УДК 511.36 + 511.336
MSC2010 11J70 + 11K60

© И. Д. Кан[1]

Усиление одной теоремы Бургейна – Конторовича

В настоящей работе доказывается следующее. Пусть $\mathfrak{D}(N)$ — множество не превосходящих N несократимых знаменателей тех рациональных чисел, которые представимы конечными цепными дробями, все неполные частные которых принадлежат алфавиту $\{1, 2, 3, 5\}$. Тогда выполнено неравенство $|\mathfrak{D}(N)| \gg N^{0.99}$. Расчет, произведенный по оригинальной теореме Бургейна – Конторовича 2011 года, дает ответ $|\mathfrak{D}(N)| \gg N^{0.80}$.

Ключевые слова: *цепная дробь, тригонометрическая сумма, гипотеза Зарембы, хаусдорфова размерность.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202018

1. Введение

1.1. История вопроса

Пусть фиксирован некоторый конечный числовой алфавит $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{N}$ (множество чисел). Тогда для $d_1, d_2, \ldots, d_k \in \mathbf{A}$ положим

$$[d_1, d_2, \ldots, d_k] = \cfrac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + \ddots + \cfrac{1}{d_k}}}, \tag{1}$$

а через $\mathfrak{R}_{\mathbf{A}}$ обозначим множество пар натуральных чисел b и d, образующих несократимые дроби b/d, представимые цепными дробями вида (1):

$$\mathfrak{R}_{\mathbf{A}} = \left\{ (b, d) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, k \in \mathbb{N}: \; b/d = [d_1, d_2, \ldots, d_k], \;\; \gcd(b, d) = 1, \\ b \leqslant d, \;\; d_j \in \mathbf{A} \text{ для } j = 1, 2, \ldots, k \end{array} \right\}. \tag{2}$$

Через $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}$ обозначим множество всевозможных знаменателей d из (2):

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{A}} = \left\{ d \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists\, b \in \mathbb{N}: \; (b, d) \in \mathfrak{R}_{\mathbf{A}} \right\}.$$

[1] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4. Электронная почта: `igor.kan@list.ru`

Около пятидесяти лет бросает математикам вызов следующая недоказанная гипотеза.

Гипотеза 1.1. (***гипотеза Зарембы*** *[1, стр. 76]*, 1971). *Для алфавита* $\mathbf{A} = \{1, 2, \ldots, A\}$ *при достаточно большом* A *выполнено равенство* $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}} = \mathbb{N}$.

То есть каждое $d \geqslant 1$ представимо в виде знаменателя конечной цепной дроби b/d с неполными частными, не превосходящими A. Существенно раньше, в 1950-е годы, Н. С. Бахвалов, Н. Н. Ченцов и Н. М. Коробов, решая вопросы приближенного интегрирования, пришли к той же (не опубликованной) гипотезе. Косвенное подтверждение этому дает работа профессора Н. М. Коробова [2], где доказано, что для каждого простого $d > 2$ существует такое число b, что $(b, d) \in \mathfrak{R}_{\mathbf{A}}$ для алфавита $\mathbf{A} = \{1, 2, \ldots, [\log d]\}$. Поэтому гипотезу Зарембы правильнее было бы назвать гипотезой Бахвалова – Коробова – Ченцова.

Фактически С. К. Заремба предположил, что значения $A = 5$ (но не $A = 4$, ввиду контрпримеров $d=54$ и $d=150$) достаточно для справедливости его гипотезы. Однако предполагается, что при $A = 4$ выполняется неравенство

$$|\mathfrak{D}_{\{1,2,\ldots,A\}} \cap [1, N]\,| \geqslant N - O(1) \qquad \text{при } N \to \infty. \tag{3}$$

Далее, Г. Нидеррайтер [3] предположил справедливость формулы (3) при $A = 3$ (к слову, при дополнительном условии простоты знаменателей d даже при “малых” d не известно ни одного контрпримера к гипотезе Зарембы с $A = 3$), а Д. Хенсли [4] — при $A = 2$. Другой вопрос, непосредственно связанный с гипотезой 1.1, состоит в том, выполняется ли при каком-либо значении A хотя бы более слабое неравенство

$$|\mathfrak{D}_{\{1,2,\ldots,A\}} \cap [1, N]\,| \gg N \qquad \text{при } N \to \infty \tag{4}$$

(далее говорится, что ответ на этот вопрос утвердителен при $A = 4$, но неизвестен при $A = 3$). Подробнее о теме гипотезы Зарембы — в работах [5, 6].

Пусть $\Delta_{\mathbf{A}}$ — *хаусдорфова размерность* (сведения о ней имеются в [7]) множества бесконечных цепных дробей с $d_1, d_2, \ldots$ из $\mathbf{A}$ и пусть $N \in \mathbb{N}$ неограниченно растет. Ж. Бургейн и А. Конторович в 2011 году доказали следующие теоремы.

Теорема 1.1. *[5, теорема 1.2, замечание 1.20]. Для каждого алфавита* $\mathbf{A}$, *удовлетворяющего условию* $\Delta_{\mathbf{A}} > 307/312 = 0.9839\ldots$, *справедлива оценка*

$$|\mathfrak{D}_{\mathbf{A}} \cap [1, N]\,| \gg N. \tag{5}$$

Теорема 1.2. *[5, теорема 1.23]. Для каждого алфавита* $\mathbf{A}$, *удовлетворяющего условию* $\Delta_{\mathbf{A}} > 0.5$, *для любого* $\varepsilon > 0$ *имеет место оценка*

$$|\mathfrak{D}_{\mathbf{A}} \cap [1, N]\,| \gg_{\varepsilon} N^{\Delta_{\mathbf{A}} + (2\Delta_{\mathbf{A}} - 1)\frac{1-\Delta_{\mathbf{A}}}{5-\Delta_{\mathbf{A}}} - \varepsilon}. \tag{6}$$

Как показано в [5], условие теоремы 1.1 выполнено для алфавита $\{1, 2, \ldots, 50\}$, ввиду результата Д. Хенсли [7]. Напротив, теорема 1.2 относится к случаю, когда $\Delta_{\mathbf{A}}$ так мало, что доказать оценку (5) не удается. Хотя еще не было работ с обобщениями теоремы 1.2 при всех $\Delta_{\mathbf{A}} > 0.5$, но работы по усилению теоремы 1.1 имеются: [8–15].

Так, в работе [11] (написанной автором настоящей статьи совместно с Д. А. Фроленковым) доказано, что условие теоремы 1.1 можно заменить оценкой $\Delta_{\mathbf{A}}>5/6$, а в [14] — оценкой $\Delta_{\mathbf{A}}>\left(\sqrt{17}-1\right)/4=0.7807\ldots$. Последнему условию, согласно О. Дженкинсону [19], удовлетворяет алфавит $\{1,2,3,4\}$, что дает утвердительный ответ на вопрос об оценке (4) при $A=4$.

В работе [15] было получено следующее уточнение теоремы 1.2 при $\Delta_{\mathbf{A}}>0.7675\ldots$, где $\gamma=0.7675\ldots$ — корень уравнения $2\gamma^3-3\gamma^2+35\gamma-26=0$.

Теорема 1.3. *[15, теорема 1.5]. Пусть алфавит* $\mathbf{A}$ *удовлетворяет условию*

$$0.7675\ldots<\Delta_{\mathbf{A}}<\left(\sqrt{17}-1\right)/4=0.7807\ldots. \tag{7}$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ *выполнено неравенство*

$$|\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}\cap[1,N]|\ \gg_{\varepsilon}\ N^{\Delta_{\mathbf{A}}+\left(2(\Delta_{\mathbf{A}})^2+5\Delta_{\mathbf{A}}-5\right)/(2\Delta_{\mathbf{A}}-1)-\varepsilon}. \tag{8}$$

В последнее время появилось несколько новых работ с интересными результатами по области тем, связанных с гипотезой Зарембы: [16–18].

1.2. Основной результат статьи

Хотя настоящая статья является продолжением цикла работ [8–15], основанных на методе Бургейна – Конторовича из [5], но для понимания вполне достаточно ознакомления со статьей [15]. Главная цель исследования состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1.4. *Пусть некоторый алфавит* $\mathbf{A}$ *удовлетворяет условию*

$$1/2<\Delta_{\mathbf{A}}<\left(\sqrt{40}-4\right)/3=0.7748\ldots. \tag{9}$$

Тогда

$$|\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}\cap[1,N]|\ \gg N^{\Delta_{\mathbf{A}}+(2\Delta_{\mathbf{A}}-1)\min\left\{\frac{2\Delta_{\mathbf{A}}+1}{7-\Delta_{\mathbf{A}}},\ \ \frac{\Delta_{\mathbf{A}}+1}{7-4\Delta_{\mathbf{A}}}\right\}}; \tag{10}$$

в том числе, при $\Delta_{\mathbf{A}}\geqslant 4/7=0.5714\ldots$ *минимум в (10) равен первому из двух своих элементов, а при* $\Delta_{\mathbf{A}}\leqslant 4/7$ *— второму из них.*

Здесь и всюду далее все константы в знаках “$\ll$” и “$\gg$”, если иное не сказано, считаются зависящими только от алфавита $\mathbf{A}$; если же дана зависимость этих констант от других параметров, то “$\Delta_{\mathbf{A}}$” добавляется к их списку.

Замечание 1.1. В показателях степеней в (6) и (10) выделено слагаемое $\Delta_{\mathbf{A}}$. Дело в том, что оценка $|\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}\cap[1,N]|\ \gg N^{\Delta_{\mathbf{A}}}$ в [5] была доказана очень просто, так что $\Delta_{\mathbf{A}}$ в показателе оценки является ее “тривиальной” частью, а второе слагаемое “нетривиально”. Инфинум частного этих вторых слагаемых показывает, *во сколько раз* (по меньшей мере) теорема 1.4 сильнее теоремы 1.2:

$$\inf_{\Delta_{\mathbf{A}}\in\left(1/2,\,(\sqrt{40}-4)/3\right)}\frac{(2\Delta_{\mathbf{A}}-1)\min\left\{\frac{2\Delta_{\mathbf{A}}+1}{7-\Delta_{\mathbf{A}}},\ \ \frac{\Delta_{\mathbf{A}}+1}{7-4\Delta_{\mathbf{A}}}\right\}}{(2\Delta_{\mathbf{A}}-1)\,(1-\Delta_{\mathbf{A}})/(5-\Delta_{\mathbf{A}})}=2.7\ \ (\text{раза}), \tag{11}$$

что “достигается” при $\Delta_{\mathbf{A}}$, близких к $1/2$. Похожий рассчет показывает, что в условиях (7) и (9) теорема 1.4 сильнее теоремы 1.3 более, чем в 1.65 раза.

Замечание 1.2. Напротив, замена в (11) инфинума на супремум дает ответ $7.68\ldots$, который "достигается" при $\Delta_{\mathbf{A}} \to 0.7748\ldots$. Ситуация для алфавита $\{1,2,3,5\}$ близка к описанной: согласно О. Дженкинсону [19], $\Delta_{\{1,2,3,5\}} = 0.7709\ldots$. Поэтому, как показывают вычисления, теорема 1.4 дает оценку

$$|\mathfrak{D}_{\{1,2,3,5\}} \cap [1,N]| \gg N^{0.99}.$$

В то время как из теорем 1.2 и 1.3 получается только $|\mathfrak{D}_{\{1,2,3,5\}} \cap [1,N]| \gg N^{0.80}$ или $|\mathfrak{D}_{\{1,2,3,5\}} \cap [1,N]| \gg N^{0.85}$ соответственно.

Автор благодарит профессора Н. Г. Мощевитина за постановку темы исследования и неоднократное обсуждение результатов. Автор благодарен Д. А. Фроленкову за многократное обсуждение. Автор благодарен Д. Р. Гайфулину за многочисленные замечания по поводу предварительной версии статьи.

2. Основа вывода формулы (10)

Пусть $G_{\mathbf{A}}$ — снабженная единицей $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ мультипликативная полугруппа целочисленных матриц $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, для которых выполнены условия

$$0 \leqslant a \leqslant c \leqslant d, \qquad a \leqslant b \leqslant d, \qquad ad - bc = 1, \qquad (b,d) \in \mathfrak{R}_{\mathbf{A}} \tag{12}$$

и определена норма $(\gamma)_{\max} = \max\{|a|,|b|,|c|,|d|\} = d$. Через $G_{\mathbf{A}}^{(N)}$ обозначим подмножество матриц γ из $G_{\mathbf{A}}$, таких что $(\gamma)_{\max} \leqslant N$. Тогда, согласно Д. Хенсли [4], $\left|G_{\mathbf{A}}^{(N)}\right| \asymp N^{2\Delta_{\mathbf{A}}}$. Для всякого $n \in \mathbf{A}$ положим $B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}$. Следующая лемма говорит об однозначности разложения дробной доли рационального числа в конечную цепную дробь четной длины для произвольного алфавита.

Лемма 2.1 [20]. *Каждый элемент $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ полугруппы $G_{\mathbf{A}}$ имеет представление, причем единственное, в виде произведения матриц B_n,*

$$\gamma = B_{d_1} B_{d_2} \ldots B_{d_{2k}}, \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

и единственным способом определяется по любой из двух цепных дробей

$$b/d = [d_1, d_2, \ldots, d_{2k}] \ \text{ или } \ c/d = [d_{2k}, d_{2k-1}, \ldots, d_1].$$

Ключевым понятием метода, примененного в [5], является "*ансамбль*" $\Omega^{(N)} \subseteq G_{\mathbf{A}}^{(N)}$ — специальным образом построенное множество, такое что $\left|\Omega^{(N)}\right| \gg_{\varepsilon} N^{2\Delta_{\mathbf{A}} - \varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$. Ансамбль из [5] был уточнен в [10]: теперь это множество матриц $\Omega^{(N)} = \Omega_{\varepsilon_0}^{(N)}$ зависит не только от N, но и от произвольно малого ε_0 из интервала $(0,\ 0.0004)$, причем выполнена оценка $\left|\Omega_{\varepsilon_0}^{(N)}\right| \gg_{\varepsilon,\varepsilon_0} N^{2\Delta_{\mathbf{A}} - \varepsilon}$. Тригонометрическая сумма по ансамблю для $\Theta\in[0,1]$ задается равенством

$$S_{\varepsilon_0}^{(N)}(\Theta)=\sum_{\gamma\in\Omega_{\varepsilon_0}^{(N)}}e^{2\pi i\Theta(\gamma)_{\max}}. \tag{13}$$

Хотя доказательства из настоящей работы существенно отличаются от аргументов Ж. Бургейна и А. Конторовича [5], все же автор остается в рамках их подхода: все построения производятся в ансамбле и направлены на оценку модуля величины (13). Так, первым шагом к получению основного результата является следующая лемма.

Лемма 2.2. *[15, лемма 3.3]. Пусть при $\Delta_{\mathbf{A}}>0.5$, для $\xi\in(0,1-\Delta_{\mathbf{A}})$, для $N\in\mathbb{N}$ и хотя бы для одного числа $\varepsilon_0\in(0,\ 0.0004)$ выполнена оценка*

$$\int\limits_{-0.5/N}^{0.5/N}\sum_{q=1}^{[\sqrt{N}]}\sum_{\substack{0\leqslant a\leqslant q:\\ \gcd(a,q)=1,\\ a\in\mathbb{Z}}}\sum_{\substack{0<|l|\leqslant\frac{5\sqrt{N}}{q},\\ l\in\mathbb{Z}}}\left|S_{\varepsilon_0}^{(N)}\left(\frac{a}{q}+\frac{l}{\mathcal{P}}+\lambda\right)\right|^2d\lambda\ll\left|\Omega_{\varepsilon_0}^{(N)}\right|^2N^{\xi-1}, \tag{14}$$

где $\mathcal{P}\in[2N,4N]$ — фиксированное простое. Тогда

$$|\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}\cap[1,N]|\gg N^{1-\xi}. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $\hat{S}_{\varepsilon_0}^{(N)}(d)$ — число тех $b\in\mathbb{N}$, что $\binom{b}{d}\in\Omega_{\varepsilon_0}^{(N)}\binom{0}{1}$. Из равенства Парсеваля и неравенства Коши–Буняковского следует:

$$|\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}\cap[1,N]|=\left(|\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}\cap[1,N]|\sum_{1\leqslant d\leqslant N}\left(\hat{S}_{\varepsilon_0}^{(N)}(d)\right)^2\right)\Big/\int\limits_0^1\left|S_{\varepsilon_0}^{(N)}(\Theta)\right|^2d\Theta\geqslant$$

$$\geqslant\left(\sum_{1\leqslant d\leqslant N}\hat{S}_{\varepsilon_0}^{(N)}(d)\right)^2\Big/\int\limits_0^1\left|S_{\varepsilon_0}^{(N)}(\Theta)\right|^2d\Theta=\left|\Omega_{\varepsilon_0}^{(N)}\right|^2\Big/\int\limits_0^1\left|S_{\varepsilon_0}^{(N)}(\Theta)\right|^2d\Theta.$$

Другими словами, для получения оценки (15) достаточно доказать, что

$$\int\limits_0^1\left|S_{\varepsilon_0}^{(N)}(\Theta)\right|^2d\Theta\ll\left|\Omega_{\varepsilon_0}^{(N)}\right|^2N^{\xi-1}. \tag{16}$$

Для вывода неравенства (16) для каждого Θ из (0,1) применим теорему Дирихле [21, лемма 2.1, стр. 17]: найдем $a\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$ и $\kappa\in\mathbb{R}$, такие что

$$\Theta=a/q+\kappa,\quad \gcd(a,q)=1,\quad 0\leqslant a\leqslant q\leqslant N^{0.5},\quad |\kappa|\leqslant q^{-1}N^{-0.5}. \tag{17}$$

Зафиксируем простое $\mathcal{P}\in[2N,4N]$ и представим число κ из (17) в виде

$$\kappa=l\mathcal{P}^{-1}+\lambda,\quad \lambda\in\left(-\mathcal{P}^{-1},\mathcal{P}^{-1}\right]\subseteq\left[-0.5N^{-1},0.5N^{-1}\right],\quad l\in\mathbb{Z},\quad l\equiv1\,(\mathrm{mod}\ 2). \tag{18}$$

В частности, $l\neq0$. Кроме того, $|l|\leqslant(|\kappa|+|\lambda|)\mathcal{P}$, откуда, ввиду (17):

$$q|l|\leqslant q(|\kappa|+|\lambda|)\mathcal{P}\leqslant q\left(1/\left(qN^{0.5}\right)+0.5N^{-1}\right)4N<5N^{0.5}. \tag{19}$$

Оценим интеграл из (16) сверху суммой интегралов по отрезкам, соответствующим q,a,l из (17) — (19), и в каждом таком интеграле сделаем замену $\lambda=\Theta-a/q-l/\mathcal{P}$, получая интеграл из (14). Неравенство (16) доказано. Отсюда, согласно сказанному выше, следует оценка (15). Лемма доказана. $\square$

Положим для краткости $\Lambda=O_{\varepsilon_0,\varepsilon}\Big(\big(\max\{2^{\alpha},2^{\beta}\}\big)^{O(\varepsilon,\varepsilon_0)}\Big)$ и обозначим через $\tau=\tau(\alpha,\beta)>0$ каждую действительную величину, для которой найдется некоторая константа $c'=c'(\mathbf{A})>0$, такая что

$$\tau \gg_{\varepsilon_0,\varepsilon} 2^{(\alpha+\beta)c'}. \tag{20}$$

В частности, в этих обозначениях выполнены равенства $\Lambda^2=\Lambda$, $\Lambda\tau=\tau$, $\tau^2=\tau$ и $\Lambda\tau^{-1}=\tau^{-1}$, т. к. числа ε_0 и ε могут выбираться сколь угодно малыми (конечно, речь здесь идет не о реально выполняемых равенствах, а просто об удобных автоматических переобозначениях).

Далее сумма $a/q+l/\mathcal{P}$ обозначается через θ, так что $\Theta=\theta+\lambda$. Область суммирования в (14) представим как объединение по $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$ множеств

$$\mathfrak{P}_{\alpha,\beta}=\left\{\theta\in\mathbb{Q}\cap(0,1)\;\middle|\;\begin{array}{c}\exists\, q,a \text{ из (17) и } l \text{ из (18)},\quad |l|\in\big[2^{\beta-1},2^{\beta}\big),\\ \text{такие что } \theta=\frac{a}{q}+\frac{l}{\mathcal{P}},\;\; q\in[2^{\alpha-1},2^{\alpha})\end{array}\right\}. \tag{21}$$

Из сравнения ограничений для q и $|l|$ в (14) и (21) следует, что нам потребуются только те $\mathfrak{P}_{\alpha,\beta}$, индексы которых удовлетворяют условиям

$$2^{\alpha}\leqslant 2\sqrt{N},\qquad 2^{\alpha+\beta}\leqslant 20\sqrt{N}. \tag{22}$$

Это разбиение приводит к следующей теореме.

Теорема 2.1. *[15, теорема 3.1]. Пусть для некоторого $\xi\in(0,1-\Delta_{\mathbf{A}})$, при $\Delta_{\mathbf{A}}>0.5$, при любом достаточно малом $\varepsilon_0\in(0,\ 0.0004)$ найдется функция $\tau=\tau(\alpha,\beta)$, удовлетворяющая условию (20), такая что для каждого достаточно большого $N\in\mathbb{N}$, при любых натуральных α и β из (22) выполняется оценка*

$$\max_{|\lambda|\leqslant\frac{1}{2N}}\sum_{\theta\in\mathfrak{P}_{\alpha,\beta}}\left|S_{\varepsilon_0}^{(N)}(\theta+\lambda)\right|^2 \ll \left|\Omega_{\varepsilon_0}^{(N)}\right|^2 N^{\xi}\tau^{-1}. \tag{23}$$

Тогда выполнено неравенство (15).

3. Обобщение теоремы 2.1.

Обобщим утверждение из работы С. В. Конягина [23, следствие 17].

Лемма 3.1. *[10, лемма 3.5]. Пусть $\mathbf{W}=\{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{|\mathbf{W}|}\}$ — конечное множество, $f:\mathbf{W}\to\mathbb{R}_+$. Тогда на множестве чисел $\{1,2,\ldots,|\mathbf{W}|\}$ найдется такая перестановка $\{\nu(1),\ \nu(2),\ldots,\nu(|\mathbf{W}|)\}$, что будут выполнены оценки*

$$\sum_{\theta\in\mathbf{W}}(f(\theta))^2\leqslant\sum_{j=1}^{|\mathbf{W}|}\left(\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}f\left(\theta_{\nu(k)}\right)\right)^2=\sum_{j=1}^{|\mathbf{W}|}\frac{1}{j}\left(\frac{1}{j}\left(\sum_{k=1}^{j}f\left(\theta_{\nu(k)}\right)\right)^2\right), \tag{24}$$

$$\sum_{\theta\in\mathbf{W}} (f(\theta))^2 \quad \leqslant (\log|\mathbf{W}|+1) \max_{\substack{Z\subseteq\mathbf{W}:\\ |Z|>0}} \left(\frac{1}{|Z|}\left(\sum_{\theta\in Z} f(\theta)\right)^2\right). \tag{25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично доказательству из [23] расположим числа $f(\theta)$ при всевозможных $\theta \in \mathbf{W}$ в невозрастающую последовательность

$$f\left(\theta_{\nu(1)}\right) \geqslant f\left(\theta_{\nu(2)}\right) \geqslant \ldots \geqslant f\left(\theta_{\nu(|\mathbf{W}|)}\right). \tag{26}$$

Исходя из неравенств (26) получаем для $j=1,2,\ldots,|\mathbf{W}|$ оценки

$$f\left(\theta_j\right) \leqslant \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} f\left(\theta_{\nu(k)}\right). \tag{27}$$

Возведем неравенства (27) в квадрат и просуммируем по всем $j=1,2,\ldots,|\mathbf{W}|$, тогда получим оценку (24).

Для любого $j\geqslant 1$ положим $Z^{(j)}=\{\theta_{\nu(1)},\ldots,\theta_{\nu(j)}\}$ и рассмотрим неравенство

$$\frac{1}{j}\left(\sum_{k=1}^{j} f\left(\theta_{\nu(k)}\right)\right)^2 = \frac{1}{\left|Z^{(j)}\right|}\left(\sum_{\theta\in Z^{(j)}} f(\theta)\right)^2 \leqslant \max_{\substack{Z\subseteq\mathbf{W}:\\ |Z|>0}} \left(\frac{1}{|Z|}\left(\sum_{\theta\in Z} f(\theta)\right)^2\right). \tag{28}$$

Подстановка неравенства (28) в (24) приводит к оценке

$$\sum_{\theta\in\mathbf{W}} (f(\theta))^2 \leqslant \max_{\substack{Z\subseteq\mathbf{W}:\\ |Z|>0}} \left(\frac{1}{|Z|}\left(\sum_{\theta\in Z} f(\theta)\right)^2\right)\sum_{j=1}^{|\mathbf{W}|}\frac{1}{j}. \tag{29}$$

Сумму дробей $1/j$ в (29) оценим как $\log|\mathbf{W}|+1$, получая (25). Лемма доказана. □

Рассмотрим случай прямого произведения множеств $\mathbf{W}=(W_1,W_2)$, где

$$W_1=\{u_1,u_2,\ldots,u_{|W_1|}\}, \qquad W_2=\{U_1,U_2,\ldots,U_{|W_2|}\}.$$

Лемма 3.2. *Для произвольной функции* $f:\mathbf{W}\to\mathbb{R}_+$, *для каждого* $u\in W_1$ *найдется такая перестановка* $\{\nu_u(1),\ \nu_u(2),\ldots,\nu_u(|W_2|)\}$ *на множестве чисел* $\{1,2,\ldots,|W_2|\}$, *что будет выполнено неравенство*

$$\sum_{(u,U)\in\mathbf{W}} (f(u,U))^2 \leqslant \sum_{j=1}^{|W_2|}\frac{\log|\mathbf{W}|+1}{j}\max_{\substack{Z_1\subseteq W_1:\\ |Z_1|>0}} \frac{\left(\sum\limits_{u\in Z_1}\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant j} f(u,U_{\nu_u(k)})\right)^2}{|Z_1|j}. \tag{30}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого фиксированного $u\in W_1$ к функции $f(u,U)$ аргументов $U\in W_2$ применим неравенство (24) и просуммируем его по всем $u\in W_1$, меняя порядок суммирования:

$$\sum_{(u,U)\in\mathbf{W}} (f(u,U))^2 \leqslant \sum_{u\in W_1}\sum_{j=1}^{|W_2|}\left(\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} f\big(u,U_{\nu_u(k)}\big)\right)^2 = \sum_{j=1}^{|W_2|}\frac{1}{j^2}\sum_{u\in W_1}(F_j(u))^2, \tag{31}$$

где $F_j(u) = \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant j} f\left(u, U_{\nu_u(k)}\right)$ при $j = 1, 2, \ldots, |W_2|$. С другой стороны, применение оценки (25) к последней сумме по $u \in W_1$ в (31) дает:

$$\frac{\sum\limits_{u\in W_1}\Big(F_j(u)\Big)^2}{\log|\mathbf{W}|+1} \leqslant \max_{\substack{Z_1\subseteq W_1:\\ |Z_1|>0}} \frac{\Big(\sum\limits_{u\in Z_1} F_j\left(u\right)\Big)^2}{|Z_1|} = \max_{\substack{Z_1\subseteq W_1:\\ |Z_1|>0}} \frac{\Big(\sum\limits_{u\in Z_1}\sum\limits_{k\,=\,1}^{j} f\Big(u, U_{\nu_u(k)}\Big)\Big)^2}{|Z_1|}. \tag{32}$$

Домножим неравенство (32) на $(\log|\mathbf{W}|+1)j^{-2}$ и просуммируем по j в пределах от 1 до $|W_2|$. Тогда из (31) и (32) получим (30). Лемма доказана. $\square$

Отметим, что всякое непустое подмножество $Z \subseteq \mathbf{W} = (W_1, W_2)$ состоит из упорядоченных пар (u, U), таких что $u \in W_1$, $U \in W_2$. Пусть Z_1 — множество значений первого элемента u для всевозможных $(u, U) \in Z$; $Z_2(u)$ — множество значений второго элемента U для всевозможных $(u, U) \in Z$ при условии, что первый элемент $u \in Z_1$ фиксирован.

Рассмотрим целые числа $k_1 \in [1, |W_1|]$ и $k_2 \in [1, |W_2|]$. Если $|Z_1| = k_1$ и независимо от значения первого элемента u выполнено равенство $|Z_2(u)| = k_2$, то скажем, что множество Z — *обобщенный прямоугольник* с параметрами k_1 и k_2 (“длиной” и “шириной”). Множество таких Z обозначим через $P_{\mathbf{W}} = P_{\mathbf{W}}[k_1, k_2]$. Положим

$$\mathcal{M} = \max_{1\leqslant k_1\leqslant|W_1|}\ \max_{1\leqslant k_2\leqslant|W_2|}\ \max_{Z\in P_{\mathbf{W}}[k_1,k_2]} \Big(\Big(\sum_{(u,U)\in Z} f\left(u, U\right)\Big)^2 \Big/ |Z|\Big). \tag{33}$$

Лемма 3.3. *[22, основная теорема, формула (3.1)]. Для произвольной функции $f : (W_1, W_2) \to \mathbb{R}_+$, для любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство*

$$\sum_{(u,U)\in\mathbf{W}} \left(f\left(u, U\right)\right)^2 \ll_\varepsilon |\mathbf{W}|^\varepsilon\, \mathcal{M}. \tag{34}$$

Доказательство. Ввиду леммы 3.2, достаточно оценить только правую часть (30). Для этого при $j = 1, 2, \ldots, |W_2|$ максимум в (30) заменим максимумом по $Z \in P_{\mathbf{W}}[k_1, j]$ и, не уменьшая этот максимум, распространим его на все обобщенные прямоугольники (кратная сумма по u и k из (30) при этом преобразуется в сумму по $(u, U) \in Z$ из (33), произведение $|Z_1|j$ — в мощность $|Z|$). Вынося этот максимум за знак суммы величин $1/j$, не превосходящей $\log|\mathbf{W}|+1 \ll_\varepsilon |\mathbf{W}|^{\varepsilon/2}$, получим результат неравенства (34). Лемма доказана. $\square$

Чтобы применить лемму 3.3 к оценке суммы из (23), включим множество $\mathfrak{P}_{\alpha,\beta}$ в прямое произведение $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\alpha,\beta}$ двух множеств:

$$W_1 = \left\{\frac{a}{q}\,\middle|\, q \in \left[2^{\alpha-1}, 2^\alpha\right), a \in [0, q], \gcd(a, q) = 1\right\}, \quad W_2 = \left\{\frac{l}{\mathcal{P}}\,\middle|\, l \in \left[2^{\beta-1}, 2^\beta\right)\right\}. \tag{35}$$

Введем также обозначения $u = a/q$, $U = l/\mathcal{P}$, $k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}} = k_1$, $k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}} = k_2$,

$$f\left(\frac{a}{q}, \frac{l}{\mathcal{P}}\right) = f_\lambda\left(\frac{a}{q}, \frac{l}{\mathcal{P}}\right) = \left|S_{\varepsilon_0}^{(N)}(\theta+\lambda)\right|, \qquad \sigma_{Z,\lambda} = \Big(\sum_{\theta\in Z} \left|S_{\varepsilon_0}^{(N)}(\theta+\lambda)\right|\Big)^2. \tag{36}$$

Тогда величины $|Z|$ и $\mathcal{M}$ из (33) могут быть записаны в виде

$$|Z| = k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}} k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}}, \qquad \mathcal{M} = \max_{1\leqslant k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}} < 2^{2\alpha}} \max_{1\leqslant k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}} < 2^{\beta}} \max_{Z\in P_{\mathbf{W}_{\alpha,\beta}}\left[k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}}, k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}}\right]} \left(\sigma_{Z,\lambda}/|Z|\right). \qquad (37)$$

Теорема 3.1. *Пусть для* $\xi \in (0, 1-\Delta_{\mathbf{A}})$, *при* $\Delta_{\mathbf{A}} > 0.5$, *при любых достаточно малых* $\varepsilon_0 \in (0,\ 0.0004)$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует* τ, *удовлетворяющее условию (20), такое что для каждого достаточно большого* $N \in \mathbb{N}$, *для любого* $\lambda \in (-\,0.5/N,\, 0.5/N]$, *при любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ *из (22), для любых целых* $k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}} \in \left(0, 2^{2\alpha}\right)$ *и* $k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}} \in \left(0, 2^{\beta}\right)$, *для любого обобщенного прямоугольника* $Z \in P_{\mathbf{W}_{\alpha,\beta}}\left[k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}}, k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}}\right]$ *выполняется оценка*

$$\sigma_{Z,\lambda} \ll_{\varepsilon} N^{\xi+\varepsilon}|Z| \left|\Omega_{\varepsilon_0}^{(N)}\right|^2 \tau^{-1}. \qquad (38)$$

Тогда выполнено неравенство (15).

Доказательство. Заменив величиной 1 каждое слагаемое тригонометрической суммы, получим следующую (т. н. *тривиальную*) оценку:

$$\sigma_{Z,\lambda}/|Z| \leqslant \left(|Z| \left|\Omega_{\varepsilon_0}^{(N)}\right|\right)^2 \Big/ |Z| = |Z| \left|\Omega_{\varepsilon_0}^{(N)}\right|^2 \leqslant 2^{2\alpha+\beta} \left|\Omega_{\varepsilon_0}^{(N)}\right|^2. \qquad (39)$$

Если $2^{2\alpha+\beta} \leqslant N^{\xi/2}$, то из (39) следует оценка

$$\sigma_{Z,\lambda} \ll |Z| N^{\xi} \left|\Omega_{\varepsilon_0}^{(N)}\right|^2 \tau^{-1}. \qquad (40)$$

Если же $2^{2\alpha+\beta} \geqslant N^{\xi/2}$, то оценка (40) получается из (38) при $\varepsilon < c'\xi/8$, где c' — из (20). Подставляя (40) в оценку (34) и используя обозначения (35) — (37), получаем оценку (23). Согласно теореме 2.1, теорема 3.1 доказана. □

Замечание 3.1. Согласно доказательству теоремы 3.1, для доказательства основной теоремы далее достаточно ограничиться рассмотрением случая

$$2^{2\alpha+\beta} \geqslant N^{\xi/2}. \qquad (41)$$

4. Множество, включающее ансамбль

Пусть $A = \max \mathbf{A}$, а некоторая величина $M_1 \in \mathbb{N}$ удовлетворяет неравенству

$$3300A^2 2^{\beta} \leqslant M_1 \leqslant \min\left\{3300A^2 2^{10(\alpha+\beta)},\ N^{1/(1+2\varepsilon_0)}/1.01\right\}. \qquad (42)$$

В формулировке следующей леммы $\Omega_1 = \Omega_1(M_1) \subseteq G_{\mathbf{A}}$ и $\Omega = \Omega(M_1) \subseteq G_{\mathbf{A}}$ — некоторые множества матриц. Под произведением множеств матриц понимается множество, состоящее из попарных произведений их элементов.

Лемма 4.1. *[15, лемма 4.1]. Для любого* M_1 *из (42) существуют множества* $\Omega_1 \subseteq G_{\mathbf{A}}$ *и* $\Omega \subseteq G_{\mathbf{A}}$, *такие что выполняются формулы* $\Omega_{\varepsilon_0}^{(N)} = \Omega_1 \Omega$ *и*

$$(M_1)^{2\Delta_{\mathbf{A}}} \Lambda \ll |\Omega_1| \ll (M_1)^{2\Delta_{\mathbf{A}}} \Lambda \qquad (43)$$

(где Λ *было определено перед (20)), а для любых двух матриц* $\mathrm{g}_1 \in \Omega_1$, $\mathrm{g} \in \Omega$ *выполняются оценки*

$$(\mathrm{g}_1)_{\max} \leqslant 1.01\,(M_1)^{1+2\varepsilon_0}, \qquad (\mathrm{g})_{\max} \leqslant 73A^2N/M_1. \qquad (44)$$

Всюду далее множества $\Omega_1(M_1)$ и $\Omega(M_1)$ фиксированы (если для некоторого M_1 из (42) найдется несколько пар множеств Ω_1 и Ω со свойствами из леммы 4.1, то выберем любую из таких пар).

Рассмотрим растущее $P>1$ и константу $C>1$. Через $G_{\mathbf{A}}^{P,C}$ обозначим множество матриц $\gamma\in G_{\mathbf{A}}$, таких что $P/C\leqslant(\gamma)_{\max}\leqslant P$. Для формулировки следующей леммы положим $C=11000A^4$. Под $\mathbf{P}$ будем понимать число, меньшее, чем $73A^2N/M_1$, и представимое в виде $\mathbf{P}=N\Lambda/M_1$.

Лемма 4.2. *[15, лемма 4.2]. Если для чисел $M_2, M_4\in\mathbb{N}$ выполнена оценка*

$$M_2M_4<\mathbf{P}/(2C), \tag{45}$$

то для Ω из леммы 4.1 выполнено включение

$$\Omega\subseteq G_{\mathbf{A}}^{\mathbf{P},C}\subseteq\left(G_{\mathbf{A}}^{M_2,4A^2}G_{\mathbf{A}}^{\frac{8A^4\mathbf{P}}{CM_2M_4},32A^4}G_{\mathbf{A}}^{2CM_4,8A^2C}\right). \tag{46}$$

Для множеств из правой части (46) введем обозначения:

$$\Omega_2=G_{\mathbf{A}}^{M_2,4A^2},\quad \Omega_3=G_{\mathbf{A}}^{\frac{8A^4\mathbf{P}}{CM_2M_4},32A^4},\quad \Omega_4=G_{\mathbf{A}}^{2CM_4,8A^2C},\quad \Omega_7=\Omega_3\Omega_4. \tag{47}$$

Элементы множеств $\Omega,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4$ и Ω_7 в дальнейшем обозначаются через $\mathrm{g},\mathrm{g}_2,\mathrm{g}_3,\mathrm{g}_4,\mathrm{g}_7$ соответственно, а также через $\mathrm{g}',\mathrm{g}_2',\mathrm{g}_3',\mathrm{g}_4',\mathrm{g}_7'$. В обозначениях (47) лемма 4.2 означает, что для любых g и g' из Ω найдутся представления этих матриц в виде матричных произведений

$$\mathrm{g}'=\mathrm{g}_2'\mathrm{g}_7'=\mathrm{g}_2'\mathrm{g}_3'\mathrm{g}_4',\qquad \mathrm{g}=\mathrm{g}_2\mathrm{g}_7=\mathrm{g}_2\mathrm{g}_3\mathrm{g}_4. \tag{48}$$

Разложения (48) могут быть не единственными, но их не больше константы.

Лемма 4.3. *[15, лемма 4.3]. Число представлений матриц в виде произведений в* (48) *ограничено сверху константой, зависящей только от* $\mathbf{A}$.

В дальнейшем, для краткости изложения, будем полагать, что элементы равенств (48) определены однозначно (точнее, если для некоторого элемента g (или g') из Ω равенства (48) выполнены несколькими способами, то выберем и зафиксируем какой-либо один из них). Если $B\subseteq G_{\mathbf{A}}$ — множество матриц γ, то через $\widetilde{B}$ обозначим множество их правых столбцов $\widetilde{\gamma}$ и для любых двух элементов g' и g из Ω (из леммы 4.1) при $j=2,4,7$ положим:

$$\widetilde{\mathrm{g}}'=\begin{pmatrix}x\\X\end{pmatrix}\in\widetilde{\Omega},\quad \widetilde{\mathrm{g}}=\begin{pmatrix}y\\Y\end{pmatrix}\in\widetilde{\Omega},\quad \widetilde{\mathrm{g}}_j'=\begin{pmatrix}x_j\\X_j\end{pmatrix}\in\widetilde{\Omega}_j,\quad \widetilde{\mathrm{g}}_j=\begin{pmatrix}y_j\\Y_j\end{pmatrix}\in\widetilde{\Omega}_j. \tag{49}$$

В частности, всюду далее x,X,y и Y понимаются только в таком смысле.

Теорема 4.1. *[15, теорема 4.1, следствие 4.1]. Для всех достаточно больших $N\in\mathbb{N}$ и для любого целого M_1 из* (42) *существует число $\mathbf{P}<73A^2N/M_1$, представимое в виде $\mathbf{P}=N\Lambda/M_1$, такое что для любых натуральных чисел M_2 и M_4,* *удовлетворяющих неравенству* (45) *при* $C = 11000A^4$, *в обозначениях* (47) *и* (49) *выполняются как включение* $\Omega \subseteq \Omega_2\Omega_3\Omega_4$, *так и неравенства*

$$0.003\,(M_1)^{-1-2\varepsilon_0} N A^{-3} \leqslant \min\{x,y\} \leqslant \max\{x,y,X,Y\} \leqslant 73A^2 N\,(M_1)^{-1}\,, \qquad (50)$$

$$|\Omega_2| \gg (M_2)^{2\Delta_{\mathbf{A}}}\,, \quad |\Omega_4| \gg (M_4)^{2\Delta_{\mathbf{A}}}\,, \quad |\Omega| \leqslant |\Omega_2||\Omega_3||\Omega_4| \ll |\Omega|\Lambda,$$

$$M_2 \ll X_2, Y_2 \leqslant \max\{M_2-1,\,1\}, \quad M_4 \ll X_4, Y_4 \leqslant \max\{M_4-1,\,1\} \qquad (51)$$

(*в том числе неравенства* (51) — *для произвольных* $\widetilde{\mathrm{g}}'_j \in \widetilde{\Omega}_j$ *и* $\widetilde{\mathrm{g}}_j \in \widetilde{\Omega}_j$ *из* (49) *при* $j=2,4$); *при* $M_2=1$ *или* $M_4=1$ *выполняются соответственно, равенства* $\Omega_2=\{E\}$ *или* $\Omega_4=\{E\}$.

Всюду далее параметры M_1, M_2 и M_4 связаны с формулами $\Omega_{\varepsilon_0}^{(N)}=\Omega_1\Omega$ и $\Omega \subseteq \Omega_2\Omega_3\Omega_4$, так же, как в лемме 4.1 и теореме 4.1.

5. Свойства линейных сравнений и неравенств

При вычислении квадрата модуля тригонометрической суммы по θ возникает "дубликат" этого θ, обозначаемый через θ':

$$\Big|\sum_{\theta\in Z} e^{if(\theta)}\Big|^2 = \sum_{\theta\in Z} e^{if(\theta)} \sum_{\theta'\in Z} e^{-if(\theta')},$$

где $f(\theta)$ — любая действительнозначная функция. Всюду далее θ и θ' — произвольные числа из обобщенного прямоугольника $Z \in P_{\mathbf{W}_{\alpha,\beta}}$. В частности,

$$\theta = a/q + l/\mathcal{P}, \quad \theta' = a'/q' + l'/\mathcal{P}, \quad q', q \in \left[2^{\alpha-1}, 2^{\alpha}\right), \quad |l'|, |l| \in \left[2^{\beta-1}, 2^{\beta}\right), \qquad (52)$$

$$\gcd(a,q) = \gcd(a',q') = 1, \quad 0 \leqslant a \leqslant q, \quad 0 \leqslant a' \leqslant q'. \qquad (53)$$

Обозначим через $\mathbf{p}$ наибольший общий делитель чисел q и q'. Положим

$$q'_0 = q'/\mathbf{p}, \quad q_0 = q/\mathbf{p}, \quad [q,q'] = q'_0 q_0 \mathbf{p} = q'q/\mathbf{p} < 2^{2\alpha}/\mathbf{p}.$$

Используя обозначения (49) для содержащихся в них чисел x, X, y, Y, обозначим через t и T целые числа, для которых выполнены соотношения

$$a'q_0x - aq'_0y - t \equiv 0 \equiv a'q_0X - aq'_0Y - T \pmod{[q,q']}, \quad |t|, |T| \leqslant 0.5[q,q'] \qquad (54)$$

(при нестрогом выполнении последнего неравенства выбираем $t, T > 0$).

Пусть $\mathcal{Q}$ — количество различных q в равенствах $\theta = a/q + l/\mathcal{P}$ по всем θ, пробегающим множество Z. Определим величины $\mathbf{Q}$, $\mathbf{H}$ и F условиями:

$$\mathbf{Q} = \begin{cases} 2^{2\alpha}, & \text{если } \mathcal{Q} \geqslant 2, \\ 2^{\alpha}, & \text{если } \mathcal{Q} = 1, \end{cases} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mathbf{Q}}\left[\frac{3200A^2 2^{\beta}\mathbf{Q}}{M_1}\right], \quad F = \begin{cases} [4/\mathbf{H}]\,, & \text{если } \mathbf{H} \neq 0, \\ 4\mathbf{Q}, & \text{если } \mathbf{H} = 0 \end{cases} \qquad (55)$$

(где, здесь и далее, $[\omega] = \max\{z \in \mathbb{Z} \,|\, z \leqslant \omega\}$ — целая часть числа $\omega \in \mathbb{R}$, $\{\omega\} = \omega - [\omega]$ — его дробная часть, $\|\omega\| = \min\{\{\omega\}, \{-\omega\}\}$ — расстояние от ω до ближайшего целого). Отметим, что $F \neq 0$: из (42) и (55) следует, что

$$\mathbf{H} = \left[3200A^2 2^{\beta}\mathbf{Q}/M_1\right]/\mathbf{Q} \leqslant 3200A^2 2^{\beta}/M_1 < 1. \qquad (56)$$

Подставляя (56) в определение F в (55), получаем неравенство $F \geqslant 4 > 0$.

Положим

$$\mathbf{u} = \left[A^6 10^{10} \left(M_1\right)^{2\varepsilon_0}\right] + 1, \qquad \psi = \frac{yl}{\mathcal{P}} - \frac{t}{[q,q']}, \qquad \Psi = \frac{Yl}{\mathcal{P}} - \frac{T}{[q,q']}, \tag{57}$$

$$P_{\mathbf{u}} = \mathbf{H} 2^{2\alpha}/(\mathbf{u}\mathbf{p}) \leqslant 3200 A^2 2^{2\alpha+\beta}/(\mathbf{u}\mathbf{p} M_1). \tag{58}$$

Лемма 5.1. *[15, леммы 5.1, 5.2 и 5.3]. Пусть векторы* $\left(\begin{smallmatrix} x \\ X \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y \\ Y \end{smallmatrix}\right) \in \widetilde{\Omega}$ *и числа* θ *и* θ' *из* Z *удовлетворяют неравенствам*

$$\|x\theta' - y\theta\| \leqslant 75A^2/M_1, \qquad \|X\theta' - Y\theta\| \leqslant 75A^2/M_1, \tag{59}$$

в то время как числа t *и* T *из (54) удовлетворяют условию*

$$0 < \max\{|t|\,,\,|T|\} < [q,q']/(\mathbf{u}F). \tag{60}$$

Тогда выполняются следующие неравенства и сравнения:

$$\max\{|t|,|T|\} \leqslant P_{\mathbf{u}} \leqslant 3200 A^2 2^{2\alpha+\beta}/(\mathbf{u}\mathbf{p} M_1), \tag{61}$$

$$0 \neq yT - Yt \equiv 0 \pmod{q_0}, \tag{62}$$

$$0 \neq xT - Xt \equiv 0 \pmod{q_0'}. \tag{63}$$

Разобьем интервал $[0,1)$ на $\mathbf{u}F$ полуоткрытых интервалов

$$I_{r,p} = \left[\frac{r}{F} + \frac{p}{\mathbf{u}F},\ \frac{r}{F} + \frac{p+1}{\mathbf{u}F}\right), \quad \text{где} \quad 0 \leqslant r < F, \quad 0 \leqslant p < \mathbf{u}, \quad r,p \in \mathbb{Z}. \tag{64}$$

Лемма 5.2. *[15, лемма 5.5]. При любых* p, r, *и* r', *таких что* $r \neq r'$, *для любых элементов* $f \in I_{r,p}$ *и* $h \in I_{r',p}$ *величина* $\|f - h\|$ *не меньше, чем* $1/(2F)$*:*

$$\|f - h\| \geqslant 1/(2F). \tag{65}$$

Теорема 5.1. *[15, теорема 6.1]. Пусть при фиксированном наборе величин*

$$l,\ q,\ q',\ y,\ Y,\ t,\ T \tag{66}$$

выполнены формулы (42), (54) *и* (60)*. Тогда, во-первых, при каждом заданном* x *число* l' *из* (52) *принадлежит фиксированному отрезку длины* Λ.

Во-вторых, если выполнена оценка

$$2^\beta > 10^9 A^7 \left(M_1\right)^{2\varepsilon_0}, \tag{67}$$

то в обозначениях (57) *дробь* x/X *удовлетворяет неравенству*

$$|x/X - \psi/\Psi| \leqslant 10^8 A^6 \left(M_1\right)^{2\varepsilon_0} 2^{-\beta} \leqslant \Lambda 2^{-\beta}. \tag{68}$$

6. Тригонометрическая сумма по ансамблю

Для каждого набора целых чисел $\mathbf{p}, t$ и T рассмотрим множества

$$\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ Y \end{pmatrix}, \theta, \theta' \right) \in \left(\widetilde{\Omega}^2, Z^2 \right) \;\middle|\; \begin{matrix} q \equiv q' \equiv 0 \pmod{\mathbf{p}}, \\ \text{(52)-(54), (59) и (60)} \end{matrix} \right\} \tag{69}$$

и их непересекающееся объединение

$$\mathfrak{N} = \bigcup_{1 \leqslant \mathbf{p} < 2^{\alpha}} \bigcup_{|t| \leqslant P_{\mathbf{u}}} \bigcup_{|T| \leqslant P_{\mathbf{u}}} \mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}$$

(тогда справедливо равенство $|\mathfrak{N}| = \sum\limits_{p,t,T} |\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}|$). Для всякого утверждения K через $\mathbf{1}_{\{K\}}$ обозначим число 1, если K истинно, или 0, если K ложно.

Лемма 6.1. *[15, лемма 7.4]. При $H = 1,01\,(M_1)^{1+2\varepsilon_0}$ выполнена оценка*

$$\sigma_{Z,\lambda} \ll_{\varepsilon_0} (M_1)^{2+4\varepsilon_0} |\Omega_1| \sum_{\substack{0 \leqslant r < F, \\ 0 \leqslant R < F, \\ 0 \leqslant r' < F, \\ 0 \leqslant R' < F}} \sum_{\substack{0 \leqslant p, P < \mathbf{u}, \\ \binom{x}{X}, \binom{y}{Y} \in \widetilde{\Omega}, \\ \theta', \theta \in Z}} \mathbf{1}_{\left\{ \begin{smallmatrix} \|(\theta'+\lambda)x - (\theta+\lambda)y\| < 1/(2H), \\ \|(\theta'+\lambda)X - (\theta+\lambda)Y\| < 1/(2H), \\ \{ay/q\} \in I_{r,p}, \ \{a'x/q'\} \in I_{r',p}, \\ \{aY/q\} \in I_{R,P}, \ \{a'X/q'\} \in I_{R',P} \end{smallmatrix} \right\}}. \tag{70}$$

Лемма 6.2. *[15, лемма 7.5]. Выполнена оценка*

$$\sigma_{Z,\lambda} \ll (M_1)^2 \Lambda |\Omega_1| \sum_{\substack{0 \leqslant p, P < \mathbf{u}, \\ 0 \leqslant r, R < F}} \sum_{\substack{\binom{x}{X} \in \widetilde{\Omega}, \\ \theta' \in Z}} \sum_{\substack{\binom{y}{Y} \in \widetilde{\Omega}, \\ \theta \in Z}} \mathbf{1}_{\left\{ \begin{smallmatrix} (59), \ \left\{\frac{ay}{q}\right\}, \left\{\frac{a'x}{q'}\right\} \in I_{r,p}, \\ \left\{\frac{aY}{q}\right\}, \left\{\frac{a'X}{q'}\right\} \in I_{R,P} \end{smallmatrix} \right\}}. \tag{71}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим содержащиеся в (70) неравенства

$$\|(\theta' + \lambda)x - (\theta + \lambda)y\| \leqslant 1/(2H), \qquad \|(\theta' + \lambda)X - (\theta + \lambda)Y\| \leqslant 1/(2H) \tag{72}$$

вместе с неравенством треугольника и неравенством $|\lambda| \leqslant 1/(2N)$, следующем из (18). Тогда получим оценки $\|x\lambda - y\lambda\| \leqslant |x\lambda - y\lambda| \leqslant \max\{x, y\}/N$ и

$$\|x\theta' - y\theta\| \leqslant \|x(\theta' + \lambda) - y(\theta + \lambda)\| + \max\{x, y\}/N. \tag{73}$$

К правой части (73) применимы оценки (50) и (72), тогда получим

$$\|x\theta' - y\theta\| < 0.5\,(M_1)^{-1-2\varepsilon_0} + 73A^2/M_1 \leqslant 75A^2/M_1. \tag{74}$$

В (50) доказано первое из неравенств (59), второе доказывается аналогично. Из (59), согласно [15, теорема 5.2], следует оценка

$$|\{a'x/q'\} - \{ay/q\}| < 1/(2F). \tag{75}$$

Но если $\{a'x/q'\} \in I_{r',p}$ и $\{ay/q\} \in I_{r,p}$, то при $r \neq r'$ оценка (75) противоречит неравенству (65). Отсюда следует, что $r = r'$. Аналогично доказывается, что $R = R'$, откуда следует неравенство (71). Лемма доказана. $\square$

Теорема 6.1. *Пусть при* $\Delta_{\mathbf{A}} > 0.5$, *для* $\xi \in (0, 1-\Delta_{\mathbf{A}})$, *при любых достаточно малых* $\varepsilon_0 \in (0,\ 0.0004)$ *и* $\varepsilon > 0$, *для любого достаточно большого* $N \in \mathbb{N}$ *существует* τ, *удовлетворяющее условию* (20), *такое что при любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ *из* (22), *для любых целых* $k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}} \in \left(0, 2^{2\alpha}\right)$ *и* $k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}} \in \left(0, 2^{\beta}\right)$, *для любого* $Z \in P_{\mathbf{W}_{\alpha,\beta}}\left[k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}}, k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}}\right]$ *существует в интервале* (42) *целое число* M_1, *для которого выполняется оценка*

$$|\mathfrak{N}| \ll_{\varepsilon} N^{\xi+\varepsilon} |Z|\, |\Omega|^2 \left(M_1\right)^{2\Delta_{\mathbf{A}}-2} \tau^{-1}. \tag{76}$$

Тогда выполняется неравенство (15).

Доказательство. Покажем, что из (71) следует оценка

$$\sigma_{Z,\lambda} \ll \left(M_1\right)^2 |\Omega_1|\, |\mathfrak{N}|\, \Lambda \ll \left|\Omega_{\varepsilon_0}^{(N)}\right|^2 \left(M_1\right)^{2-2\Delta_{\mathbf{A}}} |\mathfrak{N}|\, \Lambda |\Omega|^{-2}. \tag{77}$$

Действительно: неравенства (59), упомянутые в (69), содержатся под знаком "**1**" в (71); из свойств $\{ay/q\} \in I_{r,p}$ и $\{a'x/q'\} \in I_{r,p}$ следует неравенство в (60) для $|t|$; аналогичное неравенство для $|T|$ доказывается тем же способом. Отсюда, согласно лемме 5.1, следуют оценки (61). Свойства (52) и (53) получаются из определения множества $\mathfrak{P}_{\alpha,\beta}$, соотношения (54) — из построения. Таким образом, условия под знаком "**1**" в (71) определяют множество $\mathfrak{N}$. Поэтому первая оценка в (77) доказана. Итоговая оценка в (77) следует из разложения $\left|\Omega_{\varepsilon_0}^{(N)}\right| = |\Omega_1|\,|\Omega|$, взятого из леммы 4.1, и из оценки (43).

Согласно теореме 3.1, неравенство (15) следует из оценки (38). Но последняя следует из оценок (76) и (77), так что теорема доказана. □

7. Использование кратных сумм

Фиксируем произвольные $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}$, такие что $\mathbf{w}q_0 - \mathbf{v}q_0' = 1$. В следующей лемме будут использованы обозначения (49) и (69). Для целых $\mathbf{k}$ и $\mathbf{K}$ положим

$$w_{\mathbf{k}} = \mathbf{w}t + \mathbf{k}q_0', \quad v_{\mathbf{k}} = \mathbf{v}t + \mathbf{k}q_0, \quad W_{\mathbf{K}} = \mathbf{w}T + \mathbf{K}q_0', \quad V_{\mathbf{K}} = \mathbf{v}T + \mathbf{K}q_0.$$

Лемма 7.1. *[15, лемма 8.2]. Для любого непустого* $\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}$ *и для любой четверки* $\left(\binom{x}{X}, \binom{y}{Y}, \theta', \theta\right) \in \mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}$ *существуют, причем — единственные, целые числа* $\mathbf{k}$ *и* $\mathbf{K}$ *из интервала* $[0, \mathbf{p}-1]$, *такие что выполняются сравнения*

$$xa' - w_{\mathbf{k}} \equiv 0 \equiv Xa' - W_{\mathbf{K}} \pmod{q'}, \qquad ya - v_{\mathbf{k}} \equiv 0 \equiv Ya - V_{\mathbf{K}} \pmod{q}.$$

Пусть множество $\Xi \subseteq \mathbb{Z}^2$ — любое. Для любых целых чисел w и W при заданных значениях q', a' или q, a положим

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{q',a'}^{(\Xi)} \begin{bmatrix} w \\ W \end{bmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathfrak{x} \\ \mathfrak{X} \end{pmatrix} \in \Xi \;\middle|\; \mathfrak{x}a' - w \equiv 0 \equiv \mathfrak{X}a' - W \pmod{q'} \right\}, \tag{78}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{q,a} \begin{bmatrix} w \\ W \end{bmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ Y \end{pmatrix} \in \widetilde{\Omega} \;\middle|\; ya - w \equiv 0 \equiv Ya - W \pmod{q} \right\}. \tag{79}$$

Лемма 7.2. *Для любого* $\mathbf{p}$, *для любого* $Z \in P_{\mathbf{W}_{\alpha,\beta}}$ *при* α *и* β *из* (22) *и* $|t|+|T|>0$ *выполнены оценки*

$$|\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}| \leqslant \sum_{0\leqslant\mathbf{k},\mathbf{K}<\mathbf{p}} \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} x\\ X\end{smallmatrix}\right)\in\widetilde{\Omega},\\ \left(\begin{smallmatrix} y\\ Y\end{smallmatrix}\right)\in\widetilde{\Omega}}} \sum_{\substack{\theta,\theta'\in Z:\\ q,q'\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathbf{p}),\\ q_0'\left|(xT-Xt),\right.\\ q_0\left|(yT-Yt)\right.}} \mathbf{1}\left\{\begin{gathered} (52)\text{-}(54),\,(59),\,(60),\\ \begin{pmatrix} x\\ X\end{pmatrix}\in\mathbf{X}^{(\widetilde{\Omega})}_{q',a'}\begin{bmatrix} w_{\mathbf{k}}\\ W_{\mathbf{K}}\end{bmatrix},\\ \begin{pmatrix} y\\ Y\end{pmatrix}\in\mathbf{Y}_{q,a}\begin{bmatrix} v_{\mathbf{k}}\\ V_{\mathbf{K}}\end{bmatrix}\end{gathered}\right\}, \tag{80}$$

$$|\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}| \leqslant \sum_{\left(\begin{smallmatrix} x\\ X\end{smallmatrix}\right)\in\widetilde{\Omega}} \sum_{\substack{\theta,\theta'\in Z:\\ q,q'\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathbf{p})}} \sum_{\substack{0\leqslant\mathbf{k},\mathbf{K}<\mathbf{p},\\ \left(\begin{smallmatrix} y\\ Y\end{smallmatrix}\right)\in\mathbf{Y}_{q,a}\left[\begin{smallmatrix} v_{\mathbf{k}}\\ V_{\mathbf{K}}\end{smallmatrix}\right]}} \mathbf{1}\left\{\begin{gathered} (52)\text{-}(54),\,(59),\,(60),\\ \begin{pmatrix} x\\ X\end{pmatrix}\in\mathbf{X}^{(\widetilde{\Omega})}_{q',a'}\begin{bmatrix} w_{\mathbf{k}}\\ W_{\mathbf{K}}\end{bmatrix}\end{gathered}\right\}. \tag{81}$$

Доказательство. Условия (59) и (60) взяты из (69), делимость на q_0 и q_0' — из леммы 5.1. Применив лемму 7.1, приходим к неравенству (80). Исключая из него эти свойства делимости, получаем оценку

$$|\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}| \leqslant \sum_{0\leqslant\mathbf{k},\mathbf{K}<\mathbf{p}} \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} x\\ X\end{smallmatrix}\right)\in\widetilde{\Omega},\\ \left(\begin{smallmatrix} y\\ Y\end{smallmatrix}\right)\in\widetilde{\Omega}}} \sum_{\substack{\theta,\theta'\in Z:\\ q,q'\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathbf{p})}} \mathbf{1}\left\{\begin{gathered} (52)\text{-}(54),\,(59),\,(60),\\ \begin{pmatrix} x\\ X\end{pmatrix}\in\mathbf{X}^{(\widetilde{\Omega})}_{q',a'}\begin{bmatrix} w_{\mathbf{k}}\\ W_{\mathbf{K}}\end{bmatrix},\\ \begin{pmatrix} y\\ Y\end{pmatrix}\in\mathbf{Y}_{q,a}\begin{bmatrix} v_{\mathbf{k}}\\ V_{\mathbf{K}}\end{bmatrix}\end{gathered}\right\}. \tag{82}$$

Меняя в (82) порядок суммирования, получаем оценку (81). Лемма доказана. □

Пусть для чисел $\theta' = a'/q' + l'/\mathcal{P}$, пробегающих все множество Z, символы

$$Z_{\mathbf{a}/\mathbf{q}}, \quad Z_{\cdot\mathbf{l}}(a'/q') \tag{83}$$

соответствуют множествам Z_1 и $Z_2(u)$: они обозначают множество значений первого элемента пары $(a'/q', l')$ или второго из них, соответственно, когда первый — уже определен. Тогда для любой функции $f(\theta')$ выполнено

$$\sum_{\theta'\in Z} f(\theta') = \sum_{a'/q'\in Z_{\mathbf{a}/\mathbf{q}}} \sum_{l'\in Z_{\cdot\mathbf{l}}(a'/q')} f\left(a'/q' + l'/\mathcal{P}\right). \tag{84}$$

Теорема 7.1. *Для любых* M_1 *из* (42), $Z \in P_{\mathbf{W}_{\alpha,\beta}}$, α *и* β *из* (22) *выполнено*

$$\sum_{\substack{1\leqslant\mathbf{p}<2^{\alpha},\\ |t|\leqslant P_{\mathbf{u}},\\ |T|\leqslant P_{\mathbf{u}}:\\ |t|+|T|>0}} |\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}| \ll \Lambda \sum_{\substack{1\leqslant\mathbf{p}<2^{\alpha},\\ |t|\leqslant P_{\mathbf{u}},\\ |T|\leqslant P_{\mathbf{u}}:\\ |t|+|T|>0,\\ 0\leqslant\mathbf{k},\mathbf{K}<\mathbf{p}}} \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} x\\ X\end{smallmatrix}\right)\in\widetilde{\Omega},\\ \left(\begin{smallmatrix} y\\ Y\end{smallmatrix}\right)\in\widetilde{\Omega}}} \sum_{\substack{\theta\in Z,\,a'/q'\in Z_{\mathbf{a}/\mathbf{q}}:\\ q,q'\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathbf{p}),\\ q_0\left|(yT-Yt),\right.\\ q_0'\left|(xT-Xt)\right.}} \mathbf{1}\left\{\begin{gathered} \begin{pmatrix} x\\ X\end{pmatrix}\in\mathbf{X}^{(\widetilde{\Omega})}_{q',a'}\begin{bmatrix} w_{\mathbf{k}}\\ W_{\mathbf{K}}\end{bmatrix},\\ \begin{pmatrix} y\\ Y\end{pmatrix}\in\mathbf{Y}_{q,a}\begin{bmatrix} v_{\mathbf{k}}\\ V_{\mathbf{K}}\end{bmatrix}\end{gathered}\right\}, \tag{85}$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant\mathbf{p}<2^{\alpha},\\ |t|\leqslant P_{\mathbf{u}},\\ |T|\leqslant P_{\mathbf{u}}:\\ |t|+|T|>0}} |\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}| \ll \Lambda \sum_{\substack{1\leqslant\mathbf{p}<2^{\alpha},\\ |t|\leqslant P_{\mathbf{u}},\\ |T|\leqslant P_{\mathbf{u}}:\\ |t|+|T|>0}} \sum_{\substack{\theta\in Z,\,a'/q'\in Z_{\mathbf{a}/\mathbf{q}}:\\ q,q'\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathbf{p}),\\ 0\leqslant\mathbf{k},\mathbf{K}<\mathbf{p}}} \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} y\\ Y\end{smallmatrix}\right)\in\mathbf{Y}_{q,a}\left[\begin{smallmatrix} v_{\mathbf{k}}\\ V_{\mathbf{K}}\end{smallmatrix}\right],\\ \left(\begin{smallmatrix} x\\ X\end{smallmatrix}\right)\in\mathbf{X}^{(\widetilde{\Omega})}_{q',a'}\left[\begin{smallmatrix} w_{\mathbf{k}}\\ W_{\mathbf{K}}\end{smallmatrix}\right]}} \mathbf{1}\left\{\begin{gathered} (68)\\ \text{или}\\ 2^{\beta}\ll\Lambda\end{gathered}\right\}. \tag{86}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Суммируем оценки (80) и (81) по параметрам $\mathbf{p}, t, T$:

$$\sum_{\substack{1\leqslant \mathbf{p}<2^{\alpha},\\ |t|\leqslant P_{\mathbf{u}},\\ |T|\leqslant P_{\mathbf{u}}:\\ |t|+|T|>0}} |\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant \mathbf{p}<2^{\alpha},\\ |t|\leqslant P_{\mathbf{u}},\\ |T|\leqslant P_{\mathbf{u}}:\\ |t|+|T|>0,\\ 0\leqslant \mathbf{k},\mathbf{K}<\mathbf{p}}} \sum_{\substack{\binom{x}{X}\in\widetilde{\Omega},\\ \binom{y}{Y}\in\widetilde{\Omega}}} \sum_{\substack{\theta,\theta'\in Z:\\ q,q'\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,\mathbf{p}),\\ q_0' \mid (xT-Xt),\\ q_0 \mid (yT-Yt)}} \mathbf{1}\left\{\begin{array}{c} (52)\text{-}(54), (59),\ (60),\\ \binom{x}{X}\in \mathbf{X}^{(\widetilde{\Omega})}_{q',a'}\begin{bmatrix} w_{\mathbf{k}}\\ W_{\mathbf{K}}\end{bmatrix},\\ \binom{y}{Y}\in \mathbf{Y}_{q,a}\begin{bmatrix} v_{\mathbf{k}}\\ V_{\mathbf{K}}\end{bmatrix}\end{array}\right\}, \tag{87}$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant \mathbf{p}<2^{\alpha},\\ |t|\leqslant P_{\mathbf{u}},\\ |T|\leqslant P_{\mathbf{u}}:\\ |t|+|T|>0}} |\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant \mathbf{p}<2^{\alpha},\\ |t|\leqslant P_{\mathbf{u}},\\ |T|\leqslant P_{\mathbf{u}}:\\ |t|+|T|>0,\\ \binom{x}{X}\in\widetilde{\Omega}}} \sum_{\substack{\theta,\theta'\in Z:\\ q,q'\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,\mathbf{p}),\\ 0\leqslant \mathbf{k},\mathbf{K}<\mathbf{p},\\ \binom{y}{Y}\in \mathbf{Y}_{q,a}\left[\begin{smallmatrix} v_{\mathbf{k}}\\ V_{\mathbf{K}}\end{smallmatrix}\right]}} \mathbf{1}\left\{\begin{array}{c} (52)\text{-}(54), (59),\ (60),\\ \binom{x}{X}\in \mathbf{X}^{(\widetilde{\Omega})}_{q',a'}\begin{bmatrix} w_{\mathbf{k}}\\ W_{\mathbf{K}}\end{bmatrix}\end{array}\right\}. \tag{88}$$

В правых частях каждого из неравенств (87) и (88) выделим отдельно сумму по θ' и заменим ее суммой по a'/q' и l' на основании формулы (84). Расположим сумму по l' *правее* суммы по параметрам $x, X, \theta, a'/q', y, Y, t$ и T. Тогда, согласно теореме 5.1, число l' принадлежит некоторому множеству мощности Λ. Поэтому, добавляя “Λ” в виде множителя, сумму по l' в (87) и (88) можно отбросить. Отбрасывая в (87) также требование выполнения нескольких формул и меняя порядок суммирования, приходим к формуле (85).

Наконец, фиксируя параметры (66), на основании теоремы 5.1 приходим к выводу, что упомянутые в (88) пронумерованные формулы можно заменить на (68) (или же, при невыполнении оценки (67), получается неравенство $2^{\beta} \ll \Lambda$). Таким образом, формула (88) приводится к виду (86) (также при некотором изменении порядка суммирования). Теорема доказана. $\square$

8. Следствия из теоремы 7.1.

8.1. Свойства кратной суммы из (85)

Лемма 8.1. *Пусть $Z \in P_{\mathbf{W}_{\alpha,\beta}}\left[k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}}, k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}}\right]$, α и β — из (22), $\varepsilon > 0$ — любое, а для заданных чисел t и T выполнено неравенство (60).*

Тогда для любых заданных чисел $\mathbf{p}$ и q_0' выполнена оценка

$$\sum_{\binom{y}{Y}\in\widetilde{\Omega}} \sum_{\substack{\theta\in Z:\\ q\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,\mathbf{p})}} \sum_{0\leqslant \mathbf{k},\mathbf{K}<\mathbf{p}} \mathbf{1}\left\{(62),\ \binom{y}{Y}\in \mathbf{Y}_{q,a}\begin{bmatrix} v_{\mathbf{k}}\\ V_{\mathbf{K}}\end{bmatrix}\right\} \ll_{\varepsilon} |\Omega|\, N^{\varepsilon}\mathbf{p}k_{\frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{p}}}. \tag{89}$$

Кроме того, для любых заданных чисел $\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{K}$ и q_0 выполнена оценка

$$\sum_{\binom{x}{X}\in\widetilde{\Omega}} \sum_{\substack{a'/q'\in Z_{\mathbf{a}/\mathbf{q}}:\\ q'\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,\mathbf{p})}} \mathbf{1}\left\{ (63),\ \binom{x}{X}\in \mathbf{X}^{(\widetilde{\Omega})}_{q',a'}\begin{bmatrix} w_{\mathbf{k}}\\ W_{\mathbf{K}}\end{bmatrix} \right\} \ll_{\varepsilon} |\Omega|\, N^{\varepsilon}. \tag{90}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Хотя левые части неравенств (89) и (90) не зависят явно от q_0' или q_0, но эти числа нужны для обозначений $v_{\mathbf{k}}$ и $V_{\mathbf{K}}$, $w_{\mathbf{k}}$ и $W_{\mathbf{K}}$.

Докажем неравенство (89). Вектор $\binom{y}{Y}$ можно выбрать одним из $|\Omega|$ способов — это первый множитель в оценке (89). Далее, имея ввиду (62), число $|yT - Yt| > 0$

делится на q_0. Поэтому число q_0 выберем как один из делителей числа $|yT - Yt| \leqslant N^2$. Согласно [24, глава II, параграф 11, лемма 13], количество этих делителей не превосходит величины $\ll_\varepsilon N^\varepsilon$ — второго множителя в правой части неравенства (89). Другой итог произведенных рассуждений: теперь полный набор из четырех величин t, T, q_0 и q_0' позволяет корректно использовать обозначения $v_{\mathbf{k}}$ и $V_{\mathbf{K}}$.

Для любых $\mathbf{k}$ и $\mathbf{K}$, по определению множества $\mathbf{Y}_{q,a}\begin{bmatrix} v_{\mathbf{k}} \\ V_{\mathbf{K}} \end{bmatrix}$, выполнено

$$ya \equiv \mathbf{v}t + \mathbf{k}q_0 \,(\mathrm{mod}\ q_0\mathbf{p}), \qquad Ya \equiv \mathbf{v}T + \mathbf{K}q_0 \,(\mathrm{mod}\ q_0\mathbf{p}). \tag{91}$$

Число a, не превосходящее $q = q_0\mathbf{p}$, разделим с остатком на q_0:

$$a = nq_0 + m, \quad 0 \leqslant m < q_0, \quad 0 \leqslant n \leqslant \mathbf{p}. \tag{92}$$

Переходя в (91) к сравнениям по модулю q_0, получаем:

$$ym \equiv \mathbf{v}t \,(\mathrm{mod}\ q_0), \qquad Ym \equiv \mathbf{v}T \,(\mathrm{mod}\ q_0). \tag{93}$$

Поскольку y и Y взаимно просты, то число m сравнениями (93) определено однозначно по модулю q_0 — и полностью однозначно, так как $0 \leqslant m < q_0$.

Выберем величину n из (92) одним из $\ll \mathbf{p}$ способов, получая третий множитель в правой части неравенства (89). Число a теперь полностью определено по формуле (92). Суммируя полученную оценку по всем l, количество которых равно $k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}}$, получаем последний множитель в правой части неравенства (89).

Далее, сравнениями (91) слагаемые $q_0\mathbf{k}$ и $q_0\mathbf{K}$ определены однозначно по модулю $q_0\mathbf{p}$. Это означает, что числа $\mathbf{k}$ и $\mathbf{K}$ этими сравнениями определены однозначно по модулю $\mathbf{p}$ — и полностью однозначно как целые числа, так как они меньше, чем $\mathbf{p}$, и неотрицательны. Неравенство (89) доказано.

Полностью аналогично доказывая неравенство (90), вектор $\binom{x}{X}$ выберем одним из $|\Omega|$ способов, а число $q_0' = q'/\mathbf{p}$ как один из делителей числа $|xT - Xt| > 0$ — одним из не более, чем $\ll_\varepsilon N^\varepsilon$ способов. Остается только однозначно (ввиду взаимной простоты чисел x и X) определить неотрицательное целое число $a' \leqslant q'$ (равенство здесь возможно только при $q' = 1$) из сравнений

$$xa' \equiv \mathbf{w}t + \mathbf{k}q_0' \,(\mathrm{mod}\ q_0'\mathbf{p}), \qquad Xa' \equiv \mathbf{w}T + \mathbf{K}q_0' \,(\mathrm{mod}\ q_0'\mathbf{p}),$$

данных в определении $\mathbf{X}^{(\widetilde{\Omega})}_{q',a'}\begin{bmatrix} w_{\mathbf{k}} \\ W_{\mathbf{K}} \end{bmatrix}$. Оценка (90) доказана. Лемма доказана. $\square$

В следующей теореме используются обозначения (58), (69) и (83).

Теорема 8.1. *Для любого* $Z \in P_{\mathbf{W}_{\alpha,\beta}}\left[k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}}, k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}}\right]$ *при выполнении условий* (22), (41) *и* (42) *выполняется оценка*

$$\sum_{1 \leqslant \mathbf{p} < 2^\alpha} \ \sum_{\substack{|t|,|T| \leqslant P_{\mathbf{u}}: \\ |t|+|T|>0}} |\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}| \ll \frac{2^{4\alpha+2\beta}\,|\Omega|^2\,k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}}\Lambda}{(M_1)^2} = \frac{2^{4\alpha+2\beta}\,|\Omega|^2\,|Z|\Lambda}{k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}}\,(M_1)^2}. \tag{94}$$

Доказательство. Согласно определению множеств $\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}$, выполнены условия (59) и (60) из лемм 5.1 и 8.1, из которых следуют неравенства (62), (63) и (89).

Если выполнено неравенство $\mathbf{p}M_1 > 2^{2\alpha+\beta}$, то, ввиду (58), $P_{\mathbf{u}} < 1$, так что сумма по t и T в (94) равна нулю; если же $\mathbf{p}M_1 \leqslant 2^{2\alpha+\beta}$, то, перемножая длины интервалов изменения переменных t и T, из (58) получаем оценку

$$\bigl|\{(t,T)\,:\,|t|,|T| \leqslant P_{\mathbf{u}}\}\bigr| \leqslant (2P_{\mathbf{u}}+1)^2 \leqslant \left(\frac{6400A^2 2^{2\alpha+\beta}}{\mathbf{up}M_1}+1\right)^2 \ll \frac{2^{4\alpha+2\beta}}{(\mathbf{p}M_1)^2}. \tag{95}$$

Заменяя ε на $\varepsilon/2$, просуммируем неравенство (89) по t и T с помощью (95), меняя порядок суммирования:

$$\sum_{\substack{|t|,|T|\leqslant P_{\mathbf{u}}:\\ |t|+|T|>0}} \ \sum_{\substack{0\leqslant \mathbf{k},\mathbf{K}<\mathbf{p},\\ a/q\in Z_{\mathbf{a}/\mathbf{q}}:\\ q\equiv 0 \pmod{\mathbf{p}}}} \ \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} y\\ Y\end{smallmatrix}\right)\in \mathbf{Y}_{q,a}\left[\begin{smallmatrix} v_{\mathbf{k}}\\ V_{\mathbf{K}}\end{smallmatrix}\right]:\\ q_0 \left|(yT-Yt)\neq 0\right.}} \ \sum_{l\in Z_{\cdot\mathbf{l}}(a/q)} 1 \ll_\varepsilon \frac{2^{4\alpha+2\beta}\,|\Omega|\,N^{\varepsilon/2}k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}}}{(M_1)^2\,\mathbf{p}}.$$

Суммируем последнее неравенство по всем $\mathbf{p}<2^\alpha$, учитывая, что $2^\alpha<N$:

$$\sum_{\substack{1\leqslant\mathbf{p}<2^\alpha,\\ |t|,|T|\leqslant P_{\mathbf{u}}:\\ |t|+|T|>0}} \ \sum_{\substack{0\leqslant \mathbf{k},\mathbf{K}<\mathbf{p},\\ a/q\in Z_{\mathbf{a}/\mathbf{q}}:\\ q\equiv 0 \pmod{\mathbf{p}}}} \ \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} y\\ Y\end{smallmatrix}\right)\in \mathbf{Y}_{q,a}\left[\begin{smallmatrix} v_{\mathbf{k}}\\ V_{\mathbf{K}}\end{smallmatrix}\right]:\\ q_0 \left|(yT-Yt)\neq 0\right.}} \ \sum_{l\in Z_{\cdot\mathbf{l}}(a/q)} 1 \ll_\varepsilon 2^{4\alpha+2\beta}\,|\Omega|\,N^{\varepsilon}k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}}(M_1)^{-2}. \tag{96}$$

Подставляя доказанное неравенство (96) в формулу (85), получаем

$$\sum_{\substack{1\leqslant\mathbf{p}<2^\alpha,\\ |t|\leqslant P_{\mathbf{u}},\\ |T|\leqslant P_{\mathbf{u}}:\\ |t|+|T|>0}} |\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}| \ll_\varepsilon \frac{2^{4\alpha+2\beta}\,|\Omega|\,N^{\varepsilon}k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}}}{(M_1)^2} \max_{\substack{1\leqslant\mathbf{p}<2^\alpha,\\ |t|\leqslant P_{\mathbf{u}},\\ |T|\leqslant P_{\mathbf{u}}:\\ |t|+|T|>0,\\ a/q\in Z_{\mathbf{a}/\mathbf{q}}}} \ \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix} x\\ X\end{smallmatrix}\right)\in\widetilde{\Omega},\\ a'/q'\in Z_{\mathbf{a}/\mathbf{q}}:\\ q'\equiv 0 \pmod{\mathbf{p}}}} \mathbf{1}\left\{\begin{array}{c} q_0' \left|(xT-Xt)\neq 0,\right. \\ \left(\begin{smallmatrix} x\\ X\end{smallmatrix}\right)\in \mathbf{X}^{(\widetilde{\Omega})}_{q',a'}\left[\begin{smallmatrix} w_{\mathbf{k}}\\ W_{\mathbf{K}}\end{smallmatrix}\right]\end{array}\right\}.$$

Подставим в последнее неравенство оценку (90) (имеющую место по лемме 8.1) и учтем, что из условия (41) следует свойство $N^\varepsilon=\Lambda$. Тогда получим неравенство в (94). Равенство в (94) следует из (37). Формула (94) доказана.

В этом доказательстве две части леммы 8.1 применялись последовательно. Однако в условиях каждой из них оговорено предварительное определение той из величин q_0 или q_0', которая определяется только из другой ее части. Это противоречие легко преодолеть, начав оценку правой части формулы (85) с независимой оценки количества величин q_0 или q_0', как это было сделано в начале доказательства каждой из двух частей леммы 8.1, только затем переходя к оценке других величин по схеме того же доказательства. Теорема доказана. $\square$

8.2. Кратная сумма из (86)

Для некоторого $C'>0$ положим

$$M_2 = \max\left\{1,\ C'\sqrt{2^\beta}\,(M_1)^{-2\varepsilon_0}\right\}. \tag{97}$$

Для формулировки следующей леммы потребуются обозначения (49).

Лемма 8.2. *[15, лемма 8.5]. Пусть фиксирован набор значений (66) и выполнены оценки (42), (60), (67) и*

$$M_1\sqrt{2^\beta} \ll N. \tag{98}$$

Тогда для каждого достаточно малого C' из (97) существует постоянная матрица $\mathrm{g}_2'\in\Omega_2$, зависящая только от чисел (66), такая что для каждого $\binom{x}{X}$ из $\widetilde{\Omega}$ существует вектор $\binom{x_7}{X_7}$ из $\widetilde{\Omega}_7$, для которого выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix} = \mathrm{g}_2' \begin{pmatrix} x_7 \\ X_7 \end{pmatrix}. \tag{99}$$

Формулировка следующей теоремы содержит обозначения (58), (69) и (83).

Теорема 8.2. *Пусть выполнены оценки (22), (42) и (98). Тогда для любого $Z \in P_{\mathbf{W}_{\alpha,\beta}}\big[k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}}, k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}}\big]$ выполнено неравенство*

$$\sum_{\substack{1\leqslant\mathbf{p}<2^\alpha,\\ |t|\leqslant P_{\mathbf{u}},\\ |T|\leqslant P_{\mathbf{u}}:\\ |t|+|T|>0}} |\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}| \ll \Lambda k_{\frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{p}}} \sum_{\substack{a/q\in Z_{\mathbf{a}/\mathbf{q}},\\ \mathbf{p}|q,\\ |t|,|T|\leqslant P_{\mathbf{u}}:\\ |t|+|T|>0,\\ 0\leqslant\mathbf{k},\mathbf{K}\leqslant\mathbf{p}-1}} \sum_{\substack{a'/q'\in Z_{\mathbf{a}/\mathbf{q}}:\\ q'\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,\mathbf{p}),\\ \binom{y}{Y}\in\mathbf{Y}_{q,a}\left[\begin{smallmatrix} v_{\mathbf{k}} \\ V_{\mathbf{K}}\end{smallmatrix}\right]}} \max_{\substack{w'\in\mathbb{Z},\\ W'\in\mathbb{Z}}} \left|\mathbf{X}^{(\widetilde{\Omega}_7)}_{q',a'}\begin{bmatrix} w' \\ W'\end{bmatrix}\right|. \tag{100}$$

Доказательство. Выведем оценку (100) из (86). Для этого в правой части (86) изменим порядок суммирования таким образом, чтобы сумма по g_2' оказалась *после* суммы по параметрам (66). Неравенство (60) выполнено по определению множества $\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}$ в (69). Если оценка (67) выполнена, то, согласно лемме 8.2, матрица g_2' постоянна; в противном случае для выбора матрицы g_2' имеется не более чем Λ возможностей. Далее: замена $\mathbf{X}^{(\widetilde{\Omega})}_{q',a'}\left[\begin{smallmatrix} w_{\mathbf{k}} \\ W_{\mathbf{K}}\end{smallmatrix}\right]$ на $\mathbf{X}^{(\widetilde{\Omega}_7)}_{q',a'}\left[\begin{smallmatrix} w' \\ W'\end{smallmatrix}\right]$ возможна согласно равенствам (99) и

$$\begin{pmatrix} w' \\ W' \end{pmatrix} = (\mathrm{g}_2')^{-1}\begin{pmatrix} w_{\mathbf{k}} \\ W_{\mathbf{K}} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_7 \\ X_7 \end{pmatrix} = (\mathrm{g}_2')^{-1}\begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix}.$$

Тогда $W', w' \in \mathbb{Z}$ ввиду равенства $\det \mathrm{g}_2' = 1$. Зависимость от g_2' пропадает ввиду максимума по W' и w', откуда получаем (100). Теорема доказана. □

9. Сумма мощностей множеств $\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}$.

Лемма 9.1. *При условии*

$$M_1 2^{\alpha+\beta/2} \leqslant N \tag{101}$$

для любого $Z\in P_{\mathbf{W}_{\alpha,\beta}}$ выполнены неравенства

$$\max_{a/q\in Z_{\mathbf{a}/\mathbf{q}}} \max_{\mathbf{p}|q} \max_{\substack{a'/q'\in Z_{\mathbf{a}/\mathbf{q}}:\\ q'\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathbf{p})}} \max_{t,T\in\mathbb{Z}} \max_{0\leqslant\mathbf{k},\mathbf{K}<\mathbf{p}} \left|\mathbf{Y}_{q,a}\begin{bmatrix} v_{\mathbf{k}} \\ V_{\mathbf{K}}\end{bmatrix}\right| \ll |\Omega|\, 2^{-2\alpha\Delta_{\mathbf{A}}}\Lambda, \tag{102}$$

$$\max_{a/q\in Z_{\mathbf{a}/\mathbf{q}}} \max_{\mathbf{p}|q} \max_{\substack{a'/q'\in Z_{\mathbf{a}/\mathbf{q}}:\\ q'\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathbf{p})}} \max_{t,T\in\mathbb{Z}} \max_{w',W'\in\mathbb{Z}} \left|\mathbf{X}^{(\widetilde{\Omega}_7)}_{q',a'}\begin{bmatrix} w' \\ W'\end{bmatrix}\right| \ll |\Omega|\, 2^{-2\alpha\Delta_{\mathbf{A}}-\beta\Delta_{\mathbf{A}}}\Lambda. \tag{103}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $M_2 = 1$, тогда $\Omega_2 = \{E\}$ и, ввиду теоремы 4.1, имеем включение $\Omega \subseteq \Omega_3\Omega_4$. Напомним, что для множества $\mathbf{Y}_{q,a}\left[\begin{smallmatrix} v_{\mathbf{k}} \\ V_{\mathbf{K}} \end{smallmatrix}\right]$ выполнены сравнения (91) и что множества Ω_3 и $\widetilde{\Omega}_4$ состоят из элементов g_3 и $\left(\begin{smallmatrix} y_4 \\ Y_4 \end{smallmatrix}\right)$, соответственно. Запишем сравнения (91) в векторной форме:

$$a\mathrm{g}_3\begin{pmatrix} y_4 \\ Y_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v_{\mathbf{k}} \\ V_{\mathbf{K}} \end{pmatrix} \pmod q. \tag{104}$$

Выберем $M_4 = \max\{2^{\alpha-2}, 1\}$. Если $M_4 = 1$, то числа $y_4 = 0$, $Y_4 = 1$ уже определены, поэтому рассмотрим случай $M_4 > 1$. Фиксируем матрицу g_3 (с равным 1 определителем) и учтем, что числа a и q взаимно просты. Тогда система сравнений (104) в переменных y_4 и Y_4 имеет единственное решение по модулю q. Но, согласно (51), выполнено неравенство $0 < y_4 < Y_4 \leqslant M_4 < 2^{\alpha-1} \leqslant q$. Поэтому при заданном значении g_3 вектор $\left(\begin{smallmatrix} y_4 \\ Y_4 \end{smallmatrix}\right)$, а следовательно, и вектор $\left(\begin{smallmatrix} y \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ определены однозначно. Поскольку матрицу g_3 можно выбрать одним из $|\Omega_3|$ способов, то, согласно теореме 4.1, получаем оценку (102):

$$\max_{\substack{\theta\in Z\\ \mathbf{p}|q}} \max_{\substack{t,T\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant\mathbf{k},\mathbf{K}<\mathbf{p}}} \max_{\substack{a'/q'\in Z_{\mathbf{a}/\mathbf{q}}:\\ q'\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,\mathbf{p})}} \left|\mathbf{Y}_{q,a}\begin{bmatrix} v_{\mathbf{k}} \\ V_{\mathbf{K}} \end{bmatrix}\right| \leqslant |\Omega_3| \ll \frac{|\Omega|}{|\Omega_4|} \ll \frac{|\Omega|\,\Lambda}{(M_4)^{2\Delta_{\mathbf{A}}}} \ll |\Omega|\,2^{-2\alpha\Delta_{\mathbf{A}}}\Lambda.$$

Неравенство (102) доказано.

Согласно определению множества $\mathbf{X}^{(\widetilde{\Omega}_7)}_{q',a'}\left[\begin{smallmatrix} w' \\ W' \end{smallmatrix}\right]$ в (78), выполнены сравнения

$$x_7 a' \equiv w' \pmod{q'}, \qquad X_7 a' \equiv W' \pmod{q'}.$$

Остаток доказательства оценки (103) аналогичен доказательству оценки (102), с единственным отличием в выборе числа M_2 в виде (97). Лемма доказана. □

Формулировка следующей теоремы содержит обозначения (58), (69) и (83).

Теорема 9.1. *Пусть имеют место оценки* (22), (42), (98) *и* (101). *Тогда для любого* $Z \in P_{\mathbf{W}_{\alpha,\beta}}\left[k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}}, k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}}\right]$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{1\leqslant\mathbf{p}<2^{\alpha}} \sum_{\substack{|t|,|T|\leqslant P_{\mathbf{u}}:\\ |t|+|T|>0}} |\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}| \ll \Lambda|Z|k_{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{q}}}\,|\Omega|^2\,2^{\alpha(4-4\Delta_{\mathbf{A}})+\beta(2-\Delta_{\mathbf{A}})}\,(M_1)^{-2}. \tag{105}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем предварительно неравенство

$$\max_{\theta\in Z}\sum_{\mathbf{p}|q}\sum_{0\leqslant\mathbf{k}<\mathbf{p}}\sum_{0\leqslant\mathbf{K}<\mathbf{p}}\sum_{\substack{|t|\leqslant P_{\mathbf{u}},\ |T|\leqslant P_{\mathbf{u}},\\ |t|+|T|>0}} 1 \ll \Lambda 2^{4\alpha+2\beta}(M_1)^{-2}. \tag{106}$$

Для этого напомним, что количество чисел $\mathbf{p}$ как делителей числа q имеет оценку $\ll_{\varepsilon} q^{\varepsilon} \ll \Lambda$ [24, глава II, параграф 11, лемма 13]. Перемножая длины интервалов изменения оставшихся индексов суммирования $\mathbf{k}, \mathbf{K}$, t и T и учитывая оценку (95) и рассуждения перед этой оценкой, получаем: $\mathbf{p}^2(2P_{\mathbf{u}}+1)^2 \ll 2^{4\alpha+2\beta}(M_1)^{-2}$, что доказывает оценку (106).

Далее, подставляя оценки (102) и (106) в (100), с помощью (84) получаем:

$$\sum_{\mathbf{p}=1}^{2^{\alpha}-1}\sum_{\substack{|t|,|T|\leqslant P_{\mathbf{u}}:\\ |t|+|T|>0}}|\mathfrak{N}_{\mathbf{p},t,T}|\ll\frac{\Lambda\,|\Omega|\,2^{4\alpha+2\beta}|Z|}{(M_1)^2\,2^{2\alpha\Delta_{\mathbf{A}}}}\sum_{a'/q'\in Z_{\mathbf{a}/\mathbf{q}}}\max_{\substack{w'\in\mathbb{Z},\\ W'\in\mathbb{Z}}}\left|\mathbf{X}_{q',a'}^{(\widetilde{\Omega}_7)}\begin{bmatrix}w'\\ W'\end{bmatrix}\right|. \tag{107}$$

Наконец, подставляя оценку (103) в доказанное неравенство (107) и учитывая второе равенство в (84), получаем оценку (105). Теорема доказана. □

В следующей теореме рассматривается случай $t=T=0$. Далее часто будет использоваться условие

$$M_1\sqrt{2^{\alpha+\beta}}\ll N. \tag{108}$$

Теорема 9.2. *[15, теорема 11.1]. Пусть выполнены оценки* (22), (42) *и* (108). *Тогда для любого множества* $Z\in P_{\mathbf{W}_{\alpha,\beta}}$ *выполнено неравенство*

$$\sum_{1\leqslant\mathbf{p}<2^{\alpha}}|\mathfrak{N}_{\mathbf{p},0,0}|\ll|Z||\Omega|^2 2^{-(\alpha+\beta)\Delta_{\mathbf{A}}}\Lambda. \tag{109}$$

В частности, если вместе с неравенствами (22) *выполняется равенство* $M_1=\sqrt{N2^{\alpha+\beta-5}}$, *то имеют место формулы* (42), (108) *и*

$$|\mathfrak{N}|\ll|Z||\Omega|^2 2^{-(\alpha+\beta)\Delta_{\mathbf{A}}}\Lambda. \tag{110}$$

Отметим, что оценки (42) и (108) в первую часть теоремы 9.2 входят как ее условия, а во второй являются частью ее утверждения.

10. Применение теорем 8.1, 9.1 и 9.2.

Для всего дальнейшего изложения положим для краткости $\Delta_{\mathbf{A}}=\Delta$ и рассмотрим неравенство

$$N\gg 2^{(\alpha+\beta)\frac{2\Delta-1}{1-\Delta-\xi}}\Lambda. \tag{111}$$

Лемма 10.1. *Пусть, при выполнении неравенств* (9), (22) *и* (41), *для некоторого* $Z\in P_{\mathbf{W}_{\alpha,\beta}}\left[k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}},k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}}\right]$, *для* $\xi\in(0,1-\Delta)$ *ни при каком* M_1 *из* (42) *не выполнена оценка* (76). *Тогда выполняется неравенство* (111).

Доказательство. Пусть для какого-либо τ из (20) выполнена оценка

$$2^{(\alpha+\beta)\Delta}N^{\xi}\gg\left(N2^{\alpha+\beta}\right)^{1-\Delta}\tau. \tag{112}$$

Положим $M_1=\sqrt{N2^{\alpha+\beta-5}}$. Тогда, согласно теореме 9.2, выполняются оценки (42) и (110), а ввиду (112) — неравенство

$$2^{(\alpha+\beta)\Delta}N^{\xi}\gg(M_1)^{2-2\Delta}\tau. \tag{113}$$

Но из (110) и (113) получается оценка (76), что противоречит условию. Поэтому неравенство (112) не выполнено ни для какого τ. Отсюда следует неравенство (111). Лемма доказана. □

Следовательно, всюду далее оценку (111) можно считать выполненной. Кроме того, ввиду использования оценки (109), для выполнения неравенства (76) оценка (113) для числа M_1 необходима в рамках метода. Поэтому в дальнейшем вместо неравенства (42) будем рассматривать неравенство

$$2^{\beta}\tau \ll M_1 \ll \min\left\{2^{10(\alpha+\beta)},\ 2^{(\alpha+\beta)\Delta/(2-2\Delta)}N^{\xi/(2-2\Delta)},\ N\right\}/\tau. \tag{114}$$

Возможность такой замены обосновывается тем, что оценка "$M_1 \geqslant 3300A^2 2^{\beta}$", содержащаяся в неравенстве (42), следует из требования $M_1 \geqslant 2^{\beta}\tau$, имеющегося в неравенстве (114), для всех достаточно больших значений $\alpha+\beta$.

Лемма 10.2. *Пусть при выполнении неравенства* (9) *найдется* τ, *удовлетворяющее условию* (20), *такое что для любых* $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$, *удовлетворяющих оценкам* (22), (41) *и* (111), *для любого целого* $k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}} \in (0, 2^{2\alpha})$, *для* $\xi \in (0, 1-\Delta)$ *найдется число* $M_1 \in \mathbb{N}$, *для которого выполняются оценки* (108), (114) *и*

$$(M_1)^{2\Delta} \gg \min\left\{2^{4\alpha+2\beta}N^{-\xi}/k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}},\ k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}}2^{\alpha(4-4\Delta)+\beta(2-\Delta)}N^{-\xi}\right\}\tau; \tag{115}$$

кроме того, если минимум в (115) *достигается на втором элементе, то предположим выполнение неравенства* (101). *Тогда при любом целом* $k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}} \in (0, 2^{\beta})$, *для любого* $Z \in P_{\mathbf{W}_{\alpha,\beta}}\left[k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}}, k_{\mathfrak{l}/\mathfrak{p}}\right]$, *при любых достаточно малых* $\varepsilon_0 \in (0,\ 0.0004)$ *и* $\varepsilon > 0$ *оценка* (76) *выполнена.*

Доказательство. Оценки (101) и (108) входят в условия теорем 9.1 и 9.2, соответственно. Наличие оценок (22), (41) и (114) (вместо (42)) объясняется условиями теоремы 8.1. Требование (115) получается при подстановке оценок (94) и (105) в неравенство (76). Таким образом, достаточность условий леммы следует из теорем 8.1, 9.1 и 9.2. Лемма доказана. □

Лемма 10.3. *При выполнении формул* (9), (22), (41), (111) *и* $\xi > 2-3\Delta$, $\xi \in (0, 1-\Delta)$ *остальные условия леммы 10.2 можно заменить на два набора оценок (из которых должен быть выполнен хотя бы один):*

$$\max\left\{2^{\alpha\frac{-\Delta^2-4\Delta+4}{1-\Delta}+\beta\frac{-\Delta^2-2\Delta+2}{1-\Delta}}N^{\frac{-\xi}{1-\Delta}},\ 2^{\alpha(\Delta+4)+\beta(\Delta+2)}N^{-2\Delta-\xi}\right\}\tau \ll k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}}, \tag{116}$$

$$\textit{или}\qquad k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}} \ll \min\left\{2^{\alpha\frac{-3\Delta^2+8\Delta-4}{1-\Delta}+\beta\frac{3\Delta-2}{1-\Delta}}N^{\frac{\Delta\xi}{1-\Delta}},\ \ 2^{\alpha(2\Delta-4)-2\beta}N^{2\Delta}\right\}\tau^{-1}. \tag{117}$$

Доказательство. Согласно лемме 10.2, выполняются неравенства:

$$\max\left\{2^{\beta}, \frac{2^{\frac{2\alpha+\beta}{\Delta}}}{\left(k_{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{q}}}\right)^{\frac{1}{2\Delta}}N^{\frac{\xi}{2\Delta}}}\right\}\tau \ll M_1 \ll \min\left\{2^{10(\alpha+\beta)}, 2^{\frac{(\alpha+\beta)\Delta}{2-2\Delta}}N^{\frac{\xi}{2-2\Delta}}, \frac{N}{2^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}}}\right\}\tau^{-1}, \tag{118}$$

$$\begin{aligned}\max\left\{2^{\beta}, \left(k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}}\right)^{1/(2\Delta)}2^{2\alpha/\Delta-2\alpha+\beta(2-\Delta)/(2\Delta)}N^{-\xi/(2\Delta)}\right\}\tau \ll M_1 \ll \\ \ll \min\left\{2^{10(\alpha+\beta)},\ \ 2^{\frac{(\alpha+\beta)\Delta}{2-2\Delta}}N^{\frac{\xi}{2-2\Delta}}, 2^{-\alpha-\beta/2}N\right\}\tau^{-1}\end{aligned}. \tag{119}$$

В каждом из неравенств (118) и (119) опустим “$\ll M_1 \ll$”: число M_1 найдется, если нижние ограничения на M_1 не больше верхних. Покажем, что можно опустить также первые элементы минимумов и максимумов в (118) и (119).

Для этого учтем, что $\xi > 0$, и проверим оценку $10 > \Delta/(2-2\Delta)$. Она выполнена при условии $\Delta < 20/21$, следующем из (9). Значит, первые элементы минимумов в (118) и (119) больше вторых из них и могут быть опущены.

Первые элементы максимумов в (118) и (119) сравним с оставшимися элементами минимумов в (118) и (119), проверяя оценки

$$2^{\beta} \ll 2^{\frac{(\alpha+\beta)\Delta}{2-2\Delta}} N^{\frac{\xi}{2-2\Delta}} \tau^{-1}, \qquad 2^{\beta} \ll 2^{-\alpha-\beta/2} N \tau^{-1}. \tag{120}$$

Ввиду (22), для проверки неравенств в (120) достаточно получить оценки

$$2^{\beta(2-2\Delta)} \ll 2^{(\alpha+\beta)\Delta} 2^{2(\alpha+\beta)\xi} \tau^{-1}, \qquad 2^{\beta} \ll 2^{-\alpha-\beta/2} 2^{2(\alpha+\beta)} \tau^{-1}. \tag{121}$$

Второе неравенство в (121) следует из положительности чисел α и β; первое из них после упрощения сводится к оценке

$$2^{\beta(2-3\Delta-2\xi)} \ll 2^{\alpha(\Delta+2\xi)} \tau^{-1},$$

следующей из имеющихся в условии леммы неравенств $\xi > 2-3\Delta$, $\xi > 0$.

Сравнение оставшихся в (118) и (119) элементов приводит к оценкам

$$2^{4\alpha+2\beta} \left(k_{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{q}}}\right)^{-1} N^{-\xi} \ll \min\left\{ 2^{\frac{(\alpha+\beta)\Delta^2}{1-\Delta}} N^{\frac{\xi\Delta}{1-\Delta}},\, 2^{-\alpha\Delta-\beta\Delta} N^{2\Delta} \right\} \tau^{-1}, \tag{122}$$

$$k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}} 2^{4\alpha-4\Delta\alpha+\beta(2-\Delta)} \ll \min\left\{ 2^{\frac{(\alpha+\beta)\Delta^2}{1-\Delta}} N^{\frac{\xi\Delta}{1-\Delta}},\, 2^{-2\alpha\Delta-\beta\Delta} N^{2\Delta} \right\} \tau^{-1}. \tag{123}$$

Решая неравенства (122) и (123) относительно $k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}}$, получаем наборы оценок (116) или (117). Лемма доказана. □

Пусть $\tau = \tau_\alpha \tau_\beta$, где $\tau_\alpha = O\left(2^{c'\alpha}\right)$, $\tau_\beta = O\left(2^{c'\beta}\right)$ с некоторым $c' > 0$.

Лемма 10.4. *При выполнении условий* (9), (22), (41), (111) *и* $\xi > 2-3\Delta$, $\xi \in (0, 1-\Delta)$ *остальные неравенства леммы 10.2 можно заменить следующими тремя, выполненными одновременно:*

$$\begin{aligned} &\beta\left(\left(-\Delta^2 - 5\Delta + 4\right)(1-\Delta-\xi) - (2\Delta-1)(\Delta+1)\xi\right) + \log\tau_\beta < 0 < \\ &< \log\tau_\alpha + \alpha\left((2\Delta-1)(\Delta+1)\xi - \left(2\Delta^2 - 12\Delta + 8\right)(1-\Delta-\xi)\right), \end{aligned} \tag{124}$$

$$\begin{aligned} &\beta\left(\left(-\Delta^2 - 4\Delta + 4\right)(1-\Delta-\xi) - (2\Delta-1)\left(-2\Delta^2 + 2\Delta + \xi\right)\right) + \log\tau_\beta < 0 < \\ &< \log\tau_\alpha + \alpha\left((2\Delta-1)\left(-2\Delta^2 + 2\Delta + \xi\right) - \left(\Delta^2 - 10\Delta + 8\right)(1-\Delta-\xi)\right), \end{aligned} \tag{125}$$

$$\begin{aligned} &\beta((\Delta+4)(1-\Delta-\xi) - (2\Delta-1)(4\Delta+\xi)) + \log\tau_\beta < 0 < \\ &< \log\tau_\alpha + \alpha((2\Delta-1)(4\Delta+\xi) - (-\Delta+8)(1-\Delta-\xi)). \end{aligned} \tag{126}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждая из двух нижних оценок величины $k_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}}$ из леммы 10.3 не больше каждой из двух верхних, что приводит к четырем неравенствам. Для ликвидации общего знаменателя дробей в показателях степеней, равного $(1-\Delta)$, возведем эти неравенства в степень $(1-\Delta)$:

$$2^{\alpha\left(-\Delta^2-4\Delta+4\right)+\beta\left(-\Delta^2-2\Delta+2\right)}N^{-\xi} \ll 2^{\alpha\left(-3\Delta^2+8\Delta-4\right)+\beta(3\Delta-2)}N^{\Delta\xi}\tau^{-1},$$

$$2^{\alpha\left(-\Delta^2-4\Delta+4\right)+\beta\left(-\Delta^2-2\Delta+2\right)}N^{-\xi} \ll 2^{\alpha\left(-2\Delta^2+6\Delta-4\right)-\beta(2-2\Delta)}N^{2\Delta-2\Delta^2}\tau^{-1},$$

$$2^{\alpha\left(-\Delta^2-3\Delta+4\right)+\beta\left(-\Delta^2-\Delta+2\right)}N^{-2\Delta+2\Delta^2-\xi(1-\Delta)}\tau \ll 2^{\alpha\left(-3\Delta^2+8\Delta-4\right)+\beta(3\Delta-2)}N^{\Delta\xi},$$

$$2^{\alpha(\Delta+4)+\beta(\Delta+2)}N^{-2\Delta-\xi} \ll 2^{\alpha(2\Delta-4)-2\beta}N^{2\Delta}\tau^{-1}.$$

Третья из этих оценок слабее второй из них, так что ее следует исключить. В оставшихся трех оценках сгруппируем множители по степеням чисел 2 или N:

$$2^{\alpha\left(2\Delta^2-12\Delta+8\right)+\beta\left(-\Delta^2-5\Delta+4\right)}\tau \ll N^{(\Delta+1)\xi},$$

$$2^{\alpha\left(\Delta^2-10\Delta+8\right)+\beta\left(-\Delta^2-4\Delta+4\right)}\tau \ll N^{-2\Delta^2+2\Delta+\xi}, \qquad 2^{\alpha(-\Delta+8)+\beta(\Delta+4)}\tau \ll N^{4\Delta+\xi}.$$

Подставим в последние три неравенства оценку (111) и возведем в степень $1-\Delta-\xi>0$ для ликвидации знаменателей в показателях степеней:

$$2^{\alpha\left(2\Delta^2-12\Delta+8\right)(1-\Delta-\xi)+\beta\left(-\Delta^2-5\Delta+4\right)(1-\Delta-\xi)}\tau \ll 2^{(\alpha+\beta)(2\Delta-1)(\Delta+1)\xi},$$

$$2^{\alpha\left(\Delta^2-10\Delta+8\right)(1-\Delta-\xi)+\beta\left(-\Delta^2-4\Delta+4\right)(1-\Delta-\xi)}\tau \ll 2^{(\alpha+\beta)(2\Delta-1)\left(-2\Delta^2+2\Delta+\xi\right)},$$

$$2^{\alpha(8-\Delta)(1-\Delta-\xi)+\beta(\Delta+4)(1-\Delta-\xi)}\tau \ll 2^{(\alpha+\beta)(2\Delta-1)(4\Delta+\xi)}.$$

Логарифмируем последние три неравенства по основанию 2:

$$\alpha\left(2\Delta^2-12\Delta+8\right)(1-\Delta-\xi)+\beta\left(-\Delta^2-5\Delta+4\right)(1-\Delta-\xi)+ \\ +\log\tau<\alpha(2\Delta-1)(\Delta_{\mathbf{A}}+1)\xi+\beta(2\Delta-1)(\Delta+1)\xi,$$

$$\alpha\left(\Delta^2-10\Delta+8\right)(1-\Delta-\xi)+\beta\left(-\Delta^2-4\Delta+4\right)(1-\Delta-\xi)+\log\tau< \\ <\alpha(2\Delta-1)\left(-2\Delta^2+2\Delta+\xi\right)+\beta(2\Delta-1)\left(-2\Delta^2+2\Delta+\xi\right),$$

$$\alpha(-\Delta+8)(1-\Delta-\xi)+\beta(\Delta+4)(1-\Delta-\xi)+\log\tau< \\ <\alpha(2\Delta-1)(4\Delta+\xi)+\beta(2\Delta-1)(4\Delta+\xi).$$

Осталось перенести слагаемые из одних частей неравенств в другие и добавить "$\ldots<0<\ldots$". Лемма доказана. □

Лемма 10.5. *При выполнении условий* (9), (22), (41), (111) *и* $\xi\in(0,1-\Delta)$ *остальные неравенства леммы 10.2 можно заменить следующим набором оценок:*

$$\xi>\max\left\{\frac{-\Delta^2-5\Delta+4}{3-\Delta},\ \frac{2\Delta^2-12\Delta+8}{7-4\Delta},\ \frac{-5\Delta^2-2\Delta+4}{\Delta+3},\ \frac{-3\Delta^2-8\Delta+8}{7-\Delta},\right. \\ \left.\frac{\Delta^2+\Delta+4}{3\Delta+3},\ \frac{-7\Delta^2-5\Delta+8}{7+\Delta},\ 2-3\Delta\right\}. \qquad (127)$$

Доказательство. В (124)–(126) отбросим множители $\alpha > 0$ и $\beta > 0$:

$$\begin{gathered}\left(-\Delta^2-5\Delta+4\right)(1-\Delta-\xi)-(2\Delta-1)(\Delta+1)\xi<0<\\<(2\Delta-1)(\Delta+1)\xi-\left(2\Delta^2-12\Delta+8\right)(1-\Delta-\xi),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\left(-\Delta^2-4\Delta+4\right)(1-\Delta-\xi)-(2\Delta-1)(-2\Delta^2+2\Delta+\xi)<0<\\<(2\Delta-1)\left(-2\Delta^2+2\Delta+\xi\right)-\left(\Delta^2-10\Delta+8\right)(1-\Delta-\xi),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(\Delta+4)(1-\Delta-\xi)-(2\Delta-1)(4\Delta+\xi)<0<\\<(2\Delta-1)(4\Delta+\xi)-(-\Delta+8)(1-\Delta-\xi).\end{gathered}$$

Упростим последние три неравенства, сокращая первые два из них на множитель $(1-\Delta)$, тогда получим:

$$\left(-\Delta^2-5\Delta+4\right)-\xi(3-\Delta)<0<(-4\Delta+7)\xi-\left(2\Delta^2-12\Delta+8\right), \tag{128}$$

$$\left(-5\Delta^2-2\Delta+4\right)+(-\Delta-3)\xi<0<\left(3\Delta^2+8\Delta-8\right)+(-\Delta+7)\xi, \tag{129}$$

$$\left(-9\Delta^2+\Delta+4\right)+(-3\Delta-3)\xi<0<\left(7\Delta^2+5\Delta-8\right)+(\Delta+7)\xi. \tag{130}$$

Остается решить относительно ξ неравенства (128)–(130), получая первые шесть элементов максимума в (127) и добавляя последний из них, соответствующий неравенству $\xi>2-3\Delta$. Лемма доказана. □

Теорема 10.1. *Пусть выполнены оценки* (9), $\xi<1-\Delta$ *и*

$$\xi\geqslant\max\left\{\left(2\Delta^2-12\Delta+8\right)/(7-4\Delta),\ \left(-3\Delta^2-8\Delta+8\right)/(7-\Delta)\right\}. \tag{131}$$

Тогда для любого достаточно большого $N\in\mathbb{N}$, *для любых* $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$, *удовлетворяющих оценкам* (22), (41) *и* (111), *для любого* $Z\in P_{\mathbf{W}_{\alpha,\beta}}$ *оценка* (76) *верна для любых достаточно малых* $\varepsilon_0\in(0,\ 0.0004)$ *и* $\varepsilon>0$ *с некоторым* τ, *удовлетворяющим условию* (20).

Доказательство. Вычтем элементы максимума в (127) из 1/2 и заменим максимум на минимум. Вынося за скобки множитель $(2\Delta-1)/2$ и сохраняя порядок следования элементов, получаем:

$$\xi>\frac{1}{2}-\frac{2\Delta-1}{2}\min\left\{\frac{\Delta+5}{3-\Delta},\frac{9-2\Delta}{7-4\Delta},\frac{5\Delta+5}{\Delta+3},\frac{3\Delta+9}{7-\Delta},\frac{9\Delta+5}{3\Delta+3},\frac{7\Delta+9}{7+\Delta},3\right\}. \tag{132}$$

Часть элементов из минимума в (132) легко исключить. Так, третий и седьмой из них больше пятого, первый — больше третьего, а шестой — больше четвертого: проверка этих неравенств сводится к линейными относительно Δ соотношениям. Проверка того, что пятый элемент в (132) больше второго из них, приводит к неравенству $30\Delta^2-22\Delta-8<0$, верному при $\Delta<1$. В итоге в списке минимума в (132) остаются два элемента — второй и четвертый. Поэтому и из элементов максимума в (127) также следует исключить все, кроме второго и четвертого из них. Получим требование строгого выполнения неравенства (131), в случае которого при выполнении условия $\xi>0$ оценка (76) (в которой удобно заменить ε на $\varepsilon/2$) доказана ввиду лемм 10.2 и 10.5.

В частности, если ξ' равно максимуму в (131), то $\xi'>0$ ввиду (9), и при любом $\varepsilon>0$ для $\xi=\xi'+\varepsilon/2$ доказана оценка (76) с заменой ε на $\varepsilon/2$. Так что требуемое неравенство (76) для $\xi=\xi'$ доказано. Теорема доказана. □

11. Доказательство теоремы 1.4.

Если ξ равно максимуму в (131), то $1-\xi-\Delta$ равно одному из выражений

$$1-\big(2\Delta^2-12\Delta+8\big)/(7-4\Delta)-\Delta=(2\Delta-1)(\Delta+1)/(7-4\Delta)>0 \qquad (133)$$

$$\text{или}\quad 1-\big(-3\Delta^2-8\Delta+8\big)/(7-\Delta)-\Delta=\big(4\Delta^2-1\big)/(7-\Delta)>0, \qquad (134)$$

имеющихся в (10). Ввиду оценок в (133) и (134), выполнено условие $\xi<1-\Delta$ теоремы 10.1. Поэтому, в силу теорем 6.1 и 10.1, теорема 1.4 доказана.

Список литературы

[1] S. K. Zaremba, "La méthode des "bons treillis" pour le calcul des intégerales multiples", *Applications of number theory to numerical analysis (Montreal, Canada, 1971)*, Academic Press, New York, 1972, 39–119.

[2] Н. М. Коробов, *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе*, Физматгиз, М., 1963.

[3] H. Niederreiter, "Dyadic fractions with small partial quotients", *Monatsh. Math.*, **101**:4, (1986), 309–315.

[4] D. Hensley, "A polynomial time algorithm for the Hausdorff dimension of continued fraction Cantor sets", *J. Number Theory*, **58**:1, (1996), 9–45.

[5] J. Bourgain, A. Kontorovich, "On Zaremba's conjecture", *Annals of Math.*, **180**, (2014), 137–196.

[6] N. G. Moshchevitin, *On some open problems in diophantine approximation*, Preprint available at arXiv: abs/1202.4539, **4** [math. NT].

[7] D. Hensley, "The Hausdorff dimensions of some continued fraction cantor sets", *J. Number Theory*, **33**:2, (1989), 182–198.

[8] D. A. Frolenkov, I. D. Kan, *A reinforsment of the Bourgain – Kontorovich's theorem by elementary methods*, Preprint available at arXiv: abs/1207.4546 [math. NT].

[9] D. A. Frolenkov, I. D. Kan, *A reinforsment of the Bourgain – Kontorovich's theorem*, Preprint available at arXiv: abs/1207.5168 [math. NT].

[10] И. Д. Кан, Д. А. Фроленков, "Усиление теоремы Бургейна – Конторовича", *Известия РАН. Серия математическая*, **78**:2, (2014), 87–144.

[11] D. A. Frolenkov, I. D. Kan, "A strengthening of a theorem of Bourgain – Kontorovich - II", *Moskow Journal of Combinatorics and Number Theory*, **4**:1, (2014), 78–117.

[12] И. Д. Кан, "Усиление теоремы Бургейна – Конторовича - III", *Известия РАН. Серия математическая*, **79**:2, (2015), 77–100.

[13] И. Д. Кан, "Усиление теоремы Бургейна – Конторовича - IV", *Известия РАН. Серия математическая*, **80**:6, (2016), 103–126.

[14] И. Д. Кан, "Усиление теоремы Бургейна – Конторовича - V", *Сборник трудов МИАН им. В. А. Стеклова*, **296**, (2017), 133–139.

[15] И. Д. Кан, "Верна ли гипотеза Зарембы?", *Математический сборник*, **210**:3, (2019), 75–130.

[16] I. D. Shkredov, *Growth in Chevalley groups relatively to parabolic subgroups and some applications*, Preprint available at arXiv:2003.12785.

[17] Nikolay Moshchevitin, Brendan Murphy, Ilya Shkredov, "Popular products and continued fractions", *Israel J. Math.*, 2020, 1-–29.

[18] Nikolay Moshchevitin, Ilya Shkredov, *On a modular form of Zaremba's conjecture*, arXiv:1911.07487.

[19] O. Jenkinson, "On the density of Hausdorff dimensions of bounded type continued fraction sets: the Texan conjecture", *Stochastics and Dynamics*, **4**, (2004), 63–76.

[20] R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley Reading, MA, 1994.

[21] Р. Вон, *Метод Харди – Литтлвуда*, Мир, М., 1985, 184 с.

[22] И. Д. Кан, "Обращение неравенства Коши – Буняковского – Шварца", *Математические заметки*, **99**:3, (март 2016), 350–354.

[23] С. В. Конягин, "Оценки тригонометрических сумм по подгруппам и сумм Гаусса", *IV Международная конференция "Современные проблемы теории чисел и ее приложения", посвященная 180-летию П. Л. Чебышева и 110-летию И. М. Виноградова: Актуальные проблемы*, (Тула, 2001), ч. III, МГУ, мехмат, М., 2002, 86–114.

[24] Н. М. Коробов, *Тригонометрические суммы и их приложения*, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989, 240 с.

Поступила в редакцию
4 июля 2020 г.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-01-00886а).

Kan I. D. A strengthening the one of a theorem of Bourgain – Kontorovich. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2020. V. 20. No 2. P. 164–190.

ABSTRACT

The following result is proved in this work. Consider a set of $\mathfrak{D}_N$ not surpassing the N of the denominators of those ultimate chain fractions, all incomplete private which belong to the alphabet $1, 2, 3, 5$. Then inequality is fulfilled $|\mathfrak{D}_N| \gg N^{0.99}$. The calculation, made on a similar Burgeyin theorem – Of Kontorovich 2011, gives the answer $\mathfrak{D}_N \gg N^{0.80}$.

Key words: *continued fraction, exponensional sum, Zaremba conjecture.*