Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20. № 2. С. 224–226

УДК 511.334+511.335
MSC2010 11F11

© М. Д. Монина[1]

О распределении целых точек на трёхмерной сфере

В работе результат В.А. Быковского и М.Д. Мониной о распределении целых точек на трёхмерной сфере $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=d$ с нечётными d распространяется на случай чётных d.

Ключевые слова: *Целые точки на сфере, модулярные функции, ряды Гекке.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202022

Пусть $r_s(d)$ — количество представлений неотрицательного целого d суммой s квадратов целых чисел. В работе [1] для вещественных $0\leqslant u<v\leqslant 1$ и любого нечётного натурального d была доказана асимптотическая формула

$$r_4(d;u,v)=\sum_{\substack{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=d\\ ud\leqslant a_1^2+a_2^2\leqslant vd}}1=\sum_{ud\leqslant n\leqslant vd}r_2(n)r_2(d-n)=$$
$$=(u-v)r_4(d)+O_\varepsilon(d^{2/3+\varepsilon})\quad\forall\varepsilon>0. \tag{1}$$

Пусть $d=2^l d_1$, где d_1 и l — натуральные числа и d_1 — нечётное. В работе доказывается следующее утверждение.

Теорема. *Для любого* $\varepsilon>0$

$$r_4(d;u,v)=(u-v)r_4(d)+O_\varepsilon(d_1^{2/3+\varepsilon}).$$

Для произвольной функции φ, определённой на отрезке $[-1,1]$, положим

$$r_4^{(\varphi)}(d)=\sum_{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=d}\varphi\Big(1-2\frac{a_1^2+a_2^2}{d}\Big)=\sum_{n=0}^{d}r_2(n)r_2(d-n)\varphi\Big(1-\frac{2n}{d}\Big).$$

Лемма. *Пусть* $d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 4)$*. Тогда* $r_4^{(\varphi)}(d)=r_4^{(\varphi)}(d/2)$.

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: monina@iam.khv.ru

Доказательство. Для любого целого a выполняется сравнение

$$a^2 \equiv 0,1 \pmod 4.$$

Отсюда следует, что для любого целочисленного представления

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = d \tag{2}$$

целые a_1,a_2,a_3,a_4 либо одновременно чётные, либо нечётные. Поэтому преобразование

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \to (b_1, b_2, b_3, b_4) = \frac{1}{2}(a_1 + a_2, a_1 - a_2, a_3 + a_4, a_3 - a_4)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между целочисленными точками на сферах (2) и

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = d/2,$$

поскольку

$$a_1^2 + a_2^2 = 2(b_1^2 + b_2^2), \quad a_3^2 + a_4^2 = 2(b_3^2 + b_4^2).$$

Следовательно,

$$r_4^{(\varphi)}(d) = \sum_{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2 \,=\, d} \varphi\left(1 - 2\frac{a_1^2 + a_2^2}{d}\right) = \sum_{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2 \,=\, d/2} \varphi(1 - 2\frac{b_1^2 + b_2^2}{d/2}) =$$
$$= r_4^{(\varphi)}(d/2).$$

Лемма доказана. □

Следствие. *Для любого нечётного натурального* d_1 *и* $l \geqslant 2$

$$r_4^{(\varphi)}(2^l d_1) = r_4^{(\varphi)}(2d_1).$$

Доказательство теоремы. Доказательство асимптотической формулы (1) в работе [1] основывалось на формуле следа из [2], в которой для функций $\varphi(x) = P_n(x)$ (полиномы Лежандра) было получено разложение $r_4^{(\varphi)}(d)$ в виде среднего по произведениям коэффициента Фурье с номером d и двух $\mathcal{L}$-рядов Гекке параболических форм чётного веса $2k$, автоморфных относительно конгруэнцподгруппы $\Gamma_0(4)$. В той же работе отмечалось, что это разложение справедливо для всех натуральных d. Применяя утверждение леммы 1 и действуя точно так же, как в [1], с помощью спектрального решета (см. [3]) получим утверждение теоремы. □

Автор благодарит Быковского В. А. за обсуждение полученного результата.

Список литературы

[1] V. A. Bykovskii, M. D. Monina, “Trace Formula for Integral Points on the Three-Dimensional Sphere”, *Doklady Mathematics*, **101**, (2020), 9–11 doi `https://doi.org/10.1134/S1064562420010044`.

[2] V. A. Bykovsky, *Hecke series values of holomorphic cusp forms in the center of the critical strip*, Number Theory in Progress. **2**: Elementary and Analytic Number Theory, Walter de Gruyter, Berlin, 1999, 15 pp.

[3] Х. Иванец, Э. Ковальский, *Аналитическая теория чисел*, МЦНМО, М., 2014, 712 с.

Поступила в редакцию
28 октября 2020 г.

Monina M. D. On the distribution of integral points on the three-dimensional sphere. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2020. V. 20. No 2. P. 224–226.

ABSTRACT

The result of V.A. Bykovsky and M.D. Monina on the distribution of integer points on the three-dimensional sphere $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = d$ with odd d is extended to the case of even d.

Key words: *integral points on a sphere, modular functions, Hecke series.*