Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20. № 2. С. 191–211

УДК 517.51
MSC2010 46E30 + 47B38

© Е. Н. Ломакина[1]

Об оценках норм оператора Харди, действующего в пространствах Лоренца

Найдены условия, при которых компактный оператор $Tf(x)=\varphi(x)\int\limits_0^x f(\tau)v(\tau)\,d\tau$, $x>0$, действующий в весовых пространствах Лоренца $T:L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+)\to L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ в области $1<\max(r,s)\leqslant\min(p,q)<\infty$, принадлежит операторным идеалам $\mathfrak{S}_\alpha^{(a)}$ и $\mathfrak{E}_\alpha$, $0<\alpha<\infty$, а также приводятся оценки квазинорм операторных идеалов через интегральные выражения, зависящие от весовых функций оператора.

Ключевые слова: *операторный идеал, оператор Харди, компактный оператор, пространства Лоренца, аппроксимативные числа, энтропийные числа.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202019

Введение

Пусть E,F — банаховы пространства. Множество всех ограниченных линейных операторов из E в F обозначим через $\mathscr{B}(E,F)$. Для каждого оператора $T\in\mathscr{B}(E,F)$ его n-е *аппроксимативное число* определяется формулой

$$a_n(T)=\inf_{L\in\mathscr{B}(E,F)}\{\|T-L\|_{E\to F},\quad \operatorname{rank}L\leqslant n-1\},\quad n\in\mathbb{N},\tag{1}$$

где $\operatorname{rank}L=\dim\mathcal{R}(L)$ (см. монографию [1, §12]).

Оператор $T\in\mathscr{B}(E,F)$ называется $\mathfrak{S}_\alpha^{(a)}$-*оператором*, если последовательность его аппроксимативных чисел $\{a_n(T)\}$ суммируема со степенью α, где $0<\alpha<\infty$. Обозначим

$$\Big\|\{a_k(T)\}\Big\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}=\left(\sum_{n\,=\,1}^{\infty}a_n^\alpha(T)\right)^{1/\alpha},\quad 0<\alpha<\infty.\tag{2}$$

Класс операторов $\mathfrak{S}_\alpha^{(a)}$ с квазинормой (2) образует квазинормированный операторный идеал [1, §14.2.1]. Идеал $\mathfrak{S}_\alpha^{(s)}$ с нормой (2) компактных операторов $T\in\mathscr{B}(H,H)$ в гильбертовых пространствах есть идеал Шаттена – фон Неймана [2].

[1] Вычислительный центр ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65 Электронная почта: enlomakina@mail.ru

Еще одним важным примером характеристических величин линейных ограниченных операторов являются *энтропийные числа* $e_n(T)$, $n \in \mathbb{N}$, определяемые как точная нижняя грань множества всех чисел $\varepsilon \geqslant 0$, для которых существуют элементы $y_1, \ldots, y_m \in Y$, где $m \leqslant 2^{n-1}$ такие, что $T(B_X) \subset \bigcup_{j=1}^m \{y_j + \varepsilon B_Y\}$, т. е.

$$e_n(T) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \exists y_1, \ldots, y_m \in Y, m \leqslant 2^{n-1} : T(B_X) \subset \bigcup_{j=1}^{m} \{y_j + \varepsilon B_Y\} \right\},$$

где $B_X := \{x \in X : \|x\|_X \leqslant 1\}$ — единичный шар в X, а B_Y — единичный шар в Y (см. монографию [1, §13]).

Оператор $T \in \mathscr{B}(E,F)$ называется $\mathfrak{E}_\alpha$-*оператором*, если последовательность его энтропийных чисел суммируема со степенью α, $0 < \alpha < \infty$, и

$$\left\| \{e_k(T)\} \right\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} e_n^\alpha(T) \right)^{1/\alpha}, \quad 0 < \alpha < \infty.$$

Класс таких операторов $\mathfrak{E}_\alpha$ с указанной квазинормой также образует квазинормированный операторный идеал (см. [1, §14.3.1]).

Пусть (X, μ) — измеримое пространство с положительной σ-аддитивной мерой μ. Функция распределения измеримой функции f относительно меры μ определяется формулой

$$f_*(\tau) = \mu\{x \in X : |f(x)| > \tau\} = \int\limits_{\{x \in X : |f(x)| > \tau\}} d\mu, \quad \tau > 0.$$

Невозрастающей перестановкой f^* функции $|f|$ отностительно меры μ называется

$$f^*(t) = \inf\{\tau > 0 : \quad f_*(\tau) \leqslant t\}.$$

Положим $X = (0, \infty)$, $d\mu(x) = \omega(x)dx$, где функция ω — измеримая, положительная и конечная почти всюду на $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Для $1 < p, q < \infty$ весовое пространство Лоренца $L_\omega^{p,q} \equiv L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ состоит из всех μ-измеримых функций f, для которых

$$\|f\|_{L_\omega^{p,q}} = \left(\int\limits_0^\infty \frac{q}{p} \left(t^{\frac{q}{p}-1} f^*(t)^q \right) dt \right)^{1/q} < \infty. \tag{3}$$

Пространство Лоренца в случае $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$ является банаховым функциональным пространством с нормой (3), в случае же $1 < p < q < \infty$ функционал (3) есть только квазинорма, но $L_\omega^{p,q}$ является банаховым функциональным пространством с другой нормой, эквивалентной квазинорме $\|f\|_{L_\omega^{p,q}}$ (см. [3, гл. 4, стр. 219]).

Пространства Лоренца, являсь банаховыми функциональными пространствами, обладают свойством монотонности (квази)нормы (см. [3, Theorem 1.7]):

$$\text{если } |\mathrm{g}| \leqslant |f| \ \ \mu\text{-п. в.} \ \text{ и } \ f \in L_\omega^{p,q}, \text{ тогда } \mathrm{g} \in L_\omega^{p,q} \ \text{ и } \ \|\mathrm{g}\|_{L_\omega^{p,q}} \leqslant \|f\|_{L_\omega^{p,q}}. \tag{4}$$

Неравенство треугольника в пространствах Лоренца имеет вид [4, стр. 5572]

$$\|f_1+f_2\|_{L^{p,q}_\omega} \leqslant c_{pq}\left(\|f_1\|_{L^{p,q}_\omega}+\|f_2\|_{L^{p,q}_\omega}\right), \tag{5}$$

где наилучшая константа

$$c_{pq}=\begin{cases}1, & 1<q\leqslant p<\infty,\\ \left(\frac{p}{q}\right)^{1/q}\left(\frac{p'}{q'}\right)^{1/q'}, & 1<p<q<\infty.\end{cases} \tag{6}$$

Если функции $f\in L^{p,q}_\omega$, $\mathrm{g}\in L^{p',q'}_\omega$ при $1<p<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, тогда выполняется неравенство Гёльдера

$$\left|\int_0^\infty f(x)\mathrm{g}(x)\omega(x)\,dx\right|\leqslant \|f\|_{L^{p,q}_\omega}\|\mathrm{g}\|_{L^{p',q'}_\omega}, \tag{7}$$

где $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'}=1$ (см. [3, стр. 220]).

Для $L^{p,q}_\omega$ двойственное пространство определяется формулой

$$L^{p',q'}_\omega=\left\{\mathrm{g}:\left|\int_0^\infty f(x)\mathrm{g}(x)\omega(x)dx\right|<\infty,\ \text{для всех } f\in L^{p,q}_\omega\right\}$$

с нормой

$$\|\mathrm{g}\|_{L^{p',q'}_\omega}=\sup_{\|f\|_{L^{p,q}_\omega}\leqslant 1}\left|\int_0^\infty f(x)\mathrm{g}(x)\omega(x)dx\right|. \tag{8}$$

Заметим также, что $\|f\|_{L^{p,q}_\omega}=\Big(\int\limits_0^\infty qf_*(t)^{\frac{q}{p}}t^{q-1}\,dt\Big)^{\frac{1}{q}}$ и $\|\chi_{(0,t)}\|_{L^{p,q}_\omega}=\Big(\int\limits_0^t \omega(\tau)\,d\tau\Big)^{\frac{1}{q}}$.

В пространствах Лоренца при условии, что $1<\max(r,s)\leqslant\min(p,q)<\infty$, рассмотрим оператор $T:L^{r,s}_v(\mathbb{R}^+)\to L^{p,q}_\omega(\mathbb{R}^+)$ вида

$$Tf(x)=\varphi(x)\int\limits_0^x f(\tau)v(\tau)\,d\tau,\quad x>0, \tag{9}$$

с весовыми функциями $\varphi\in L^{p,q}_\omega(x,\infty)$, $v\in L^1_v(0,x)$ для любого $x>0$.

В данной статье найдены условия, при которых компактный оператор (9) при $0<\alpha<\infty$ является $\mathfrak{S}^{(a)}_\alpha$-*оператором*, а также приводится оценка квазинормы (2) операторного идеала $\mathfrak{S}^{(a)}_\alpha$ через интегральное выражение, зависящее от весовых функций оператора T:

$$\left(\sum_{n=1}^\infty a_n^\alpha(T)\right)^{1/\alpha}\ll\left(\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_0^x v(\tau)\,d\tau\Big)^{\frac{\alpha}{s'}-1}\Big(\int\limits_x^\infty qt^{q-1}\varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\,dt\Big)^{\frac{\alpha}{q}}v(x)\,dx\right)^{1/\alpha}.$$

Вложение $\mathfrak{S}^{(a)}_{\alpha_1}\subseteq\mathfrak{E}_{\alpha_2}$ при $0<\alpha_1<\alpha_2<\infty$ [1, §14.3.11] также позволяет получить оценку

$$\left(\sum_{n=1}^\infty e_n^{\alpha_2}(T)\right)^{1/\alpha_2}\ll\left(\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_0^x v(\tau)\,d\tau\Big)^{\frac{\alpha_1}{s'}-1}\Big(\int\limits_x^\infty qt^{q-1}\varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\,dt\Big)^{\frac{\alpha_1}{q}}v(x)dx\right)^{1/\alpha_1}.$$

Для операторов Харди, действующих в пространствах Лебега, получены оценки норм (2) в работах [5–7]. Оценки норм Шаттена – фон Неймана для преобразования типа Стилтьеса доказаны в [8]. В статье [9] проведено исследование ограниченности, компактности и меры некомпактности оператора Харди с ядром $k(x,y)$, удовлетворяющим условию Р. Ойнарова, а при условии, что ядро оператора равно единице, получены оценки аппроксимативных чисел. Данная работа является продолжением полученных ранее результатов [9].

В статье произведения вида $0\cdot\infty$ полагаются равными 0. Под соотношениями $A\ll B$ подразумеваются неравенства $A\leqslant CB$, выполненные с некоторой константой C, зависящей только от параметров r,s,p,q,α. Будем писать $A\approx B$ вместо $A\ll B\ll A$. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ — множества натуральных и целых чисел соответственно. Операторные идеалы аппроксимативных и энтропийных чисел обозначены заглавными готическими буквами.

1. Оценки аппроксимативных чисел

В пространствах Лоренца важную роль играет следующая лемма 1. Доказательство импликации (10) в случае $1\leqslant q\leqslant p<\infty$ впервые было доказано в статье [10, Lemma 2.5]. Далее в работе [12, стр. 333] результат обобщен на случай $\max\{p,q\}\leqslant\alpha$. Для полноты изложения приведём доказательство леммы 1, добавив вывод утверждения (11).

Лемма 1. [10,12] *Пусть $((0,\infty),\mu)$ — пространство с положительной σ-аддитивной мерой, $1<p,q<\infty$ и $(0,\infty)=\bigcup_k E_k$, где $\{E_k\}$ — последовательность измеримых попарно непересекающихся интервалов. Тогда*

1) *если* $\max\{p,q\}\leqslant\alpha$, *то* $\displaystyle\sum_k\|\chi_{E_k}f\|^{\alpha}_{L^{p,q}_{\mu}}\leqslant\|f\|^{\alpha}_{L^{p,q}_{\mu}}$; (10)

2) *если* $\alpha\leqslant\min\{p,q\}$, *то* $\displaystyle\|f\|^{\alpha}_{L^{p,q}_{\mu}}\leqslant\sum_k\|\chi_{E_k}f\|^{\alpha}_{L^{p,q}_{\mu}}$. (11)

Доказательство. Применяя обобщенное неравенство Минковского с параметром $\frac{q}{\alpha}\leqslant 1$, а затем неравенство Йенсена с $\frac{\alpha}{p}\geqslant 1$ и учитывая σ-аддитивность меры, получаем

$$\sum_k\|\chi_{E_k}f\|^{\alpha}_{L^{p,q}_{\mu}}=\sum_k\left(\int_0^\infty(\chi_{E_k}f)_*(t)^{q/p}qt^{q-1}dt\right)^{\alpha/q}=$$

$$=\sum_k\left(\int_0^\infty\left[(\chi_{E_k}f)_*(t)^{\alpha/p}\right]^{q/\alpha}qt^{q-1}dt\right)^{\alpha/q}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_0^\infty\left(\sum_k\left[(\chi_{E_k}f)_*(t)^{\alpha/p}\right]\right)^{q/\alpha}qt^{q-1}dt\right)^{\alpha/q}\leqslant\left(\int_0^\infty\left(\sum_k(\chi_{E_k}f)_*(t)\right)^{q/p}qt^{q-1}dt\right)^{\alpha/q}=$$

$$= \left(\int_0^\infty \left(\sum_k \mu\{x \in E_k : |\chi_{E_k}(x) f(x)| > t\} \right)^{q/p} q t^{q-1} dt \right)^{\alpha/q} =$$

$$= \left(\int_0^\infty \left(\mu\{x \in \bigcup_{k=1}^\infty E_k : |\chi_{\bigcup_{k=1}^\infty E_k}(x) f(x)| > t\} \right)^{q/p} q t^{q-1} dt \right)^{\alpha/q} =$$

$$= \left(\int_0^\infty f_*(t)^{q/p} q t^{q-1} dt \right)^{\alpha/q} = \|f\|^\alpha_{L^{p,q}_\mu}.$$

2) Аналогично, применяя неравенство Минковского с параметром $\frac{q}{\alpha} \geqslant 1$ и неравенство Йенсена с $\frac{\alpha}{p} \leqslant 1$, получаем

$$\sum_k \|\chi_{E_k} f\|^\alpha_{L^{p,q}_\mu} = \sum_k \left(\int_0^\infty (\chi_{E_k} f)_* (t)^{q/p} q t^{q-1} dt \right)^{\alpha/q} =$$

$$= \sum_k \left(\int_0^\infty \left[(\chi_{E_k} f)_* (t)^{\alpha/p} \right]^{q/\alpha} q t^{q-1} dt \right)^{\alpha/q} \geqslant \left(\int_0^\infty \left(\sum_k (\chi_{E_k} f)_* (t)^{\alpha/p} \right)^{q/\alpha} q t^{q-1} dt \right)^{\alpha/q} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int_0^\infty f_*(t)^{q/p} q t^{q-1} dt \right)^{\alpha/q} = \|f\|^\alpha_{L^{p,q}_\mu}.$$

□

Критерий ограниченности оператора (9) в более общем виде, когда оператор имеет ядро, удовлетворяющее условию Ойнарова, доказан в статье [9]. Также необходимое условие огранченности получено в работе [11]. Для полноты изложения приведём более простое доказательство критерия, установленного в [9], [11] для нашего случая.

Теорема 1. [9, 11] *Пусть* $1 < r, s < \infty$, $1 < p, q < \infty$ *и* $\max(r, s) \leqslant \min(p, q)$. *Тогда для оператора* (9) *выполняется неравенство*

$$\|Tf\|_{L^{p,q}_\omega} \leqslant C \|f\|_{L^{r,s}_v} \quad \text{для всех } f \geqslant 0$$

с константой C, *не зависящей от* f, *в том и только в том случае, если*

$$A = \sup_{t>0} A(t) = \sup_{t>0} \|\chi_{(0,t)}\|_{L^{r',s'}_v} \|\chi_{(t,\infty)} \varphi\|_{L^{p,q}_\omega} < \infty.$$

Более того, $A \leqslant \|T\| \leqslant 4A$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть оператор $T : L^{r,s}_v(\mathbb{R}^+) \to L^{p,q}_\omega(\mathbb{R}^+)$ ограничен. Тогда существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|Tf\|_{L^{p,q}_\omega} \leqslant C \|f\|_{L^{r,s}_v} \quad \text{для всех } f \geqslant 0.$$

Для некоторого фиксированного $t>0$, функции $f\in L_v^{r,s}$ с нормой $\|f\|_{L_v^{r,s}}\leqslant 1$, примененяя свойство (4), получаем

$$C\geqslant C\|f\|_{L_v^{r,s}}\geqslant \|Tf\|_{L_\omega^{p,q}}=\|\varphi(x)\int\limits_0^x f(y)v(y)dy\|_{L_\omega^{p,q}}\geqslant$$

$$\geqslant \|\chi_{(t,\infty)}\varphi\|_{L_\omega^{p,q}}\int\limits_0^\infty \chi_{(0,t)}(y)f(y)v(y)dy.$$

В результате

$$\|\chi_{(t,\infty)}\varphi\|_{L_\omega^{p,q}}\int\limits_0^\infty \chi_{(0,t)}(y)f(y)v(y)dy\leqslant C.$$

Далее, в силу действия формулы (8) имеем

$$\sup_{\|f\|_{L_v^{r,s}}\leqslant 1}\int\limits_0^\infty \chi_{(0,t)}(y)f(y)v(y)dy=\|\chi_{(0,t)}\|_{L_v^{r',s'}}.$$

Тогда

$$A(t)=\|\chi_{(t,\infty)}\varphi\|_{L_\omega^{p,q}}\|\chi_{(0,t)}\|_{L_v^{r',s'}}\leqslant \|T\|_{L_v^{r,s}\to L_\omega^{p,q}},$$

и

$$A=\sup_{t>0}A(t)=\sup_{t>0}\|\chi_{(t,\infty)}\varphi\|_{L_\omega^{p,q}}\|\chi_{(0,t)}\|_{L_v^{r',s'}}\leqslant \|T\|_{L_v^{r,s}\to L_\omega^{p,q}}.$$

Следовательно,

$$A\leqslant \|T\|_{L_v^{r,s}\to L_\omega^{p,q}}.$$

Достаточность. Предположим $f(y)v(y)\neq 0$ на множестве положительной меры. Для $m\in\mathbb{Z}$ положим, что $\int\limits_0^\infty f(y)v(y)dy\in(2^m,2^{m+1}]$. Пусть последовательность $\{x_k\}$, где $-\infty\leqslant k\leqslant m$, определена следующим образом:

$$\int\limits_0^{x_k} f(y)v(y)dy=\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(y)v(y)dy=2^k \text{ для } \ k\leqslant m-1,\quad \int\limits_0^{x_m} f(y)v(y)dy=2^m.$$

Выберем параметр γ так, чтобы выполнялось неравенство $\max(r,s)\leqslant\gamma\leqslant\min(p,q)$. Тогда, применяя лемму 1 и неравенство Гельдера (7), получаем

$$\|Tf\|^\gamma_{L_\omega^{p,q}}=\Big\|\sum_{k\leqslant m}Tf\chi_{E_k}\Big\|^\gamma_{L_\omega^{p,q}}\leqslant\sum_{k\leqslant m}2^{\gamma(k+1)}\|\varphi\chi_{E_k}\|^\gamma_{L_\omega^{p,q}}=$$

$$=4^\gamma\sum_{k\leqslant m}2^{\gamma(k-1)}\|\varphi\chi_{E_k}\|^\gamma_{L_\omega^{p,q}}\leqslant 4^\gamma\sum_{k\leqslant m}\Bigg(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(y)v(y)dy\Bigg)^\gamma\|\varphi\chi_{(x_k,\infty)}\|^\gamma_{L_\omega^{p,q}}\leqslant$$

$$\leqslant 4^\gamma\sum_{k\leqslant m}\|\chi_{E_{k-1}}f\|^\gamma_{L_v^{r,s}}\|\chi_{(0,x_k)}\|^\gamma_{L_v^{r',s'}}\|\varphi\chi_{(x_k,\infty)}\|^\gamma_{L_\omega^{p,q}}\|\leqslant 4^\gamma A^\gamma\|f\|^\gamma_{L_v^{r,s}}.$$

Следовательно,

$$\|T\|_{L_v^{r,s}\to L_\omega^{p,q}} \leqslant 4A.$$

$\square$

Замечание 1. Результаты теоремы 1 об ограниченности оператора T сохраняются при сужении на конечный интервал $I=(a,b)$, при этом

$$A(I)=\sup_{a<t<b} A(t)=\sup_{a<t<b}\|\chi_{(a,t)}\|_{L_v^{r',s'}}\|\chi_{(t,b)}\varphi\|_{L_\omega^{p,q}}.$$

Следующая теорема является частным случаем теоремы 2 из статьи [9] при $k(x,y)=1$.

Теорема 2. [9] *Пусть* $1<\max(r,s)\leqslant\min(p,q)<\infty$. *Оператор* $T: L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+)\to L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$, *заданный формулой* (9), *компактен тогда и только тогда, когда*

$$A<\infty \quad \textit{и} \lim_{t\to 0+} A(t)=\lim_{t\to+\infty} A(t)=0.$$

В дальнейшем будет использоваться дискретный аналог теоремы 2 [14].

Замечание 2. Пусть последовательность $\{\xi_k\}$, $k\in\mathbb{Z}$, выбрана так, что $\int\limits_0^{\xi_k} v(\tau)\,d\tau = 2^k$. Пусть $1<\max(r,s)\leqslant\min(p,q)<\infty$. Оператор $T: L_v^{r,s}\mathbb{R}^+)\to L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$, заданный формулой (9), компактен тогда и только тогда, когда

$$A=\sup_{k\in\mathbb{Z}} A(\xi_k)=\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k/s'}\|\chi_{(\xi_k,\infty)}\varphi\|_{L_\omega^{p,q}}<\infty$$

и

$$\lim_{k\to+\infty} A(\xi_k)=\lim_{k\to-\infty} A(\xi_k)=0.$$

Далее предположим, что оператор $T: L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+)\to L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ компактен. Зададим малое число ε, $0<\varepsilon<\|T\|$, и выберем конечную последовательность возрастающих чисел

$$0=c_0<c_1<c_2<...<c_{N-1}<c_N<c_{N+1}=\infty$$

таких, что

$$A((0,c_1))=A((c_N,c_{N+1}))=\frac{\varepsilon}{4}, \tag{12}$$

где $N=N(\varepsilon)$ и

$$A((0,c_1))=A(I_0)=\sup_{0<t<c_1}\|\chi_{(0,t)}\|_{L_v^{r',s'}}\|\chi_{(t,c_1)}\varphi\|_{L_\omega^{p,q}},$$

$$A((c_N,\infty))=A(I_N)=\sup_{c_N<t<\infty}\|\chi_{(c_N,t)}\|_{L_v^{r',s'}}\|\chi_{(t,\infty)}\varphi\|_{L_\omega^{p,q}}.$$

На конечном интервале $I\subset[c_1,c_N]$ введем следующие обозначения:

$$F(x)=\int\limits_{c_1}^{x} f(\tau)v(\tau)\,d\tau,\quad x\in I;\quad F_I=\frac{1}{\mu(I)}\int\limits_I F\,d\mu,\quad \mu(I)=\int\limits_I d\mu, \tag{13}$$

где

$$d\mu(x) = \varphi(x)\mathrm{g}(x)\omega(x)\,dx. \tag{14}$$

Функция $\mathrm{g}(x)$ на интервале I определяется исходя из условия

$$\int\limits_I \varphi(x)\mathrm{g}(x)\omega(x)dx \geqslant (1-\delta)\|\chi_I\varphi\|_{L^{p,q}_\omega}\|\chi_I\mathrm{g}\|_{L^{p',q'}_\omega}, \tag{15}$$

где $\delta > 0$ — малое положительное число.

Рассмотрим оператор $\mathcal{T}_I : L^{r,s}_v \to L^{p,q}_\omega$, определенный формулой

$$\mathcal{T}_I f(x) = \chi_I(x)\varphi(x)\left(F(x) - F_I\right).$$

Согласно теореме 4 [9] норма оператора непрерывно зависит от интервала I, поэтому можно выбрать интервалы $I_k = [c_k, c_{k+1}]$, $k = 1,...N-1$ так, что

$$\|\mathcal{T}_{I_k}\| = \varepsilon,\ k = 1,...N-2,\quad \|\mathcal{T}_{I_{N-1}}\| \leqslant \varepsilon. \tag{16}$$

Верхняя и нижняя оценки поведения последовательности аппроксимативных чисел оператора T содержатся в следующей теореме.

Теорема 3. [9] *Пусть $1 < \max(r,s) \leqslant \min(p,q) < \infty$. Предположим, что оператор $T : L^{r,s}_v \to L^{p,q}_\omega$, определенный формулой* (9)*, компактен. Для заданного $0 < \varepsilon < \|T\|$ и целого числа $N > 2$ пусть интервалы $I_k = [c_k, c_{k+1}], k = 0, 1, ...N$ выбраны так, что выполнены соотношения* (12) *и* (16)*. Тогда*

$$\frac{1}{2}c_{pq}^{-1}\varepsilon N^{\frac{1}{\max(p,q)} - \frac{1}{\min(r,s)}} \leqslant a_N(T) \leqslant \varepsilon,$$

где константа c_{pq} задана формулой (6).

Доказательство. *Доказательство оценки сверху.* Для $k = 1, 2, \cdots, N-1$ положим

$$F_k(x) = \int\limits_{c_k}^{x} f_k(\tau)v(\tau)\,d\tau,\quad x \in I_k,\quad F_{k,I_k} = \frac{1}{\mu(I_k)}\int\limits_{I_k} F_k(x)d\mu(x), \tag{17}$$

функции $f_k \in L^{r,s}_v$ такие, что $\mathrm{supp} f_k \subset I_k$, и

$$P_k f(x) = \chi_{I_k}(x)\left\{Tf(x) - \varphi(x)(F_k(x) - F_{k,I_k})\right\}.$$

Оператор $P = \sum\limits_{k=1}^{N-1} P_k$ является ограниченным линейным оператором, $P : L^{r,s}_v \to L^{p,q}_\omega$ и имеет $\mathrm{rank} P \leqslant N-1$.

Используя лемму 1 с параметром $\max(r,s) \leqslant \gamma \leqslant \min(p,q)$, теорему 1 и условия (12), (16), находим

$$\|Tf - Pf\|^\gamma_{L^{p,q}_\omega} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\chi_{[0,c_1]}Tf\right\|^\gamma_{L^{p,q}_\omega} + \sum_{k=1}^{N-1}\left\|\chi_{I_k}(Tf - P_kf)\right\|^\gamma_{L^{p,q}_\omega} + \left\|\chi_{[c_N,\infty)}Tf\right\|^\gamma_{L^{p,q}_\omega} \leqslant$$

$$\leqslant 4^\gamma A(I_0)^\gamma \big\|\chi_{[0,c_1]} f\big\|^\gamma_{L^{r,s}_v} + \sum_{k=1}^{N-1} \big\|\mathcal{T}_{I_k} f\big\|^\gamma_{L^{p,q}_\omega} + 4^\gamma A(I_N)^\gamma \big\|\chi_{[c_N,\infty)} f\big\|^\gamma_{L^{r,s}_v} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^\gamma \sum_{k=0}^{N} \big\|\chi_{I_k} f\big\|^\gamma_{L^{r,s}_v} \leqslant \varepsilon^\gamma \|f\|^\gamma_{L^{r,s}_v}.$$

Таким образом, $\|T-P\| \leqslant \varepsilon$, и по определению (1) получаем, что

$$a_N(T) = \inf\{\|T-P\| \ : \ \mathrm{rank} P \leqslant N-1\} \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство оценки снизу. Зададим $\lambda \in (0,1)$. Выберем последовательность функций $\{f_k\} \in L^{r,s}_v$ такую, что $\mathrm{supp} f_k \subset I_k$ и выполняются неравенства

$$\frac{\Big\|\chi_{I_i}\varphi F_i\Big\|_{L^{p,q}_\omega}}{\Big\|f_i\Big\|_{L^{r,s}_v}} \geqslant \lambda\varepsilon \quad \text{для} \quad i = 0, N \tag{18}$$

и

$$\frac{\Big\|\chi_{I_k}\varphi\big(F_k - F_{k,I_k}\big)\Big\|_{L^{p,q}_\omega}}{\big\|f_k\big\|_{L^{r,s}_\vartheta}} \geqslant \lambda\varepsilon \quad \text{для} \quad k = 1,2,...,N-1, \tag{19}$$

где $F_k(x)$ и F_{k,I_k} определены формулами (17).

Пусть $\widetilde{P} : L^{r,s}_v \to L^{p,q}_\omega$ будет ограниченным линейным оператором и $\mathrm{rank}\widetilde{P} \leqslant N$. Далее выберем константы $\nu_0, \nu_1, \nu_2, ..., \nu_N$ так, чтобы

$$\widetilde{P}\left(\sum_{k=0}^{N} \nu_k f_k\right) = 0.$$

Положим $f = \sum\limits_{k=0}^{N} \nu_k f_k$ и $F(x) = \int\limits_0^x f(\tau)v(\tau)\,d\tau$, $x > 0$. Для всех $x \in I_k$

$$F(x) = \nu_k F_k(x) + \mu_k, \quad k = 1, ..., N-1,$$

с некоторой константой μ_k.

Для любой константы $c \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\|\chi_I \varphi\,(F - F_I)\|_{L^{p,q}_\omega} \leqslant 2c_{pq}\,\|\chi_I \varphi\,(F - c)\|_{L^{p,q}_\omega}\,, \tag{20}$$

где константа c_{pq} определена формулой (6).

Действительно, применяя неравенство треугольника (5), формулы (13)–(15) и неравенство Гельдера, получаем

$$\|\chi_I \varphi\,(F - F_I)\|_{L^{p,q}_\omega} \leqslant \|\chi_I v\,(F - c - (F-c)_I)\|_{L^{p,q}_\omega} \leqslant$$

$$\leqslant c_{pq}\left(\|\chi_I \varphi\,(F - c)\|_{L^{p,q}_\omega} + |(F-c)_I|\,\|\chi_I \varphi\|_{L^{p,q}_\omega}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c_{pq}\left(\|\chi_I\varphi\,(F-c)\|_{L^{p,q}_\omega}+\frac{\|\chi_I\varphi\|_{L^{p,q}_\omega}}{\mu(I)}\left|\int\limits_I (F-c)\,d\mu\right|\right)\leqslant$$

$$\leqslant c_{pq}\left(\|\chi_I\varphi\,(F-c)\|_{L^{p,q}_\omega}+\frac{\|\chi_I\varphi\|_{L^{p,q}_\omega}}{\mu(I)}\|\chi_I\varphi(F-c)\|_{L^{p,q}_\omega}\|\chi_I\mathrm{g}\|_{L^{p',q'}_\omega}\right)\leqslant$$

$$\leqslant c_{pq}\left(\|\chi_I\varphi\,(F-c)\|_{L^{p,q}_\omega}+\frac{1}{(1-\delta)}\,\|\chi_I\varphi\,(F-c)\|_{L^{p,q}_\omega}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2c_{pq}}{1-\delta}\,\|\chi_I\varphi\,(F-c)\|_{L^{p,q}_\omega}\,.$$

В результате имеем неравенство

$$\|\chi_I\varphi\,(F-F_I)\|_{L^{p,q}_\omega}\leqslant\frac{2c_{pq}}{1-\delta}\,\|\chi_I\varphi\,(F-c)\|_{L^{p,q}_\omega}\,,$$

которое при $\delta\to 0$ приводит к (20).

Следовательно,

$$\|\chi_I\varphi\,(F-F_I)\|_{L^{p,q}_\omega}\leqslant 2c_{pq}\inf_{c\in\mathbb{R}}\|\chi_I\varphi\,(F-c)\|_{L^{p,q}_\omega}\,. \tag{21}$$

Итак, применяя лемму 1 с параметрами $\max(p,q)=\varrho$, $\min(r,s)=\theta$ и принимая во внимание формулы (18)–(19) и (21), получаем

$$\left\|Tf-\widetilde{P}f\right\|^{\varrho}_{L^{p,q}_\omega}=\left\|Tf\right\|^{\varrho}_{L^{p,q}_\omega}\geqslant$$

$$\geqslant\|\chi_{I_0}\varphi F_0\|^{\varrho}_{L^{p,q}_\omega}+\sum_{k=1}^{N-1}\left\|\chi_{I_k}\varphi F\right\|^{\varrho}_{L^{p,q}_\omega}+\|\chi_{I_N}\varphi F_N\Big\|^{\varrho}_{L^{p,q}_\omega}=$$

$$=(\lambda\varepsilon)^{\varrho}\|\nu_0 f_0\|^{\varrho}_{L^{r,s}_v}+\sum_{k=1}^{N-1}\left\|\chi_{I_k}\varphi\big(\nu_k F_k+\mu_k\big)\right\|^{\varrho}_{L^{p,q}_\omega}+(\lambda\varepsilon)^{\varrho}\|\nu_N f_N\|^{\varrho}_{L^{r,s}_v}\geqslant$$

$$\geqslant(\lambda\varepsilon)^{\varrho}\|\nu_0 f_0\|^{\varrho}_{L^{r,s}_v}+(2c_{pq})^{-\varrho}\sum_{k=1}^{N-1}\left\|\chi_{I_k}\varphi\big(\nu_k F_k-(\nu_k F_k)_{I_k}\big)\right\|^{\varrho}_{L^{p,q}_\omega}+(\lambda\varepsilon)^{\varrho}\|\nu_N f_N\|^{\varrho}_{L^{r,s}_v}=$$

$$=(\lambda\varepsilon)^{\varrho}\|\nu_0 f_0\|^{\varrho}_{L^{r,s}_v}+(2c_{pq})^{-\varrho}\sum_{k=1}^{N-1}\Big(|\nu_k|\Big\|\chi_{I_k}\varphi\big(F_k-F_{k,I_k}\big)\Big\|\Big)^{\varrho}+(\lambda\varepsilon)^{\varrho}\|\nu_N f_N\|^{v}_{L^{r,s}_v}\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{\lambda\varepsilon}{2c_{pq}}\right)^{\varrho}\sum_{k=0}^{N}\left\|\nu_k f_k\right\|^{\varrho}_{L^{r,s}_v}\geqslant\left(\frac{\lambda\varepsilon}{2c_{pq}}\right)^{\varrho}\left(\sum_{k=0}^{N}\left\|\nu_k f_k\right\|^{\theta}_{L^{r,s}_v}\right)^{\varrho/\theta}(N+1)^{1-\varrho/\theta}\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{\lambda\varepsilon}{2c_{pq}}\right)^{\varrho}(N+1)^{1-\varrho/\theta}\left\|f\right\|^{\varrho}_{L^{r,s}_v}.$$

Тогда по определению (1)

$$a_{N+1}(T)\geqslant\frac{1}{2}c_{pq}^{-1}\lambda\varepsilon(N+1)^{1/\varrho-1/\theta},$$

и, полагая $\lambda\to 1$, получаем требуемую оценку. □

2. Ограниченность и компактность

Пусть последовательность $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, определяется формулой

$$V(\xi_n) = \int\limits_0^{\xi_n} v(\tau)\,d\tau = 2^n, \quad \text{интервалы} \quad J_n = (\xi_n, \xi_{n+1})$$

и

$$\sigma_n = \left(\int\limits_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} v(\tau)\,d\tau \right)^{1/s'} \|\chi_{(\xi_n,\xi_{n+1})}\varphi\|_{L^{p,q}_\omega} = 2^{(n-1)/s'} \|\chi_{(\xi_n,\xi_{n+1})}\varphi\|_{L^{p,q}_\omega}. \tag{22}$$

Из (22) следует, что

$$\|\chi_{(\xi_n,\xi_{n+1})}\varphi\|_{L^{p,q}_\omega} = \frac{\sigma_n}{2^{(n-1)/s'}}.$$

Лемма 2. *Пусть $\theta = \min\{p, q\}$, номера $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$ такие, что $n_1 < n_2 < n_3$, и интервал $I = (a, b) \subset \bigcup_{n\,=\,n_1}^{n_3} J_n$. Тогда*

$$A(I) \leqslant \frac{2^{3/s'}}{\left(2^{1/s'} - 1\right)} \max_{n_2 \leqslant n \leqslant n_3} \sigma_n.$$

Доказательство. Применяя лемму 1 с параметром $1 < \theta \leqslant \min\{p, q\}$ и неравенство Йенсена, получаем

$$\left(\int\limits_a^x v(\tau)\,d\tau \right)^{1/s'} \|\chi_{(x,b)}\varphi\|_{L^{p,q}_\omega} \leqslant \left(\int\limits_{\xi_{n_1}}^{\xi_{n_2+1}} v(\tau)\,d\tau \right)^{1/s'} \|\chi_{(\xi_{n_2},\xi_{n_3+1})}\varphi\|_{L^{p,q}_\omega} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{(n_2+1)/s'} \left(\frac{\sigma_{n_2}^\theta}{2^{(n_2-1)\theta/s'}} + \ldots + \frac{\sigma_{n_3}^\theta}{2^{(n_3-1)\theta/s'}} \right)^{1/\theta} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{n_2 \leqslant n \leqslant n_3} \sigma_n \cdot 2^{2/s'} \left(\sum_{k\,=\,n_2}^{\infty} \frac{1}{2^{(k-1)\theta/s'} 2^{-(n_2-1)\theta/s'}} \right)^{1/\theta} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2/s'} \max_{n_2 \leqslant n \leqslant n_3} \sigma_n \left(\sum_{l\,=\,0}^{\infty} \frac{1}{2^{l/s'}} \right) \leqslant \frac{2^{3/s'}}{\left(2^{1/s'} - 1\right)} \max_{n_2 \leqslant n \leqslant n_3} \sigma_n.$$

Таким образом,

$$A(I) = \sup_{a<x<b} \left(\int\limits_a^x v(\tau)\,d\tau \right)^{1/s'} \|\chi_{(x,b)}\varphi\|_{L^{p,q}_\omega} \leqslant \frac{2^{3/s'}}{\left(2^{1/s'} - 1\right)} \max_{n_2 \leqslant n \leqslant n_3} \sigma_n.$$

□

Лемма 3. *Пусть* $\varrho = \max\{p,q\}$, $\beta = \dfrac{s'\varrho}{s'+\varrho}$, $I_k = (c_k, c_{k+1})$, $x_k \in I_k$, *и* $\xi_{n_3} < c_1 < < c_2 < \ldots < c_l < \xi_{n_3+1}$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{l} A^{\beta}(I_k) \leqslant 2^{\beta/s'}\sigma_{n_3}^{\beta}.$$

Доказательство. Применяя неравенство Гельдера с показателями $\dfrac{s'+\varrho}{\varrho}$ и $\dfrac{s'+\varrho}{s'}$, а затем лемму 1 с $\varrho = \max\{p,q\}$, получаем

$$\sum_{k=1}^{l}\left(\int_{c_k}^{x_k} v(\tau)\,d\tau\right)^{\beta/s'} \|\chi_{(x_k,c_{k+1})}\varphi\|^{\beta}_{L^{p,q}_{\omega}} \leqslant \sum_{k=1}^{l}\left(\int_{I_k} v(\tau)\,d\tau\right)^{\beta/s'} \|\chi_{I_k}\varphi\|^{\beta}_{L^{p,q}_{\omega}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{l}\int_{I_k} v(\tau)\,d\tau\right)^{\beta/s'}\left(\sum_{k=1}^{l}\|\chi_{I_k}\varphi\|^{\varrho}_{L^{p,q}_{\omega}}\right)^{\beta/\varrho} \leqslant \left(\int_{\xi_{n_3}}^{\xi_{n_3+1}} v(\tau)\,d\tau\right)^{\beta/s'} \|\chi_{(\xi_{n_3},\xi_{n_3+1})}\varphi\|^{\beta}_{L^{p,q}_{\omega}} =$$

$$= \Big[V(\xi_{n_3+1}) - V(\xi_{n_3})\Big]^{\beta/s'}\left(\frac{\sigma_{n_3}^{\beta}}{2^{(n_3-1)\beta/s'}}\right) = \frac{\Big[2^{n_3+1} - 2^{n_3}\Big]^{\beta/s'}}{2^{(n_3-1)\beta/s'}}\sigma_{n_3}^{\beta} = 2^{\beta/s'}\sigma_{n_3}^{\beta}.$$

В результате имеем

$$\sum_{k=1}^{l} A(I_k)^{\beta} = \sum_{k=1}^{l}\sup_{x_k\in I_k}\left(\int_{c_k}^{x_k} v(\tau)\,d\tau\right)^{\beta/s'} \|\chi_{(x_k,c_{k+1})}\varphi\|^{\beta}_{L^{p,q}_{\omega}} \leqslant 2^{\beta/s'}\sigma_{n_3}^{\beta}.$$

$\square$

Последовательность $\{\sigma_n\}$ характеризует поведение оператора T — его ограниченность и компактность.

Теорема 4. *Пусть* $1 < \max(r,s) \leqslant \min(p,q) < \infty$. *Оператор* $T : L^{r,s}_v(\mathbb{R}^+) \to L^{p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^+)$ *вида* (9) *ограничен тогда и только тогда, когда последовательность* $\{\sigma_n\} \in \ell^{\infty}$, *при этом норма оператора удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\sigma_n \leqslant \|T\|_{L^{r,s}_v\to L^{p,q}_{\omega}} \leqslant \frac{2^{3/s'+2}}{(2^{1/s'}-1)}\sup_{n\in\mathbb{Z}}\sigma_n. \tag{23}$$

Доказательство. Зафиксируем некоторое малое $\varepsilon > 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ и некотором фиксированном t

$$\left(\int_{\varepsilon}^{t} v(\tau)\,d\tau\right)^{1/s'} \|\chi_{(t,\frac{1}{\varepsilon})}\varphi\|_{L^{p,q}_{\omega}} \to \left(\int_{0}^{t} v(\tau)\,d\tau\right)^{1/s'} \|\chi_{(t,\infty)}\varphi\|_{L^{p,q}_{\omega}}.$$

Далее,

$$\sup_{\varepsilon\leqslant t\leqslant \frac{1}{\varepsilon}}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{t} v(\tau)\,d\tau\right)^{1/s'}\|\chi_{(t,\frac{1}{\varepsilon})}\varphi\|_{L^{p,q}_{\omega}}\to \sup_{t>0}\left(\int\limits_{0}^{t} v(\tau)\,d\tau\right)^{1/s'}\|\chi_{(t,\infty)}\varphi\|_{L^{p,q}_{\omega}}$$

при $\varepsilon\to 0$. В силу действия леммы 2 имеем

$$A\left(\left(\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) = \sup_{\varepsilon\leqslant t\leqslant \frac{1}{\varepsilon}}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{t} v(\tau)\,d\tau\right)^{1/s'}\|\chi_{(t,\frac{1}{\varepsilon})}\varphi\|_{L^{p,q}_{\omega}} \leqslant \frac{2^{3/s'}}{\left(2^{1/s'}-1\right)}\sup_{n\in\mathrm{Z}}\sigma_n,$$

следовательно,

$$A=\sup_{t>0}A(t)=\sup_{t>0}\left(\int\limits_{0}^{t} v(\tau)\,d\tau\right)^{1/s'}\|\chi_{(t,\infty)}\varphi\|_{L^{p,q}_{\omega}}\leqslant \frac{2^{3/s'}}{\left(2^{1/s'}-1\right)}\sup_{n\in\mathrm{Z}}\sigma_n.$$

С другой стороны, используя дискретный аналог теоремы 2 (замечание 2), получаем

$$\sigma_n\leqslant 2^{n/s'}\|\chi_{(\xi_n,\xi_{n+1})}\varphi\|_{L^{p,q}_{\omega}}\leqslant 2^{n/s'}\|\chi_{(\xi_n,\infty)}\varphi\|_{L^{p,q}_{\omega}}=A(\xi_n) \tag{24}$$

и

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\sigma_n\leqslant A, \tag{25}$$

что согласно теореме 1 влечет за собой $\|T\|\approx\|\{\sigma_n\}\|_{\ell^\infty}$. □

Теорема 5. *Пусть* $1<\max(r,s)\leqslant\min(p,q)<\infty$. *Оператор* $T:L^{r,s}_v(\mathbb{R}^+)\to L^{p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^+)$ *вида* (9) *компактен тогда и только тогда, когда*

$$\|\{\sigma_n\}\|_{\ell^\infty}<\infty \quad \textit{и} \quad \lim_{k\to+\infty}\sup_{n\geqslant k}\sigma_n=\lim_{k\to-\infty}\sup_{n\leqslant k}\sigma_n=0.$$

Доказательство. *Достаточность.* Согласно оценке нормы оператора в теореме 1 и неравенства (23) имеем

$$A\leqslant\|T\|_{L^{r,s}_v\to L^{p,q}_{\omega}}\leqslant\frac{2^{3/s'+2}}{\left(2^{1/s'}-1\right)}\sup_{n\in\mathbb{Z}}\sigma_n,$$

что влечет за собой $A<\infty$.

В силу действия леммы 2 получаем оценку

$$A(\xi_k)=\left(\int\limits_{0}^{\xi_k} v(\tau)\,d\tau\right)^{1/s'}\|\chi_{(\xi_k,\infty)}\varphi\|_{L^{p,q}_{\omega}}\leqslant\frac{2^{3/s'}}{2^{1/s'}-1}\sup_{n\geqslant k}\sigma_n.$$

Тогда $\lim\limits_{k\to+\infty}A(\xi_k)=0$ в том случае, если $\lim\limits_{k\to+\infty}\sup\limits_{n\geqslant k}\sigma_n=0$. Проводя аналогичные рассуждения заключаем, что $\lim\limits_{k\to-\infty}A(\xi_k)=0$, если $\lim\limits_{k\to-\infty}\sup\limits_{n\leqslant k}\sigma_n=0$ и дискретный аналог теоремы 2 влечет за собой компактность оператора (9). *Необходимость* следует из неравенств (24)–(25). □

3. Оценки норм оператора

Лемма 4. *Пусть* $I = (a, b)$, $I \subset \mathbb{R}^+$ *и*

$$A(I) = \sup_{a<x<b} \|\chi_{(x,b)}\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_{(a,x)}\varphi\|_{L_\omega^{p,q}},$$

$$B(I) = \sup_{a<x<b} \|\chi_{(a,x)}\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_{(x,b)}\varphi\|_{L_\omega^{p,q}}.$$

Тогда

$$A(J_n \cup J_{n+1}) \geqslant 4^{\frac{1}{s'}}\sigma_n, \qquad B(J_n \cup J_{n+1}) \geqslant \sigma_{n+1}.$$

Доказательство.

$$A(J_n \cup J_{n+1}) = \sup_{\xi_n<x<\xi_{n+2}} \|\chi_{(x,\xi_{n+2})}\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_{(\xi_n,x)}\varphi\|_{L_\omega^{p,q}} \geqslant$$

$$\geqslant \|\chi_{(\xi_{n+1},\xi_{n+2})}\|_{L_v^{r's'}} \|\chi_{(\xi_n,\xi_{n+1})}\varphi\|_{L_\omega^{p,q}} = \Big[V(\xi_{n+2}) - V(\xi_{+1})\Big]^{1/s'} \left(\frac{\sigma_n}{2^{(n-1)/s'}}\right) =$$

$$= \frac{\Big[2^{n+2} - 2^{n+1}\Big]^{1/s'}}{2^{\frac{n-1}{s'}}} \cdot \sigma_n = 4^{\frac{1}{s'}}\sigma_n.$$

$$B(J_n \cup J_{n+1}) = \sup_{\xi_n<x<\xi_{n+2}} \|\chi_{(\xi_n,x)}\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_{(x,\xi_{n+2})}\varphi\|_{L_\omega^{p,q}} \geqslant$$

$$\geqslant \|\chi_{(\xi_n,\xi_{n+1})}\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_{(\xi_{n+1},\xi_{n+2})}\varphi\|_{L_\omega^{p,q}} = \sigma_{n+1}.$$

□

Лемма 5. *Пусть* $0 < a < b < \infty$, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}^+$, *точка* $c \in I$ *выбрана так, что*

$$\|\mathcal{T}_I\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|\chi_I\varphi(F - F_I)\|_{L_\omega^{p,q}}}{\|\chi_I f\|_{L_v^{r,s}}} \approx \max(A(a, c), B(c, b)),$$

где

$$A(a, c) = \sup_{a<\varsigma<c} \|\chi_{(\varsigma,c)}\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_{(a,\varsigma)}\varphi\|_{L_\omega^{p,q}},$$

$$B(c, b) = \sup_{c<\varsigma<b} \|\chi_{(c,\varsigma)}\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_{(\varsigma,b)}\varphi\|_{L_\omega^{p,q}}.$$

Определим

$$D(I) = \max\Big(A(a, c), B(c, b)\Big).$$

Пусть $0 < \varepsilon < \|T\|$, *зададим множество*

$$S_I(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{Z} : \quad J_n \subset I, \quad \sigma_n > \varepsilon\},$$

и предположим, что $\operatorname{card} S_I(\varepsilon) \geqslant 4$. *Тогда* $D(I) > \varepsilon$.

Доказательство. Так как множество $S_I(\varepsilon) \geqslant 4$, то хотя бы один из интервалов (a,c) или (c,b) содержит два элемента J_n. В первом случае, обозначая $n_1 = \min\{n : \ n \in S_I(\varepsilon)\}$, получаем, что $J_{n_1} \cup J_{n_1+1} \subset (a,c)$, и по лемме 4 имеем

$$A(a,c) \geqslant A\Big(J_{n_1} \cup J_{n_1+1}\Big) \geqslant 4^{\frac{1}{s'}}\sigma_{n_1} > 4^{\frac{1}{s'}}\varepsilon > \varepsilon.$$

Если же два элемента попадают в интервал (c,b), то полагаем
$n_2 = \max\{n : \ n \in S_I(\varepsilon)\}$. В этом случае $J_{n_2-1} \cup J_{n_2} \subset (c,b)$ и

$$B(c,b) \geqslant B\Big(J_{n_2-1} \cup J_{n_2}\Big) \geqslant \sigma_{n_2} > \varepsilon.$$

Следовательно,

$$D(I) = \max\Big(A(a,c), B(c,b)\Big) > \varepsilon.$$

□

Лемма 6. *Пусть* $0 < \varepsilon < \|T\|$, $\mathrm{card} S_I(\varepsilon) \geqslant 4$. *Тогда* $\|\mathcal{T}_I\| > \varepsilon$.

Доказательство. В силу условий теоремы 4 [9] $\|\mathcal{T}_I\| \approx D(I)$. Доказательство утверждения следует из леммы 5. □

Лемма 7. *Пусть* $0 < \varepsilon < \|T\|$, *интервалы* $I_i = (c_i, c_{i+1})$, $\quad i = 0, 1, ..., N(\varepsilon)$, *определены в соответствии с формулами* (12) *и* (16). *Тогда*

$$\mathrm{card}\{k \in \mathbb{Z} \ : \sigma_k > \varepsilon\} \leqslant 6N(\varepsilon).$$

Доказательство. Так как

$$\mathrm{card}\{k \in \mathbb{Z} \ : c_j \in J_k \ \text{ для некоторых } j, \ 1 \leqslant j \leqslant N\} \leqslant N, \tag{26}$$

то для $k \in \mathbb{Z}$, не содержащихся во множестве (26), $J_k \subset I_i = (c_i, c_{i+1})$ при $1 \leqslant i \leqslant N$. По выбору $\|\mathcal{T}_{I_k}\|$ и в силу действия условий леммы 6

$$\mathrm{card}\{k \in \mathbb{Z} \ : \ J_k \subset I_i, \sigma_k > \varepsilon\} \leqslant 3.$$

Следовательно,

$$\mathrm{card}\{k \in \mathbb{Z} \ : \ \sigma_k > \varepsilon\} = \sum_{i\,=\,0}^{N} \mathrm{card}\{k \in \mathbb{Z} \ : \ J_k \subset I_i, \sigma_k > \varepsilon\} + 2N \leqslant$$
$$\leqslant 3(N+1) + 2N \leqslant 6N.$$

□

Лемма 8. *Для любого* $t > 0$ *справедливо неравенство*

$$\mathrm{card}\{k \in \mathbb{Z} \ : \sigma_k > t\} \leqslant 6\,\mathrm{card}\left\{k \in \mathbb{N} \ : a_k(T) k^{\frac{1}{\min(r,s)} - \frac{1}{\max(p,q)}} \geqslant \frac{t}{2c_{pq}}\right\},$$

где константа c_{pq} *определена формулой* (6).

Доказательство. Из условий теоремы 3 следует, что

$$\operatorname{card}\left\{k \in \mathbb{N} \ : a_k(T) k^{\frac{1}{\min(r,s)} - \frac{1}{\max(p,q)}} \geqslant \frac{1}{2c_{pq}}\varepsilon\right\} = N(\varepsilon).$$

Тогда, в силу условий леммы 7, получаем

$$\operatorname{card}\Big\{k \in \mathbb{Z} : \sigma_k > t\Big\} \leqslant 6N(t) = 6 \operatorname{card}\Big\{k \in \mathbb{N} : a_k(T)\, k^{\frac{1}{\min(r,s)} - \frac{1}{\max(p,q)}} \geqslant \frac{t}{2c_{pq}}\Big\}.$$

□

Лемма 9. *Для $\alpha \in (0, \infty)$ выполняется неравенство*

$$\Big\|\{\sigma_k\}\Big\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \leqslant 6^{1/\alpha} 2c_{pq} \Big\|\Big\{a_k(T) k^{\frac{1}{\min(r,s)} - \frac{1}{\max(p,q)}}\Big\}\Big\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}.$$

Доказательство. Применяя к пространству ℓ^α свойство квазинормы (см. [13, Proposition 1.1.4]) с функцией распределения $\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} \ : \sigma_k > t\}$ последовательности $\{\sigma_k\}$ и используя лемму 8, имеем

$$\Big\|\{\sigma_k\}\Big\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} = \alpha \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} \ : \sigma_k > t\}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 6\alpha \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \operatorname{card}\left\{k \in \mathbb{N} \ : a_k(T) k^{\frac{1}{\min(r,s)} - \frac{1}{\max(p,q)}} \geqslant \frac{t}{2c_{pq}}\right\} dt =$$

$$= 6 \cdot (2c_{pq})^\alpha \Big\|\Big\{a_k(T) k^{\frac{1}{\min(r,s)} - \frac{1}{\max(p,q)}}\Big\}\Big\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}.$$

□

Теорема 6. *Пусть $1 < \max(r, s) \leqslant \min(p, q)$, $\beta = \dfrac{\max\{p, q\} \cdot s'}{\max\{p, q\} + s'}$, $\alpha > \beta$ и $T : L^{r,s}_v(\mathbb{R}^+) \to L^{p,q}_\omega(\mathbb{R}^+)$ компактный оператор вида (9). Тогда*

$$\Big\|\{a_k(T)\}\Big\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} \leqslant C \Big\|\{\sigma_k\}\Big\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})},$$

где константа $C = C(p, q, r, s, \alpha, \beta)$.

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < \|T\|$, $N = N(\varepsilon)$ определены формулами (12) и (16). Тогда для любого c_k найдется номер j_k такой, что $c_k \subset J_{j_k}$, и здесь возможны следующие варианты:

1) $j_{k_0} < j_{k_0+1}$

или

2) $j_k = j_{k+1} = ... = j_{k+m_k}$, $I_i \subset J_{j_k}$, $k \leqslant i \leqslant k + m_k$, $m_k > 1$.

Используя теорему 4 [9] и лемму 2, в первом случае получаем

$$1)\ \ \varepsilon = \|\mathcal{T}_{I_{k_0}}\| \leqslant C_1 D(I_{k_0}) \leqslant C_1 \Big(A(I_{k_0}) + B(I_{k_0})\Big) \leqslant C_2 \sup_{j_{k_0} \leqslant j \leqslant j_{k_0+1}} \sigma_j \equiv C_2 \sigma_{j_k},$$

для некоторого $j_k \in [j_{k_0}, j_{k_0+1}]$.

Во втором случае, применя результаты леммы 3, имеем

$$2)\ \ \varepsilon^\beta m_k = \sum_{i\,=\,k}^{k+m_k} \|\mathcal{T}_{I_i}\|^\beta \leqslant C_3^\beta \sigma_{j_k}^\beta.$$

Следовательно,

$$N(\varepsilon) = \operatorname{card}\Big\{k:\ \sigma_{j_k} \geqslant \frac{\varepsilon}{C_2}\Big\} + \sum_{k:m_k>1} \operatorname{card}\Big\{k:\ \sigma_{j_k} \geqslant \frac{\varepsilon m_k^{1/\beta}}{C_3}\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n\,=\,1}^{\infty} \operatorname{card}\Big\{k:\ \sigma_k \geqslant \frac{n^{1/\beta}\varepsilon}{C_4}\Big\},$$

где константа $C_4 = \min\{C_2, C_3\}$.

Верхняя оценка аппроксимативных чисел в теореме 3 показывает, что

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{N}\ : a_k > \varepsilon\} \leqslant N(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\Big\|\{a_k(T)\}\Big\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}^\alpha = \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N}\ : a_k(T) > t\}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} N(t)\, dt \leqslant \alpha \int_0^\infty \sum_{n\,=\,1}^{\infty} t^{\alpha-1} \operatorname{card}\Big\{k \in \mathbb{Z}:\ \sigma_k \geqslant \frac{n^{1/\beta} t}{C_4}\Big\}\, dt =$$

$$= C_4^\alpha \left(\sum_{n\,=\,1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha/\beta}}\right) \int_0^\infty \alpha\tau^{\alpha-1} \operatorname{card}\Big\{k:\ \sigma_k \geqslant \tau\Big\}\, d\tau = C_5^\alpha \Big\|\{\sigma_k\}\Big\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}^\alpha,$$

где $C_5 = C_5(p, q, r, s, \alpha, \beta)$. □

Введем следующие обозначения:

$$J_\alpha = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x v(\tau)\, d\tau\right)^{\frac{\alpha}{s'}} \left(\int_x^\infty q t^{q-1} \varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\, dt\right)^{\frac{\alpha}{q}-1} q x^{q-1} \varphi_*(x)^{\frac{q}{p}}\, dx\right)^{1/\alpha},$$

$$J'_\alpha = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x v(\tau)\, d\tau\right)^{\frac{\alpha}{s'}-1} \left(\int_x^\infty q t^{q-1} \varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\, dt\right)^{\frac{\alpha}{q}} v(x)\, dx\right)^{1/\alpha}.$$

Лемма 10. *Пусть $0 < \alpha < \infty$, $1 < r, p < \infty$, $1 < s, q < \infty$. Функционал $J_\alpha < \infty$ в том и только в том случае, если $J'_\alpha < \infty$ и*

$$J_\alpha = \left(\frac{q}{s'}\right)^{1/\alpha} J'_\alpha.$$

Доказательство. Пусть $0 \leqslant J_\alpha < \infty$. Тогда

$$\lim_{t\to\infty}\left(\int\limits_t^\infty\left(\int\limits_0^x v(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{s'}}\left(\int\limits_x^\infty qt^{q-1}\varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\,dt\right)^{\frac{\alpha}{q}-1} qx^{q-1}\varphi_*(x)^{\frac{q}{p}}\,dx\right)^{1/\alpha} = 0,$$

что влечет за собой

$$\lim_{t\to\infty}\left(\int\limits_0^t v(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{s'}}\left(\int\limits_t^\infty qt^{q-1}\varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\,dt\right)^{\frac{\alpha}{q}} = 0.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$J_\alpha^\alpha = \frac{q}{\alpha}\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^x v(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{s'}}\frac{\alpha}{q}\left(\int\limits_x^\infty qt^{q-1}\varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\,dt\right)^{\frac{\alpha}{q}-1} qx^{q-1}\varphi_*(x)^{\frac{q}{p}}\,dx =$$

$$= \frac{q}{\alpha}\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^x v(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{s'}} d\left(-\int\limits_x^\infty qt^{q-1}\varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\,dt\right)^{\frac{\alpha}{q}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{q}{s'}\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^x v(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{s'}-1}\left(\int\limits_x^\infty qt^{q-1}\varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\,dt\right)^{\frac{\alpha}{q}} v(x)\,dx = \frac{q}{s'}{J'_\alpha}^\alpha.$$

Итак, $\left(\dfrac{q}{s'}\right)^{\frac{1}{\alpha}} J'_\alpha \leqslant J_\alpha < \infty$, следовательно, $J'_\alpha < \infty$.

Доказательство достаточности. Пусть $J'_\alpha < \infty$. Рассуждая аналогично тому, как это делалось выше, получаем

$$\lim_{t\to 0}\left(\int\limits_0^t v(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{s'}}\left(\int\limits_t^\infty qt^{q-1}\varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\,dt\right)^{\frac{\alpha}{q}} = 0.$$

$${J'_\alpha}^\alpha = \int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^x v(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{s'}-1}\left(\int\limits_x^\infty qt^{q-1}\varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\,dt\right)^{\frac{\alpha}{q}} v(x)\,dx =$$

$$= \frac{s'}{\alpha}\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_x^\infty qt^{q-1}\varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\,dt\right)^{\frac{\alpha}{q}} d\left(\int\limits_0^x v(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{s'}} =$$

$$= \frac{s'}{\alpha}\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^x v(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{s'}} d\left(-\int\limits_x^\infty qt^{q-1}\varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\,dt\right)^{\frac{\alpha}{q}} =$$

$$= \frac{s'}{q}\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^x v(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{s'}}\left(\int\limits_x^\infty qt^{q-1}\varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\,dt\right)^{\frac{\alpha}{q}-1} qx^{q-1}\varphi_*(x)^{\frac{q}{p}}dx = \frac{s'}{q}{J_\alpha}^\alpha.$$

Получили, что $\left(\frac{s'}{q}\right)^{\frac{1}{\alpha}} J_\alpha \leqslant J'_\alpha < \infty$, следовательно, $J_\alpha < \infty$. □

Основной результат работы содержится в следующей теореме.

Теорема 7. *Пусть* $0<\alpha<\infty$, $1<r,p<\infty$, $1<s,q<\infty$ *и* $J_\alpha<\infty$. *Тогда компактный оператор* $T: L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+) \to L_u^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ *в области* $1<\max(r,s)\leqslant\min(p,q)<\infty$ *вида*

$$Tf(x)=\varphi(x)\int\limits_0^x f(\tau)v(\tau)\,d\tau, \quad x>0,$$

является $\mathfrak{S}_\alpha^{(a)}$*-оператором и*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha(T)\right)^{1/\alpha} \ll \left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^x v(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{s'}-1} \left(\int\limits_x^\infty q t^{q-1}\varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\,dt\right)^{\frac{\alpha}{q}} v(x)\,dx\right)^{1/\alpha}.$$

Доказательство. Пусть $0<\alpha<\infty$. На первом шагом докажем неравенство $\left(\sum_k \sigma_k^\alpha\right)^{1/\alpha} \ll J'_\alpha$. Действительно,

$$J'^{\alpha}_{\alpha} = \sum_k \int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left(\int\limits_0^x v(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{s'}-1} \left(\int\limits_x^\infty q t^{q-1}\varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\,dt\right)^{\frac{\alpha}{q}} v(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{s'}{\alpha}\sum_k \|\chi_{(\xi_{k+1},\infty)}\varphi\|^\alpha_{L^{p,q}_\omega} \int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} d\left(\int\limits_0^x v(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{s'}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{s'}{\alpha}\sum_k \|\chi_{(\xi_{k+1},\infty)}\varphi\|^\alpha_{L^{p,q}_\omega} \left[\left(\int\limits_0^{\xi_{k+1}} v(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{s'}} - \left(\int\limits_0^{\xi_k} v(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{\alpha}{s'}}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{s'}{\alpha}\sum_k \|\chi_{(\xi_{k+1},\infty)}\varphi\|^\alpha_{L^{p,q}_\omega} \left[2^{\frac{(k+1)\alpha}{s'}} - 2^{\frac{k\alpha}{s'}}\right] \geqslant \frac{s'}{\alpha}\left(1-2^{\frac{-\alpha}{s'}}\right)\sum_k \sigma_k^\alpha.$$

Следовательно,

$$\left(\sum_k \sigma_k^\alpha\right)^{1/\alpha} \leqslant \left[\frac{s'}{\alpha}\left(1-2^{\frac{-\alpha}{s'}}\right)\right]^{-1/\alpha} J'_\alpha, \quad 0<\alpha<\infty.$$

В силу условий леммы 10 мы имеем $J_\alpha \approx J'_\alpha$. Далее, по теореме 6,

$$\Big\|\{a_k(T)\}\Big\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} \leqslant C\Big\|\{\sigma_k\}\Big\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})},$$

где константа $C=C(p,q,r,s,\alpha,\beta)$, что и доказывает справедливость оценки

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha(T)\right)^{1/\alpha} \ll J'_\alpha.$$

$\square$

В монографии А. Пича [1, 14.3.11-14.3.12] доказано вложение $\mathfrak{S}^{(a)}_{\alpha_1} \subseteq \mathfrak{E}_{\alpha_2}$ при $0<\alpha_1 \leqslant \alpha_2<\infty$, что также позволяет получить оценку

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} e_n^{\alpha_2}(T)\right)^{1/\alpha_2} \ll \left(\int_0^{\infty}\left(\int_0^{x} v(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{\alpha_1}{s'}-1}\left(\int_x^{\infty} qt^{q-1}\varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\,dt\right)^{\frac{\alpha_1}{q}} v(x)\,dx\right)^{1/\alpha_1}.$$

Автор выражает благодарность Ушаковой Е. П. за замечания и важные рекомендации, позволившие улучшить статью.

Список литературы

[1] А. Пич, *Операторные идеалы*, Мир, М., 1982.

[2] H. König, *Eigenvalue distribution of compact operators*, Birkhäuser, Boston, 1986.

[3] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, v. 129, Pure. Appl. Math., 1988.

[4] S. Barza, V. Kolyada V., J. Soria, “Sharp constants related to the triangle inequality in Lorentz spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **361**:10, (2009), 5555–5574.

[5] D. E. Edmunds, W. D. Evans, D. J. Harris, “Two-sided estimates of the approximation numbers of certain Volterra integral operators”, *Studia Math*, **24**:1, (1997), 59–80.

[6] E. Lomakina, V. Stepanov, “On asymptotic behaviour of the approximation numbers and estimates of Schatten – von Neumann norms of the Hardy-type integral operators”, *Function spaces and application*, Narosa Publishing Hause, New Delhi, 2000.

[7] V. D. Stepanov, “On the singular numbers of certain Volterra integral operators”, *J. London Math. Soc.*, **61**:2, (2000), 905–922.

[8] Е. П. Ушакова, “Оценки сингулярных чисел преобразований типа Стильтьеса”, *Сиб. матем. журн.*, **52**:1, (2011), 201–209.

[9] E. Lomakina, V. Stepanov, “On the compactness and approximation numbers of Hardy type integral operators in Lorentz spases”, *J. London Math. Soc.*, **53**:2, (1996), 369–382.

[10] H. M. Chung, R. A. Hunt, D. S. Kurtz, “The Hardy-Littlewood maximal function on $L(p,q)$ spaces with weights”, *Indiana Univ. Math. J.*, **31**, (1982), 109–120.

[11] D. E. Edmunds, P. Gurka, L. Pick, “Compactness of Hardy-type integral operators in weighted Banach function spaces”, *Studia Math.*, **109**, (1994), 73–90.

[12] E. T. Sawyer, “Weighted Lebesgue and Lorentz norm inequalities for the Hardy operator”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **281**, (1984), 329–337.

[13] L. Grafakos, *Classical fourier analysis*, Springer-Verlag, New York, 2008.

[14] D. E. Edmunds, V. D. Stepanov, “On the singular numbers of certain Volterra integral operators”, *J. Funct. Anal.*, **134**:1, (1995), 222–246.

Поступила в редакцию
12 сентября 2020 г.

Lomakina E. N. On estimates for the norms of the Hardy operator acting in the Lorenz spaces. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2020. V. 20. No 2. P. 191–211.

ABSTRACT

In the paper conditions are found under which the compact operator $Tf(x) = \varphi(x)\int\limits_0^x f(\tau)v(\tau)\,d\tau$, $x > 0$, acting in weighted Lorentz spaces $T : L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+) \to L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ in the domain $1 < \max(r,s) \leqslant \min(p,q) < \infty$, belongs to operator ideals $\mathfrak{S}_\alpha^{(a)}$ and $\mathfrak{E}_\alpha$, $0 < \alpha < \infty$. And estimates are also obtained for the quasinorms of operator ideals in terms of integral expressions which depend on operator weight functions.

Key words: *operator ideal, Hardy operator, compact operator, Lorentz spaces, approximation numbers, entropy numbers.*