументов пространства $\mathcal{L}$:

$$
\begin{gathered}
Q_0(t+\Delta\, t,\alpha)=\frac{1}{2}\Big(Q_0(t,\alpha)+Q_0(t,\alpha+\Delta\, x)\Big)-p\Delta\, x\Big(Q_0(t,\alpha)+Q_0(t,\alpha+\Delta\, x)\Big)+\\
+\frac{1}{2}\mu\Delta\, t\Big(Q_1(t,\alpha)+Q_1(t,\alpha+\Delta\, x)\Big)-\frac{1}{2}\Delta\, t\alpha\Big(Q_l(t,\alpha)+Q_0(t,\alpha+\Delta\, x)\Big)+o(\Delta\, t).
\end{gathered}\tag{31}
$$

Применив формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано к функции $Q_0(t+\Delta t,\alpha)$ по переменной t, к функции $Q_0(t,\alpha+\Delta x)$ по переменной x, в окрестности точки $x=\alpha$ получим в (31)

$$
Q_0(t,\alpha)+\frac{\partial Q_0(t,\alpha)}{\partial t}\Delta\, t+o(\Delta\, t)=
$$

$$= Q_0(t,\alpha)+\frac{1}{2}\Delta x\frac{\partial Q_0(t,\alpha)}{\partial x}-2p\Delta xQ_0(t,\alpha)-p(\Delta x)^2\frac{\partial Q_0(t,\alpha)}{\partial x}+\mu\Delta tQ_1(t,\alpha)+$$
$$+\frac{1}{2}\mu\Delta t\Delta x\frac{\partial Q_1(t,\alpha)}{\partial x}-\alpha\Delta tQ_l(t,\alpha)-\frac{1}{2}\alpha\Delta t\Delta x\frac{\partial Q_0(t,\alpha)}{\partial x}+o(\Delta x). \quad (32)$$

После приведения подобных слагаемых $Q_0(t,\alpha)$ в (32), деления на Δx, в результате предельного перехода при $\Delta t\to 0, \Delta x\to 0$ получим уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Q_l(t,\alpha)}{\partial x}-2pQ_l(t,\alpha)=0, \qquad l=0.$$

Откуда с учетом $p=a/2b$ следует граничное уравнение (18) при $x=\alpha, l=0$.

С применением аналогичных рассуждений выводятся граничные уравнения (18) при $x=\beta, l\geqslant 0$.

Для $k=m$

$$p(l,n+1,m)=p(l-1,n,m)p_{m,m}(l-1,l)+p(l-1,n,m-1)p_{m-1,m}(l-1,l)+$$
$$+p(l,n,m)p_{m,m}(l,l)+p(l,n,m-1)p_{m-1,m}(l,l)+$$
$$+p(l+1,n,m)p_{m,m}(l+1,l)+p(l+1,n,m-1)p_{m-1,m}(l+1,l)=$$

$$=\frac{1}{2}\Delta tx_m\Big(p(l-1,n,m)+p(l-1,n,m-1)\Big)+\frac{1}{2}\Big(p(l,n,m)+$$
$$+p(l,n,m-1)\Big)+p\Delta x\Big(p(l,n,m)+p(l,n,m-1)\Big)+$$
$$+\frac{1}{2}\mu\Delta t\Big(p(l+1,n,m)+p(l+1,n,m-1)\Big)-$$
$$-\frac{1}{2}\Delta t(x_m+\mu)\Big(p(l,n,m)+p(l,n,m-1)\Big)+o(\Delta t), \qquad l\geqslant 1. \quad (33)$$

В (33) перейдем от функций $p(l,n,k)$ дискретных аргументов к непрерывным функциям $Q_l(t,x)$ непрерывных аргументов пространства $\mathcal{L}$:

$$Q_l(t+\Delta t,\beta)=\frac{1}{2}\Big(Q_l(t,\beta)+Q_l(t,\beta-\Delta x)\Big)+p\Delta x\Big(Q_l(t,\beta)+Q_l(t,\beta-\Delta x)\Big)+$$
$$+\frac{1}{2}\mu\Delta t\Big(Q_{l+1}(t,\beta)+Q_{l+1}(t,\beta-\Delta x)\Big)-\frac{1}{2}\Delta t(\beta+\mu)\Big(Q_l(t,\beta)+Q_l(t,\beta-\Delta x)\Big)+ \quad (34)$$
$$+\frac{1}{2}\Delta t\beta\Big(Q_{l-1}(t,\beta)+Q_{l-1}(t,\beta-\Delta x)\Big)+o(\Delta t), \qquad l\geqslant 1.$$

Для $l=0$

$$Q_0(t+\Delta t,\beta)=\frac{1}{2}\Big(Q_0(t,\beta)+Q_0(t,\beta-\Delta x)\Big)+p\Delta x\Big(Q_0(t,\beta)+Q_0(t,\beta-\Delta x)\Big)+$$
$$+\frac{1}{2}\mu\Delta t\Big(Q_1(t,\beta)+Q_1(t,\beta-\Delta x)\Big)-\frac{1}{2}\Delta t\beta\Big(Q_0(t,\beta)+Q_0(t,\beta-\Delta x)\Big)+o(\Delta t). \quad (35)$$

В уравнениях (34), (35) применив формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано к функциям $Q_l(t+\Delta t,\beta)$ по переменной t, к функциям $Q_l(t,\beta-\Delta x)$ по переменной x, в окрестности точки $x=\beta$ получим

$$Q_l(t,\beta)+\frac{\partial Q_l(t,\beta)}{\partial t}\Delta t+o(\Delta t)=$$

$$
\begin{gathered}
=Q_l(t,\beta)-\frac{1}{2}\Delta\, x\frac{\partial Q_l(t,\beta)}{\partial x}+2p\Delta\, xQ_l(t,\beta)-p(\Delta x)^2\frac{\partial Q_l(t,\beta)}{\partial x}+\mu\Delta\, tQ_{l+1}(t,\beta)-\\
-\frac{1}{2}\mu\Delta\, t\Delta\, x\frac{\partial Q_{l+1}(t,\beta)}{\partial x}-(\beta+\mu)\Delta\, tQ_l(t,\beta)+\frac{1}{2}(\beta+\mu)\Delta\, t\Delta\, x\frac{\partial Q_l(t,\beta)}{\partial x}+\\
+\beta\Delta\, tQ_{l-1}(t,\beta)-\frac{1}{2}\beta\Delta\, t\Delta\, x\frac{\partial Q_{l-1}(t,\beta)}{\partial x}+o(\Delta\, x),\qquad l\geqslant 1.
\end{gathered}
\tag{36}
$$

Для $l=0$

$$
\begin{gathered}
Q_0(t,\beta)+\frac{\partial Q_0(t,\beta)}{\partial t}\Delta\, t+o(\Delta\, t)=Q_0(t,\beta)-\frac{1}{2}\Delta\, x\frac{\partial Q_0(t,\beta)}{\partial x}+\\
+2p\Delta\, xQ_0(t,\beta)-p(\Delta x)^2\frac{\partial Q_0(t,\beta)}{\partial x}+\mu\Delta\, tQ_1(t,\beta)-\mu\Delta\, t\beta Q_0(t,\beta)-\\
-\frac{1}{2}\mu\Delta\, t\Delta\, x\frac{\partial Q_1(t,\beta)}{\partial x}+\frac{1}{2}\beta\Delta\, t\Delta\, x\frac{\partial Q_0(t,\beta)}{\partial x}+o(\Delta\, x).
\end{gathered}
\tag{37}
$$

Из уравнений (36), (37) после приведения подобных $Q_l(t,\beta), Q_0(t,\beta)$, деления на Δx в результате предельного перехода при $\Delta t\to 0, \Delta x\to 0$ получим уравнения

$$
\frac{1}{2}\frac{\partial Q_l(t,\beta)}{\partial x}-2pQ_l(t,\beta)=0,\qquad l\geqslant 0.
$$

Откуда, так как $p=a/2b$, следуют граничные уравнения (18) при $x=\beta$.

Начальные условия (19) заданы. Условие нормировки (20) выполняется по определению нестационарных характеристик $Q_l(t,x)$ и следует из формулы полной вероятности

$$
\begin{gathered}
\sum_{l\geqslant 0}Q_l(t,x)dx=\sum_{l\geqslant 0}\mathsf{P}\{\nu(t)=l,\ x\leqslant\lambda(t)<x+dx\}=\\
=\mathsf{P}\{x\leqslant\lambda(t)<x+dx\}=f(t,x)dx.
\end{gathered}
$$

Теорема 3 доказана. $\square$

Заметим, что уравнения системы (16), (17) отличаются от нестационарных дифференциальных уравнений Колмогорова – Чепмена наличием слагаемых с дифференциальным оператором Фоккера – Планка $\mathcal{A}Q_l(t,x)$. Поэтому уравнения (16), (17) являются нестационарными уравнениями типа Колмогорова – Чепмена с оператором Фоккера – Планка.

Теорема 4. *Если в СМО существует стационарный режим, то стационарные характеристики $q_l(x)\in C^2[\alpha,\beta]$, $l\geqslant 0$, рассматриваемой СМО удовлетворяют следующим уравнениям:*

1) во внутренних точках $x\in(\alpha,\beta)$ стационарным уравнениям типа Колмогорова — Чепмена с дифференциальным оператором Фоккера – Планка

$$
-xq_0(x)+\mu q_1(x)+\frac{b}{2}q_0''(x)-aq_0'(x)=0,
\tag{38}
$$

$$
xq_{l-1}(x)-(x+\mu)q_l(x)+\mu q_{l+1}(x)+\frac{b}{2}q_l''(x)-aq_l'(x)=0,\qquad l\geqslant 0,
\tag{39}
$$

2) в граничных точках $r_1=\alpha, r_2=\beta$ *краевым условиям*

$$\frac{b}{2}q_l'(r_i) - aq_l(r_i) = 0,\ l \geqslant 0, i = 1, 2,$$

3) условию нормировки

$$\sum_{l\geqslant 0} q_l(x) = f(x).$$

Доказательство. Уравнения для стационарных характеристик числа заявок $q_l(x)$ получены из уравнений теоремы 3 с учетом того, что в стационарном режиме $\Big(Q_l(t,x)\Big)_t' = 0, l \geqslant 0$, нестационарные характеристики переходят в стационарные. Теорема 4 доказана. □

Заметим, что уравнения системы (38), (39) отличаются от стационарных дифференциальных уравнений Колмогорова – Чепмена наличием слагаемых с дифференциальным оператором Фоккера – Планка $\mathcal{A}q_l(x)$. Поэтому уравнения (38), (39) являются стационарными уравнениями типа Колмогорова – Чепмена с дифференциальным оператором Фоккера – Планка.

Заключение

Благодаря использованию методики (динамики) Колмогорова — Чепмена в работе получены краевые задачи для нестационарной и стационарной плотностей диффузионного процесса, нестационарных и стационарных характеристик числа заявок в СМО с дважды стохастическим пуассоновским входным потоком заявок с диффузионной интенсивностью входного потока с ненулевым коэффициентом сноса и упругими границами, экспоненциальным обслуживанием, одним обслуживающим прибором и бесконечным накопителем.

Список литературы

[1] Г. И. Ивченко, В. А. Каштанов, И. Н. Коваленко, *Теория массового обслуживания*, Высшая школа, М., 1982.

[2] Н. Ш. Кремер, *Исследование операций в экономике*, ЮРАЙТ, М., 2010.

[3] Б. В. Гнеденко, И.Н. Коваленко, *Введение в теорию массового обслуживания*, Наука, М., 1987.

[4] Д. Коузи, *Компьютерные сети. Книга 2: Networking Essentials*, Диасофт, Киев, 1999.

[5] М. Левин, *Компьютерные сети. Устройство, подключение и использование.*, Оверлей, М., 2000.

[6] Н. И. Головко, В. О. Каретник, В. Е. Танин, И. И. Сафонюк, “Исследование моделей систем массового обслуживания в информационных сетях”, *Сибирский журнал индустриальной математики*, **2(34)**, (2008), 50–64.

[7] A. D. Crescenzo, “Diffusion approximation to a queueing system with time-dependent arrival and service rates”, *Queueing Systems*, **14(19)**, (1995), 41–62.

[8] R. Atar, “A diffusion model of scheduling control in queueing systems with many servers”, *Ann. Appl. Probab*, **15(1B)**, (2005), 820–852.

[9] M. Miyazawa, "Diffusion approximation for stationary analysis of queues and their networks: a review", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **58(1)**, (2015), 104–148.

[10] Д. Б. Прокопьева, Т. А. Жук, Н. И. Головко, "Вывод уравнений для систем массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса", *Известия КГТУ*, **46**, (2017), 184–193.

[11] Л. Клейнрок, *Теория массового обслуживания*, Машиностроение, М., 1979.

[12] А. Т. Баруча-Рид, *Элементы теории марковских процессов и их приложения*, Наука, М., 1969.

[13] Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей*, Наука, М., 1988.

[14] И. Н. Бекман, *Математика диффузии : учебное пособие*, ОнтоПринт, М., 2016.

Поступила в редакцию
17 апреля 2019 г.

Prokopieva D. B., Zhuk T. A, Golovko N. I. Derivation of Kolmogorov – Chapman type equations with Fokker – Planck operator. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2020. V. 20. No 1. P. 90–107.

ABSTRACT

In this paper we obtain the differential equation of the type Kolmogorov – Chapman with differential operator of the Fokker – Planck, having theoretical and practical value in the differential equations theory. Equations concerning non-stationary and stationary characteristics of the number of applications obtained for a class of Queuing systems (QS) with an infinite storage device, one service device with exponential service, the input of which is supplied twice stochastic a Poisson flow whose intensity is a random diffusion process with springy boundaries and a non-zero drift coefficient. Service systems with diffusion intensity of the input flow are used for modeling of global computer networks nodes.

Key words: *Kolmogorov – Chapman type differential equations, Fokker – Planck differential operator, double stochastic Poisson flow, diffusion process, Queuing system, probabilistic characteristics of the applications number.*