Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20. № 2. С. 127–134

УДК 517.95, 519.63
MSC2010 35Q93, 78A46, 65N21

© Г. В. Алексеев[1,2], А. В. Лобанов[1,2], В. И. Сильченко[2]

Экономичный метод решения двумерной задачи электростатической маскировки

Предложен и реализован экономичный численный алгоритм решения двумерной задачи электростатической маскировки. Алгоритм основан на использовании M-слойной оболочки, каждый слой которой заполнен одним из двух заданных материалов, а материал последнего слоя определяется путем минимизации специального функционала качества, связанного с маскировочной эффективностью искомой оболочки.

Ключевые слова: *обратные задачи, электростатическая маскировка, метод оптимизации, метод роя частиц, схема чередующегося дизайна*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202013

Введение

Большое внимание в последние годы уделяется разработке методов решения задач дизайна специальных устройств, служащих для маскировки материальных тел от статических полей. В первых работах в этой области [1–4] авторы использовали transformation optics (TO) method, разработанный в пионерских статьях [5, 6] для решения задач электромагнитной маскировки. Нужно отметить, что полученные с помощью данного метода решения играют важную в теоретическом плане роль, но они обладают и рядом недостатков. Одним из главных недостатков является трудность их технической реализации, поскольку полученным с помощью TO подхода решениям отвечают оболочки, заполненные сингулярными анизотропными средами, отсутствующими в природе.

Один из методов преодоления трудностей технической реализации указанных решений состоит в замене сингулярных анизотропных оболочек слоистыми оболочками, состоящими из конечного числа слоев, заполненных двумя чередующимися

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.
[2] Дальневосточный федеральный университет, 690091, г. Владивосток, ул. Суханова, 8.
Электронная почта: `alekseev@iam.dvo.ru` (Г. В. Алексеев), `alekslobanov1@mail.ru` (А. В. Лобанов), `silver19987@gmail.com` (В. И. Сильченко).

однородными изотропными материалами [3]. Это действительно упрощает техническую реализацию спроектированных по такой схеме оболочек. Однако, как показали результаты численного решения задач маскировки от статических полей, выполненные в [7–10], спроектированные по схеме чередующегося дизайна оболочки не всегда обладают высокой маскировочной эффективностью.

Основываясь на полученных в цитируемых работах результатах, мы предложим ниже экономичный эффективный метод решения задачи маскировки для двумерной модели электростатики. На основе анализа вычислительных экспериментов, выполненных с использованием метода роя частиц по схеме, предложенной в [7], мы покажем, что разработанный метод позволяет проектировать маскировочные слоистые оболочки, обладающие наивысшей эффективностью (в рассматриваемом классе устройств) и простотой технической реализации.

1. Постановка прямой и обратной задач

Рассмотрим область Ω в $\mathbb{R}^2$, имеющую в полярных координатах (r,φ) форму кругового кольца $\Omega=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2: a<r=|\mathbf{x}|<b\}$, где a и b – положительные константы. Положим $\Omega_i=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2: |\mathbf{x}|<a\}$, $\Omega_e^\infty=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2: |\mathbf{x}|>b\}$. Будем предполагать, что эти области Ω_i и Ω_e^∞ заполнены однородной изотропной средой с постоянной диэлектрической проницаемостью ε_0, тогда как область Ω заполнена неоднородной изотропной средой с переменной диэлектрической проницаемостью ε.

Предположим, что источники внешне приложенного электрического поля сосредоточены вне некоторого круга B_R радиусом $R>b$, содержащего внутри себя области Ω_i и Ω. В частном случае, когда оболочка отсутствует, так что $\varepsilon=\varepsilon_0$ в Ω, источники создают внешне приложенное электрическое поле $\mathbf{E}_a=-\operatorname{grad}\Phi_a$. Присутствие оболочки (Ω,ε) внутри B_R приводит к появлению дополнительного поля $\tilde\Phi_s$ во всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Введем сужения Φ_i и Φ полного поля $\tilde\Phi\equiv\Phi_a+\tilde\Phi_s$ на области Ω_i и Ω, соответственно и сужение Φ_s поля $\tilde\Phi_s$ на Ω_e^∞. Хорошо известно (см., например, [11,12]), что тройка полей $\tilde\Phi=(\Phi_i,\Phi,\Phi_s)$ является решением следующей задачи сопряжения:

$$\varepsilon_0\Delta\Phi_i=0 \text{ в } \Omega_i, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon\nabla\Phi)=0 \text{ в } \Omega, \qquad \varepsilon_0\Delta\Phi_s=0 \text{ в } \Omega_e^\infty, \tag{1}$$

$$\Phi_i=\Phi, \ \ \varepsilon_0\frac{\partial\Phi_i}{\partial r}=\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial r} \text{ при } r=a, \tag{2}$$

$$\Phi=\Phi_a+\Phi_s, \ \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial r}=\varepsilon_0\frac{\partial(\Phi_a+\Phi_s)}{\partial r} \text{ при } r=b, \ \Phi_s(\mathbf{x})=O(1) \text{ при } r=|\mathbf{x}|\to\infty. \tag{3}$$

Из результатов [11,12] вытекает, что решение $\tilde\Phi=(\Phi_i,\Phi,\Phi_s)$ задачи (1)–(3) существует и единственно при выполнении следующих условий на ε и Φ_a:

$$\varepsilon\in L^\infty(\Omega), \ \ \varepsilon(\mathbf{x})\geqslant\varepsilon^0=\text{const}>0 \text{ в } \Omega, \ \ \Delta\Phi_a=0 \text{ в } B_R. \tag{4}$$

Первое условие в (4) заведомо выполняется в случае, когда материальная оболочка (Ω,ε) является слоистой и состоит из M элементарных кольцевых слоев $\Omega_m=\{R_{m-1}<r=|\mathbf{x}|<R_m\}$, $m=1,2,\ldots,M$, $R_0=a$, $R_M=b$ одинаковой ширины $d=(b-a)/M$.

Каждый из них заполнен однородной изотропной средой с постоянной диэлектрической проницаемостью ε_m, $m=1,2,...,M$. Это означает, что диэлектрическая проницаемость ε, отвечающая слоистой оболочке, определяется формулой

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{M} \varepsilon_m \chi_m(\mathbf{x}). \tag{5}$$

Здесь $\chi_m(\mathbf{x})$ — характеристическая функция слоя Ω_m, равная 1 в Ω_m и 0 вне Ω_m.

Как уже указывалось, целью этой статьи является численный анализ коэффициентной обратной задачи для модели (1)–(3), возникающей при проектировании устройств, служащих для маскировки материальных тел. Чтобы ее сформулировать, обозначим через $\tilde{\Phi}^\varepsilon \equiv (\Phi_i^\varepsilon, \Phi^\varepsilon, \Phi_s^\varepsilon)$ решение задачи (1)–(3), отвечающее переменной проницаемости ε в Ω и постоянной проницаемости ε_0 в Ω_i и Ω_e^∞. Будем ссылаться на Φ_i^ε либо (Φ_s^ε) как на внутреннее (либо рассеянное) поле. Положим $\Omega_e = \Omega_e^\infty \cap B_R$. Рассматриваемая в этой статье обратная задача, называемая задачей полной электростатической маскировки, состоит в нахождении диэлектрической проницаемости ε среды, заполняющей область Ω, так чтобы выполнялись следующие два условия:

$$\nabla \Phi_i^\varepsilon = 0, \text{ т.е. } \Phi_i^\varepsilon = \text{const в } \Omega_i, \quad \Phi_s^\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega_e. \tag{6}$$

2. Случай постоянного внешне приложенного поля

Аналогично [13] будем рассматривать ниже важный частный случай, когда внешне приложенное электрическое поле $\mathbf{E}_a$ постоянно во всей плоскости и направлено вдоль оси x. Это означает, что $\mathbf{E}_a$ представимо в виде

$$\mathbf{E}_a = -\nabla \Phi_a \text{ в } \mathbb{R}^2, \qquad \Phi_a = -E_a r \cos\varphi, \qquad E_a = |\mathbf{E}_a|. \tag{7}$$

Ясно, что $\Delta \Phi_a = 0$ в $\mathbb{R}^2$. Поскольку пара (ε, Φ_a), где ε определено в (5), удовлетворяет условиям (4), то точное решение $\tilde{\Phi} = (\Phi_i, \Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_M, \Phi_e)$, где $\Phi_m = \Phi|_{\Omega_m}$, $m=1,2,...,M$ задачи (1)–(3), отвечающее указанной паре Φ_a и ε существует и единственно. Более того, его можно записать явно, используя метод Фурье и полагая

$$\Phi_i(r,\varphi) = \alpha_0 r \cos\varphi \text{ в } \Omega_i, \quad \Phi_e(r,\varphi) = (-E_a r + \beta_{m+1}/r)\cos\varphi \text{ в } \Omega_e, \tag{8}$$

$$\Phi_m(r,\varphi) = (\alpha_m r + \beta_m/r)\cos\varphi \text{ в } \Omega_m, \quad m = 1, 2, \ldots, M. \tag{9}$$

Здесь неизвестные коэффициенты α_0, α_m, β_m и β_{m+1} определяются из условий непрерывности полей Φ_i, Φ_m, Φ_e на границах $r = R_m$. Они имеют вид

$$\Phi_m = \Phi_{m+1}, \; \varepsilon_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} = \varepsilon_{m+1} \frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial r} \text{ при } r = R_m, m = 0, 1, ..., M (\varepsilon_{M+1} = \varepsilon_0). \tag{10}$$

В (10) под Φ_0 мы понимаем Φ_i, а под Φ_{M+1} понимаем $\Phi_a + \Phi_s$. Подставляя (8), (9) в (10), приходим к следующей системе $2M+2$ линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered} -\alpha_0 R_0^2 + \alpha_1 R_0^2 + \beta_1 = 0, \quad -\varepsilon_0 \alpha_0 R_0^2 + \varepsilon_1 \alpha_1 R_0^2 - \varepsilon_1 \beta_1 = 0, \\ \alpha_{m+1} R_m^2 - \alpha_m R_m^2 + \beta_{m+1} - \beta_m = 0, \\ \varepsilon_{m+1} \alpha_{m+1} R_m^2 - \varepsilon_m \alpha_m R_m^2 + \varepsilon_m \beta_m - \varepsilon_{m+1} \beta_{m+1} = 0, \; m = \overline{1, \ldots, M-1}, \\ -\alpha_M R_M^2 - \beta_M + \beta_{M+1} = E_a R_M^2, - \varepsilon_M \alpha_M R_M^2 + \varepsilon_M \beta_M - \varepsilon_e \beta_{M+1} = \varepsilon_e E_a R_M^2. \end{gathered} \tag{11}$$

Решив систему (11) относительно неизвестных коэффициентов α_0, α_m, β_m, β_{M+1}, $m=1,2,...,M$ и подставив найденные значения α_0, α_m, β_m, β_{M+1} в (8), (9), мы можем найти соответствующие поля Φ_i в Ω_i, Φ_m в Ω_m, $m=1,2,...,M$ и Φ_e в Ω_e, образующие искомое решение задачи (1)–(3), и исследовать их свойства.

В важном частном случае двухслойной оболочки ($M=2$) можно показать, рассуждая, как в [13], что точное решение сформулированной выше обратной задачи существует и определяется формулой $\varepsilon_1=\varepsilon_1^0\equiv 0$, $\varepsilon_2=\varepsilon_2^0\equiv(R_2^2+R_1^2)/(R_2^2-R_1^2)$. Хотя построенное точное решение описывается простыми формулами, оно относится к классу сингулярных решений из-за отсутствия распространенных материалов с нулевой диэлектрической проницаемостью. Один из способов преодоления трудностей с технической реализацией решения задачи электростатической маскировки состоит в применении для решения обратной задачи оптимизационного метода [14], позволяющего учесть требования, связанные с технической реализацией отыскиваемых решений. Этим мы займемся в следующем разделе.

3. Применение оптимизационного метода. Экстремальные задачи

Используя представление (5) для проницаемости ε, составим M-мерный вектор $\mathbf{e}=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_M)$ и определим ограниченное множество K в $\mathbb{R}^M$ формулой

$$K=\{\mathbf{e}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_M):\ 0<\varepsilon_{\min}\leqslant\varepsilon_j\leqslant\varepsilon_{\max},\ j=1,2,\ldots,M\}. \tag{12}$$

Введем два переобозначения: $(\Omega,\mathbf{e})$ для маскировочной оболочки вместо обозначения (Ω,ε) и $\tilde{\Phi}[\mathbf{e}]\equiv(\Phi_i[\mathbf{e}],\Phi[\mathbf{e}],\Phi_s[\mathbf{e}])$ для решения $\tilde{\Phi}^\varepsilon\equiv(\Phi_i^\varepsilon,\Phi^\varepsilon,\Phi_s^\varepsilon)$ задачи (1)–(3), отвечающего диэлектрической проницаемости ε в Ω, связанной с вектором $\mathbf{e}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_M)$ формулой (5). В соответствии с оптимизационным методом [14] рассмотрим следующий функционал качества:

$$J(\mathbf{e})=\frac{1}{2}\left[\frac{\|\nabla\Phi_i[\mathbf{e}]\|_{L^2(\Omega_i)}}{\|\nabla\Phi_a\|_{L^2(\Omega_i)}}+\frac{\|\Phi_s[\mathbf{e}]\|_{L^2(\Omega_e)}}{\|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_e)}}\right]. \tag{13}$$

Здесь $\Omega_e=\Omega_e^\infty\cap B_R$, $\Phi_a=-E_a r\cos\varphi$ — потенциал заданного внешне приложенного поля, а L^2–нормы, входящие в (13), определяются формулами

$$\|\Phi_a\|^2_{L^2(\Omega_e)}=\int\limits_{\Omega_e}|\Phi_a|^2d\mathbf{x},\quad \|\nabla\Phi_a\|^2_{L^2(\Omega_i)}=\int\limits_{\Omega_i}|\nabla\Phi_a|^2d\mathbf{x},$$

$$\|\Phi_s[\mathbf{e}]\|^2_{L^2(\Omega_e)}=\int\limits_{\Omega_e}|\Phi_s[\mathbf{e}]|^2d\mathbf{x},\ \ \|\nabla\Phi_i[\mathbf{e}]\|^2_{L^2(\Omega_i)}=\int\limits_{\Omega_i}|\nabla\Phi_i[\mathbf{e}]|^2d\mathbf{x}. \tag{14}$$

Способность проектируемой оболочки $(\Omega,\mathbf{e})$ маскировать материальные объекты характеризуется маскировочной эффективностью. Рассуждая, как в [8], нетрудно показать, что маскировочная эффективность оболочки $(\Omega,\mathbf{e})$ связана со значением $J(\mathbf{e})$ обратной зависимостью: чем меньше значение $J(\mathbf{e})$, т.е. чем меньше ошибка выполнения обоих условий в (6), тем выше маскировочная эффективность оболочки

$(\Omega,\mathbf{e})$ и наоборот. В результате сформулированная выше обратная задача дизайна маскировочной оболочки $(\Omega,\mathbf{e})$ сводится к экстремальной задаче нахождения минимайзера функционала J, имеющей вид

$$J(\mathbf{e}) \to \inf, \quad \mathbf{e} \in K. \tag{15}$$

Для решения задачи (15) мы применим численный алгоритм, основанный на методе роя частиц (МРЧ) [15]. С вычислительной точки зрения важно, что все интегралы, входящие в (14), можно вычислить в явном виде. Действительно, простые вычисления с использованием (7), (8) показывают, что

$$J(\mathbf{e}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_0}{E_a} + \frac{2\beta_{M+1}}{E_a}\sqrt{\frac{\ln\left(R_{M+1}/R_M\right)}{R_{M+1}^4 - R_M^4}}\right]. \tag{16}$$

Из (16) следует, что вычисление значения $J(\mathbf{e})$ для конкретного вектора $\mathbf{e}\in K$, описывающего положение частицы, состоит из двух этапов. Сначала мы находим две компоненты α_0 и β_{M+1} решения $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,...,\beta_{M+1})$ системы (11), отвечающей проницаемости ε, связанной с вектором $\mathbf{e}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_m)$ формулой (5). Далее мы подставляем найденные значения α_0 и β_{M+1} в (16) и вычисляем нужное значение $J(\mathbf{e})$ с необходимой степенью точности. Последующее применение метода роя частиц проводится по схеме, подробно описанной в [7, 8]. Подчеркнем, что в силу плохой обусловленности системы (11) при больших M задание ее коэффициентов, нахождение решения, а также все другие расчеты производились с достаточно высокой точностью, обеспечиваемой правилами пакетов Wolfram Mathematica и Numpy.

4. Анализ результатов вычислительных экспериментов

Обсудим здесь результаты численного решения задачи (15) с использованием МРЧ. Все вычислительные эксперименты проводились для следующих данных:

$$a = 0.04 \text{ м}, \quad b = 0.05 \text{ м}, \quad R = 0.1 \text{ м}, \quad \varepsilon_0 = 1. \tag{17}$$

Внешне приложенное электростатическое поле $\mathbf{E}_a$ имеет вид (7).

Выполненный в [9] детальный анализ результатов вычислительных экспериментов по решению задач маскировки от тепловых полей, показал, что для оптимального решения задачи тепловой маскировки выполняется аналог так называемого bang-bang свойства. Это свойство, примененное для задачи (15), означает, что все компоненты ε_m^{opt} оптимального решения $\mathbf{e}^{opt}=(e_1^{opt},e_2^{opt},...,e_M^{opt})$, кроме последней ε_M^{opt}, должны принимать одно из двух чередующихся значений, совпадающих с $\varepsilon_{\min}$ или $\varepsilon_{\max}$, тогда как последняя компонента ε_M^{opt} принимает промежуточное значение между $\varepsilon_{\min}$ и $\varepsilon_{\max}$. Указанное свойство имеет место при выполнении определенного условия действующего на исходные данные, имеющего для задачи (15) вид

$$\varepsilon_{\min}\varepsilon_{\max} \leqslant \varepsilon_0^2. \tag{18}$$

С учетом этого выберем три пары данных $(\varepsilon_{\min},\varepsilon_{\max})$

$$1)\ (0.005, 50), \qquad 2)\ (0.005, 75), \qquad 3)\ (0.005, 100), \tag{19}$$

удовлетворяющие условию (18). Отметим, что все введенные в (19) значения, кроме $\varepsilon_{\min}=0.005$, отвечают диэлектрическим проницаемостям известных материалов.

Выполненные расчеты показали, что bang-bang свойство действительно выполняется для всех пар $(\varepsilon_{\min},\varepsilon_{\max})$ в (19), а также для других пар $(\varepsilon_{\min},\varepsilon_{\max})$, удовлетворяющих условию (18). В этом можно убедиться, опираясь на анализ таблицы 1, где представлены полученные с помощью МРЧ результаты решения задачи (15) для второй пары $\varepsilon_{\min}=0.005$, $\varepsilon_{\max}=75$ в (19) в виде оптимальных управлений ε_m^{opt}, $m=1,2,\dots,M$ вместе с оптимальными значениями $J(\mathbf{e}^{opt})$ для четных значений $M=2,4,6,8,10$. В таблице 1 видно, что приведенные значения ε_1^{opt}, $\varepsilon_2^{opt},\dots,\varepsilon_{M-1}^{opt}$ близки к чередующимся значениям $\varepsilon_{\min}$, $\varepsilon_{\max}$ (но не совпадают в точности с ними из-за наличия ошибок аппроксимации, присущих используемому алгоритму, и ошибок округления), тогда как ε_M^{opt} принимает промежуточное между $\varepsilon_{\min}$ и $\varepsilon_{\max}$ значение. При этом минимальное значение $J(\mathbf{e}^{opt})$ убывает от 6.30×10^{-2} при $M=2$ до значения 3.01×10^{-5} при $M=10$, отвечающего относительно высокой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega,\mathbf{e}^{opt})$.

Таблица 1. Задача маскировки: $\varepsilon_{\min}=0.005$, $\varepsilon_{\max}=75$

M	ε_1^{opt}	ε_2^{opt}	ε_3^{opt}	ε_4^{opt}	ε_5^{opt}	ε_6^{opt}	$J(\mathbf{e}^{opt})$
	ε_7^{opt}	ε_8^{opt}	ε_9^{opt}	ε_{10}^{opt}	ε_{11}^{opt}	ε_{12}^{opt}	
2	75.000	0.117					6.30×10^{-2}
4	75.000	0.005	74.832	0.068			2.34×10^{-3}
6	75.000	0.005	75.000	0.005	75.000	0.053	3.05×10^{-4}
8	75.000	0.005	75.000	0.005	75.000	0.005	7.80×10^{-5}
	75.000	0.048					
10	75.000	0.005	75.000	0.005	74.910	0.005	3.01×10^{-5}
	74.999	0.005	75.000	0.047			

Полученные результаты позволяют существенно упростить предложенный в разделе 3 алгоритм решения задачи маскировки (ниже будем ссылаться на него как на алгоритм 1). Идея упрощения заключается в том, чтобы проницаемости ε_m^{opt} первых $M-1$ слоев проектируемой оболочки выбирать согласно одной из схем чередующегося дизайна, имеющих вид $\varepsilon_1^{opt}=\varepsilon_3^{opt}=\ldots=\varepsilon_{\min}$, $\varepsilon_2^{opt}=\varepsilon_4^{opt}=\ldots=\varepsilon_{M-2}^{opt}=\varepsilon_{\max}$ или $\varepsilon_1^{opt}=\varepsilon_3^{opt}=\ldots=\varepsilon_{\max}$, $\varepsilon_2^{opt}=\varepsilon_4^{opt}=\ldots=\varepsilon_{M-2}^{opt}=\varepsilon_{\min}$, а проницаемость ε_M^{opt} последнего слоя определять путем минимизации функционала качества J как функции одной переменной ε_M. На описанный алгоритм ниже будем ссылаться как на алгоритм 2, а полученное с его помощью решение будем обозначать через $\mathbf{e}_*^{opt}$. Ясно, что алгоритм 2 более экономичен, чем алгоритм 1, поскольку решение задачи маскировки в нем сводится к решению однопараметрической экстремальной задачи. Более того, как оказалось, он обладает и более высокой точностью по сравнению с алгоритмом 1 (вследствие меньшего влияния на решение ошибок округления).

В последнем можно убедиться, исходя из анализа таблицы 2, в которой приведены полученные с помощью алгоритма 2 результаты решения задачи (15) для той

Таблица 2. Задачи маскировки $\varepsilon_{\min} = 0.005$, $\varepsilon_{\max} = (50, 75, 100)$

M	ε_1^{opt}	$\varepsilon_{\max} = 50$		$\varepsilon_{\max} = 75$		$\varepsilon_{\max} = 100$	
		ε_M^{opt}	$J(\mathbf{e}_*^{opt})$	ε_M^{opt}	$J(\mathbf{e}_*^{opt})$	ε_M^{opt}	$J(\mathbf{e}_*^{opt})$
2	0.005	9.141	2.52×10^{-2}	9.141	2.52×10^{-2}	9.141	2.52×10^{-2}
4	0.005	17.767	1.45×10^{-3}	17.749	9.85×10^{-4}	17.740	7.46×10^{-4}
6	0.005	25.595	2.80×10^{-4}	25.507	1.35×10^{-4}	25.461	7.90×10^{-5}
8	0.005	32.772	9.92×10^{-5}	32.525	3.57×10^{-5}	32.389	1.67×10^{-5}
10	0.005	39.455	5.00×10^{-5}	38.940	1.42×10^{-5}	38.642	5.48×10^{-6}

же пары данных $\varepsilon_{\min} = 0.005$, $\varepsilon_{\max} = 75$ в (19). Они представлены в столбцах 2 и 5 таблицы 2 в виде первого и последнего оптимальных управлений ε_1^{opt} и ε_M^{opt} и в столбце 6 в виде оптимальных значений $J(\mathbf{e}_*^{opt})$ функционала J. Остальные значения ε_m^{opt}, $m = 2, \dots, M-1$, определяются согласно одной из схем чередующегося дизайна. Сравнение таблиц 1 и 2 показывает, что при всех M приведенное в столбце 6 таблицы 2 значение $J(\mathbf{e}_*^{opt})$ меньше значения $J(\mathbf{e}^{opt})$, приведенного в таблице 1, а следовательно, оболочка $(\Omega, \mathbf{e}_*^{opt})$ обладает более высокой маскировочной эффективностью, чем оболочка $(\Omega, \mathbf{e}^{opt})$. Это подтверждает высокую эффективность и экономичность алгоритма 2 для решения рассматриваемой задачи маскировки.

В заключение отметим, что столбцы 3 и 4 (либо 7 и 8) таблицы 2 содержат результаты решения задачи (15) с помощью алгоритма 2 для первой (либо третьей) группы данных в (19). Их анализ показывает, что маскировочная эффективность, выражаемая значением $J(\mathbf{e}_*^{opt})$, растет с ростом величины $\varepsilon_{\max}$ и убывает с ее уменьшением. Видно, в частности, что увеличение $\varepsilon_{\max}$ до 100 приводит при $M = 10$ к значению $J(\mathbf{e}_*^{opt}) = 5.48 \times 10^{-6}$, отвечающему очень высокой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{e}_*^{opt})$.

Приведенные выше результаты позволяют сделать вывод о высокой экономичности и эффективности алгоритма 2, предложенного для решения рассматриваемой в работе двумерной задачи электростатической маскировки. Авторы предполагают посвятить отдельную работу детальному анализу результатов вычислительных экспериментов и исследованию более общего случая, когда внешне приложенное электрическое поле создается компактно распределенными источниками.

Список литературы

[1] S. Narayana, V. Sato, "Heat flux manipulation with engineered thermal materials", *Phys. Rev. Lett.*, **108**, (2012), 214303.

[2] F. Yang, Z. L. Mei, T. Z. Jin, T. J. Cui, "DC electric invisibility cloak", *Phys. Review Lett.*, **5**, (2012), 053902.

[3] S. Guenneau, C. Amra, D. Veynante, "Transformation thermodynamics: cloaking and concentrating heat flux", *Opt. Express*, **20**:7, (2012), 8207–8218.

[4] C. W. Lan, Y. Yang, J. Zhou, B. Li, "Electrostatic field invisibility cloak", *Sci Rep.*, **5**, (2015), 16416.

[5] J. B. Pendry, D. Shurig, D. R. Smith, “Controlling electromagnetic field”, *Science*, **312**, (2006), 1780–1782.

[6] U. Leonhardt, “Optical conformal mapping”, *Science*, **312**, (2006), 1777–1780.

[7] Г. В. Алексеев, В. А. Левин, Д. А. Терешко, “Оптимизационный анализ задачи тепловой маскировки цилиндрического тела”, *Докл. Акад. наук*, **472**:4, (2017), 398–402.

[8] G. V. Alekseev, D. A. Tereshko, “Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices”, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **135**, (2019), 1269–1277.

[9] Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко, “Оптимизационный метод в осесимметричных задачах электрической маскировки материальных тел”, *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, **59**:2, (2019), 217–234.

[10] G. V. Alekseev, D. A. Tereshko, “Optimization method in material bodies cloaking with respect to static physical fields”, *J. Inv. Ill-posed Problems*, **27**:6, (2019), 845–857.

[11] А. В. Лобанов, Ю. Э. Спивак, “Оптимизационный метод в двумерных задачах электрической маскировки”, *Дальневост. матем. журн.*, **19**, (2019), 31–42.

[12] Ю. Э. Спивак, “Оптимизационный метод в двумерных задачах магнитной маскировки”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **16**, (2019), 812–825.

[13] F. Gomory, M. Solovyov, J. Souc, C. Navau, J. Prat-Camps, A. Sanchez, “Experimental realization of a magnetic cloak”, *Science*, **335**, (2012), 1466–1468.

[14] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986.

[15] R. Poli, J. Kennedy, T. Blackwell, “Particle swarm optimization: an overview”, *Swarm Intel*, **1**, (2007), 33–57.

Поступила в редакцию
4 августа 2020 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания ИПМ ДВО РАН (тема № 075-01095-20-00) и Минобрнауки РФ (доп. соглашение от 21.04.2020 № 075-02-2020-1482-1).

Alekseev G. V., Lobanov A. V., Silchenko V. I. Economical method for solving two-dimensional problems of electrostatic cloaking. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2020. V. 20. No 2. P. 127–134.

ABSTRACT

An economical numerical algorithm for solving a two-dimensional problem of electrostatic cloaking is proposed and implemented. The algorithm is based on the use of an M-layer shell, each layer of which is filled with one of two specified materials, while the material of the last layer is determined by minimizing a special quality functional associated with the cloaking efficiency of the desired shell.

Key words: *inverse problems, electrostatic cloaking, optimization method, particle swarm optimization method, alternating design scheme.*