Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20. № 1. С. 108–113

УДК 517.95
MSC2010 35J61, 35Q79

© А. Ю. Чеботарев[1]

Неоднородная краевая задача радиационного теплообмена для многокомпонентной среды

Представлен анализ разрешимости неоднородной краевой задачи для нелинейных уравнений радиационного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения на поверхностях разрыва коэффициента преломления. Доказана нелокальная однозначная разрешимость краевой задачи.

Ключевые слова: *стационарные уравнения радиационного теплообмена, френелевские условия сопряжения, неоднородная краевая задача, нелокальная разрешимость.*

Постановка краевой задачи

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, включающую в себя непересекающиеся подобласти Ω_j, $j=1,\ldots,p$. Через $\Omega_0 = \Omega \setminus \left(\bigcup\limits_{j=1}^{p} \bar{\Omega}_j \right)$ обозначим внешнюю подобласть; $\Gamma = \partial\Omega \subset \Gamma_0 = \partial\Omega_0$, $\Gamma_j = \partial\Omega_j \subset \Gamma_0$, $j=1,\ldots,p$.

Радиационный теплообмен будем описывать нормализованной температурой θ и нормализованной интенсивностью теплового излучения φ, усредненной по всем направлениям. В каждой из областей Ω_j, $j=0,\ldots,p$ указанные функции удовлетворяют уравнениям

$$-a\Delta\theta + b(\theta^3|\theta| - \varphi) = f, \quad -\alpha\Delta\varphi + \beta(\varphi - \theta^3|\theta|) = \mathrm{g}. \tag{1}$$

Положительные кусочно-постоянные параметры a, b, α и β, описывающие свойства среды, определены в [1], а функции f,g описывают тепловые и радиационные источники.

Условия отражения и преломления на внутренних границах приводят к нестандартным условиям сопряжения для интенсивности излучения. Эти условия получены в статье [1]. Учитывая непрерывность температуры и теплового потока на

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: cheb@iam.dvo.ru

внутренних границах, получаем условия на $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, $j = 1,\dots,p$ для температуры $\theta_j = \theta|_{\Omega_j}$ и интенсивности излучения $\varphi_j = \varphi|_{\Omega_j}$

$$\theta_0 = \theta_j, \quad a_0 \partial_n \theta_0 = a_j \partial_n \theta_j, \tag{2}$$

$$n_0^2 \alpha_0 \partial_n \varphi_0 = n_j^2 \alpha_j \partial_n \varphi_j, \quad h_j(\varphi_j - \varphi_0) = \alpha_0 \partial_n \varphi_0. \tag{3}$$

Здесь $a_j, \alpha_j, n_j = a, \alpha, n|_{\Omega_j}$, $h_j > 0$ – параметры, зависящие от коэффициентов отражения на внутренних границах. Через ∂_n обозначаем производную по направлению внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе соответствующей области.

Краевые условия на внешней границе $\Gamma = \partial\Omega$ имеют стандартный вид.

$$a\partial_n \theta + c(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \ \ \alpha \partial_n \varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \tag{4}$$

где θ_b – заданная граничная температура, c – коэффициент теплопередачи, $0 < \gamma \leqslant 1/2$ – параметр, зависящий от коэффициента излучения на Γ.

Краевые задачи для уравнений радиационного теплообмена, где рассматривается диффузионное приближение уравнения переноса излучения, но не учитываются эффекты отражения и преломления на границах разрыва коэффициента преломления, изучены достаточно полно. Отметим статьи [2–18], посвященные краевым, экстремальным и обратным задачам для диффузионных уравнений радиационного теплообмена. Интересные краевые задачи, учитывающие радиационный теплообмен, рассмотрены в [19–21].

Отметим, что однородная краевая задача (1)–(4), где $f = 0, g = 0$ и граничная температура θ_b является ограниченной, рассмотрена в [1]. Задача с источниками, которые моделируются функционалами или интегрируемыми функциями, представляет интерес для анализа задач оптимального управления и обратных задач для многокомпонентных сред. В данной заметке анонсируются результаты анализа краевой задачи (1)–(4), приводятся новые априорные оценки, которые позволяют доказать нелокальную разрешимость.

1. Слабое решение краевой задачи

Пусть $\Omega, \Omega_j \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченные липшицевы области. Далее стандартным образом обозначаем через L^s, $1 \leqslant s \leqslant \infty$ пространства s-интегрируемых функций и через $H^s = W_2^s$ — пространства Соболева, $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$. Пусть

$$W = \{w \in H, \ w_j = w|_{\Omega_j} \in H^1(\Omega_j), \ j = 0,\dots,p\} \subset L^6(\Omega).$$

Пространство H будем отождествлять с сопряженным пространством H'. Тогда $V \subset W \subset H = H' \subset W' \subset V'$. Значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$ и скалярное произведение в H, если $f, v \in H$, обозначим через (f, v).

$$\|v\|^2 = (v,v); \ (v,w)_j : = (v,w)_{L^2(\Omega_j)}, \ \|v\|_j^2 : = (v,v)_j; \ (v,w)_W = \sum_{j=0}^{p} (v,w)_{H^1(\Omega_j)}.$$

Пусть данные задачи удовлетворяют следующим условиям:
(i) $c,\gamma\in L^\infty(\Gamma)$, $c\geqslant c_0>0$, $\gamma\geqslant\gamma_0>0$, $c_0,\gamma_0=\text{const}$;
(ii) $a,b,\alpha,\beta,n|_{\Omega_j}=a_j,b_j,\alpha_j,\beta_j,n_j>0$, $b=\sigma\beta n^2$, $\sigma=Const>0$;
(iii) $0\leqslant\theta_b\in L^{16/3}(\Gamma)$; $f\in V'$, $\mathrm{g}\in L^{5/4}(\Omega)$.

Введем операторы $A_1\colon V\to V'$, $A_2\colon W\to W'$ и функционалы $f\in V'$, $\mathrm{g}\in W'$, используя следующие равенства, справедливые для $\theta,\eta\in V$, $\varphi,w\in W$:

$$(A_1\theta,\eta)=(a\nabla\theta,\nabla\eta)+\int\limits_\Gamma c\theta\eta d\Gamma,$$

$$\frac{1}{\sigma}(A_2\varphi,w)=\sum_{j=0}^{p}\alpha_j n_j^2(\nabla\varphi,\nabla w)_j+n_0^2\int\limits_\Gamma\gamma\varphi w d\Gamma+n_0^2\sum_{j=1}^{p}h_j\int\limits_{\Gamma_j}(\varphi_0-\varphi_j)(w_0-w_j)d\Gamma,$$

$$(f_b,\eta)=\int\limits_\Gamma c\theta_b\eta d\Gamma,\quad (\mathrm{g}_b,w)=\sigma n_0^2\int\limits_\Gamma\gamma\theta_b^4 w d\Gamma.$$

Здесь $\varphi_j,w_j=\varphi,w|_{\Omega_j}$.

Скалярное произведение и норму в пространстве V удобно задать, используя оператор A_1, $(u,v)_V=(A_1u,v)$, $\|v\|_V^2=(A_1v,v)$. Поскольку билинейная форма (A_1u,v) симметрична и коэрцитивна, то введенная норма эквивалентна стандартной норме пространства V.

Будем также использовать неравенства непрерывности вложений $V\subset L^s(\Omega)$, $W\subset L^s(\Omega)$, $1\leqslant s\leqslant 6$:

$$\|v\|_{L^s(\Omega)}\leqslant K_1\|v\|_V,\ v\in V,\quad \|w\|_{L^s(\Omega)}\leqslant K_2\|w\|_W,\ w\in W,\quad 1\leqslant s\leqslant 6.$$

Для возрастающей степенной функции используем обозначение $[s]^q=|s|^q\operatorname{sign}s$, $q>0$, $s\in\mathbb{R}$.

Определение. Пара $\{\theta,\varphi\}\in V\times W$ называется слабым решением задачи (1)–(4), если

$$A_1\theta+b([\theta]^4-\varphi)=f_b+f,\quad A_2\varphi+b(\varphi-[\theta]^4)=\mathrm{g}_b+\sigma n^2\mathrm{g}. \tag{5}$$

Слабая формулировка задачи (1)–(4) выводится путем умножения уравнений (1) на тестовые функции $\eta\in V$ и $\sigma n^2\psi\in W$ соответственно, интегрирования по частям по областям Ω_j, сложения полученных равенств и применения краевых условий (4) и условий сопряжения (2), (3).

2. Нелокальная разрешимость краевой задачи

Задачу (5) можно свести к задаче отыскания неподвижной точки нелинейного оператора в пространстве V. Билинейная форма $\{\varphi,\psi\}\to(A_2\varphi+b\varphi,\psi)$ является непрерывной, симметричной и положительно определенной в пространстве W. Поэтому из леммы Лакса–Мильграма следует, что для каждого $\eta\in W'$ существует единственное решение $\varphi\in W$ уравнения $A_2\varphi+b\varphi=\eta$ и оператор $(A_2+bI)^{-1}\colon W'\to W$ непрерывен. Определим оператор $F\colon V\to V$ такой, что

$$(F(\theta),z)_V=(f_b+f-b([\theta]^4-\varphi),z)\ \ \forall z\in V;\quad \varphi=(A_2+bI)^{-1}(\mathrm{g}_b+\sigma n^2\mathrm{g}+b[\theta]^4).$$

Тогда, с учетом определения скалярного произведения в пространстве V, задача (5) равносильна следующей задаче

$$\theta = F(\theta), \quad \varphi = (A_2 + bI)^{-1}(\mathrm{g}_b + \sigma n^2 \mathrm{g} + b[\theta]^4).$$

Нетрудно получить оценку нормы непрерывности оператора F для $\theta_{1,2} \in V$, $\|\theta_{1,2}\|_V \leqslant \rho$,

$$\|F(\theta_1) - F(\theta_2)\|_V \leqslant K_1 \left(C_1 + \max b C_2\right) \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^4(\Omega)}.$$

Здесь $C_1 = 4\max b K_1^3 \rho^3$, $C_2 = C_1 K_2 / \min\{\sigma\alpha n^2, b\}$. Вложение $V \subset L^4(\Omega)$ непрерывно и компактно, и следовательно, из полученной оценки вытекает, что оператор F вполне непрерывен. Таким образом, на основании принципа Лере – Шаудера, разрешимость задачи (5) следует из равномерной по $\lambda \in (0,1]$ ограниченности в пространстве V множества решений операторного уравнения $\theta = \lambda F(\theta)$, которое эквивалентно системе

$$\frac{1}{\lambda} A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + f, \quad A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) = \mathrm{g}_b + \sigma n^2 \mathrm{g}. \tag{6}$$

Требуемая оценка выводится путем скалярного умножения первого уравнения в (6) на θ, второго на регуляризацию функции $[\varphi]^{1/4}$ и затем сложения полученных равенств. Применяя подход из [13] и учитывая неравенство монотонности $([\theta]^4 - \varphi)(\theta - [\varphi]^{1/4}) \geqslant 0$ и коэрцитивность в H квадратичной формы

$$E(\zeta) = \sigma \sum_{j\,=\,0}^{p} \alpha_j n_j^2 \|\nabla\zeta\|_j +$$
$$+\sigma n_0^2 \int_\Gamma \gamma\zeta^2 d\Gamma + \sigma n_0^2 \sum_{j\,=\,1}^{p} h_j \int_{\Gamma_j} ([\zeta_0]^{8/5} - [\zeta_j]^{8/5})([\zeta_0]^{2/5} - [\zeta_j]^{2/5}) d\Gamma,$$

получаем оценку $\|\theta\|_V^2 \leqslant \|f\|_{V'}^2 + 2C_0$. Здесь постоянная C_0 не зависит от $\lambda \in (0,1]$. Следовательно, существует неподвижная точка оператора F, что означает разрешимость задачи (5).

Используя метод, предложенный в [1], где рассматривалась однородная задача с условиями $f = 0, \mathrm{g} = 0$, $\theta_b \in L^\infty(\Gamma)$, можно доказать единственность решения. Таким образом, справедлив следующий результат.

Теорема. Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда существует единственное слабое решение задачи (1)–(4).

Список литературы

[1] Alexander Yu. Chebotarev and Gleb V. Grenkin and Andrey E. Kovtanyuk and Nikolai D. Botkin and Karl-Heinz Hoffmann, “Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **57**, (2018), 290–298.

[2] R. Pinnau, “Analysis of Optimal Boundary Control for Radiative Heat Transfer Modelled by the SP_1-System”, *Comm. Math. Sci.*, **5**:4, (2007), 951–969.

[3] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem”, *J. Math. Anal. Appl.*, **409**:2, (2014), 808–815.

[4] А. Е. Ковтанюк, А. Ю. Чеботарев, “Стационарная задача сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:4, (2014), 711–719; *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:4, (2014), 719–726.

[5] Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю., “Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом”, *Дифференциальные уравнения*, **50**:12, (2014), 1590–1597.

[6] Kovtanyuk Andrey E., Chebotarev Alexander Yu., Botkin Nikolai D., and Hoffmann Karl-Heinz, “Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive convective radiative heat transfer”, *J. Math. Anal. Appl.*, **412**, (2014), 520–528.

[7] Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., and Hoffman Karl-Heinz, “Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model,”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **20**, (2015), 776–784.

[8] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, “Неоднородная нестационарная задача сложного теплообмена”, *Сибирские электронные математические известия*, **12**:11, (2015), 562–576.

[9] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, “Нестационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом”, *Ж. вычисл. матем. физ.*, **56**:2, (2016), 275–282.

[10] Chebotarev A., Kovtanyuk A., Grenkin G., Botkin N., and Hoffman K.-H. “Boundary optimal control problem of complex heat transfer model”, *J. Math. Anal. Appl.*, **433**:2, (2016), 1243–1260.

[11] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects”, *J. Math. Anal. Appl.*, **439**, (2016), 678–689.

[12] Alexander Yu. Chebotarev, Andrey E. Kovtanyuk, Gleb V. Grenkin, Nikolai D. Botkin, and Karl Heinz Hoffmann, “Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model”, *Applied Mathematics and Computation*, **289**:10, (2016), 371–380.

[13] A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, “Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer”, *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, **51**:6, (2017), 2511–2519.

[14] A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange”, *J. Math. Anal. Appl.*, **460**:2, (2018), 737–744.

[15] A. Yu. Chebotarev, R. Pinnau, “An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer”, *J. Math. Anal. Appl.*, **472**:1, (2019), 737–744.

[16] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, “Обратная задача для уравнений сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **59**:8, (2019), 1420–1430.

[17] Alexander Yu. Chebotarev and Andrey E. Kovtanyuk and Nikolai D. Botkin, “Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **75**, (2019), 262–269.

[18] А. Г. Колобов, Т. В. Пак, А. Ю. Чеботарев, “Стационарная задача радиационного теплообмена с граничными условиями типа Коши”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **59**:7, (2019), 1258–1263.

[19] A. A. Amosov, “Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative–conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency”, *Journal of Mathematical Sciences*, **164**, (2010), 309–344.

[20] A. A. Amosov, “Unique Solvability of Stationary Radiative-Conductive Heat Transfer Problem in a System of Semitransparent Bodies”, *Journal of Mathematical Sciences*, **224**:5, (2017), 618–646.

[21] A. A. Amosov, N. E. Krymov, "On a Nonstandard Boundary Value Problem Arising in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems", *Journal of Mathematical Sciences*, **244**:3, (2020), 357–377.

Поступила в редакцию
11 мая 2020 г.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-01-00113.)

Chebotarev A. Yu. Inhomogeneous boundary-value problem of radiation heat transfer for a multicomponent medium. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2020. V. 20. No 1. P. 108–113.

ABSTRACT

An analysis of the solvability of an inhomogeneous boundary value problem for the equations of radiative heat transfer with the Fresnel conjugation conditions is presented. The nonlocal unique solvability of the boundary value problem is proved.

Key words: *stationary equations of radiative heat transfer, Fresnel conjugation conditions, inhomogeneous boundary value problem, nonlocal solvability.*