Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20. № 2. С. 234–246

УДК 517.98
MSC2010 46L10

© А. А. Рахимов[1], Х. Х. Болтаев[2]

Индекс вещественных подфакторов W*-алгебр

В работе вводится понятие индекса для вещественных подфакторов W*-алгебр. Показано, что индекс вещественного подфактора совпадает с индексом обертывающего подфактора, и найдено множество возможных значений индекса. Доказано, что некоторые свойства индекса верны и в вещественном случае, и указаны свойства, неверные для вещественных подфакторов. С помощью множества примеров для каждой пары $N \subset M$ C*-алгебр указаны схемы построения графов.

Ключевые слова: *вещественная W*-алгебра, вещественный подфактор, индекс подфакторов, графы.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202024

1. Введение

В классической теории групп индекс $[G:H]$ подгруппы H группы G — это число смежных (левых или правых) классов G относительно подгруппы H. К примеру, $[\mathbb{Z}:\mathbb{Z}_n]=n$. В 1983 году новозеландский математик Воган Джонс (Vaughan Jones) обобщил понятие индекса для конечных W*-алгебр (см. [1]). Он указал множества возможных значений индекса и при доказательстве этого результата построил возрастающую последовательность конечных факторов, являющихся алгебрами Гекке $H_m(q)$ $(m\in\mathbb{N})$ и обладающих уникальными свойствами. При этом Джонс доказал, что если M — W*-алгебра, G — счетная дискретная группа автоморфизмов M и H — подгруппа G, для которых скрещенные произведения $M\times G$ и $M\times H$ являются конечными факторами, тогда $[M\times G:M\times H]=[G:H]$. Это показывает, что понятие индекса подфактора является обобщением понятия индекса подгруппы. Кроме

[1] Национальный университет Узбекистана, 100095, Узбекистан, г. Ташкент, Вуз-городок, 54; Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Ташкенте, 100060, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Амира Темура, 22

[2] Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, 100167, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Адылходжаева, 1.

Электронная почта: rakhimov_gafur@yahoo.com (А. А. Рахимов), bkhabibzhan@mail.ru (Х. Х. Болтаев).

того, В. Джонс получил доказательство существования Марковского следа на алгебре $H_\infty(q)=\cup_m H_m$ и, комбинируя эти Марковские следы с описанием узлов в $\mathbb{R}^3$, на основе группы кос B_n построил новый полиномиальный инвариант для узлов. Также, сопоставляя каждой паре W^*-алгебр $N\subset M$ некоторый двудольный граф, он получил необходимое и достаточное условие существования Марковского следа и тем самым открыл возможность изучения W^*-подалгебр на языке графов. За все эти работы В.Джонс в 1990 году в Киото, на всемирном XXI-математическом Конгрессе, был награжден медалью Филдса. В конце 80-х годов японский математик Х.Косаки обобщил работы Джонса для произвольных факторов [2].

Как известно [3], задача изучения йордановых банаховых алгебр (в частности, JW-алгебр) редуцируется к изучению вещественных алгебр фон Неймана (т.е. вещественных W*-алгебр). Поэтому параллельно с теорией JW и (комплексной) теорией W*-алгебр бурно продолжается исследование теории вещественных W*-алгебр. Основные достижения в изучении вещественных W*-алгебр принадлежат в первую очередь Ш. Аюпову, Э. Штермеру, П. Стаси и Ш. Усманову. К настоящему времени в основном благодаря этим ученым получена полная классификация вещественных инъективных факторов.

Настоящая работа посвящена изучению индекса вещественных подфакторов произвольного (комплексного) фактора. Показано, что некоторые свойства индекса верны и в вещественном случае, и указаны свойства, неверные для вещественных подфакторов. С помощью множества примеров для каждой пары $N\subset M$ указана схема построения графов.

2. Предварительные сведения

Пусть H — комплексное гильбертово пространство, B(H)— алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H. Слабо замкнутая *-подалгебра $M\subset B(H)$ с единицей $\mathbf{1}$ называется *W*-алгеброй*. Множество $M'=\{x\in B(H):\ xy=$ $=yx,\ \forall y\in M\}$ называется *коммутантом* *-алгебры M. Множество $Z=M\cap M'$ называется *центром* алгебры M. W*-алгебра M называется *фактором*, если ее центр тривиален, т.е. Z совпадает с $\{\lambda\mathbf{1},\ \lambda\in\mathbb{C}\}$. Вещественная *-подалгебра $R\subset B(H)$ называется *вещественной W*–алгеброй*, если она слабо замкнута и $R\cap iR=\{0\}$. Линейное отображение α алгебры M в себя с $\alpha(x^*)=\alpha(x)^*$ называется **-автоморфизмом*, если $\alpha(xy)=\alpha(x)\alpha(y)$; **-антиавтоморфизмом*, если $\alpha(xy)=\alpha(y)\alpha(x)$ и *инволютивным* отображением, если $\alpha^2(x)=x$. Если α – инволютивный *-антиавтоморфизм W*-алгебры M, то через (M,α) мы обозначим вещественную W*-алгебру $\{x\in M:\alpha(x)=$ $=x^*\}$, порожденную антиавтоморфизмом α. Наоборот, всякая вещественная W*-алгебра R имеет вид (M,α), где $M=R+iR$ — обертывающая W*-алгебра и α – инволютивный *-антиавтоморфизм M, определенный как $\alpha(x+iy)=x^*+iy^*$ (см. [3]). Вещественная W*-алгебра R называется *вещественным фактором*, если ее центр совпадает с $\{\lambda\mathbf{1},\ \lambda\in\mathbb{R}\}$; R имеет тип I_n, I_∞, II_1, II_∞ или III_λ, $(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$, если ее обертывающая W*-алгебра имеет соответствующий тип в смысле обычной классификации W*-алгебры.

Пусть $<\cdot,\cdot>$ — скалярное произведение на H и пусть $R \subset B(H)$ — вещественная *-подалгебра. Положим $<\xi,\eta>_r := Re(<\xi,\eta>)$, $\xi,\eta \in H$. Нетрудно показать [4], что $H_r := (H, <\cdot,\cdot>_r)$ есть вещественное гильбертово пространство такое, что

$$H_r + iH_r = H, \quad R \subset B(H_r) \subset B(H_r) + iB(H_r) = B(H).$$

Коммутант *-алгебры R определяется аналогично комплексному случаю:

$$R' = \{a \in B(H_r) : \ ab = ba, \ \forall b \in R\}.$$

Непосредственно проверяется (см. [5, Лемма 3.4.1]), что $(R+iR)' = R' + iR'$.

3. Индекс конечного подфактора

Пусть R — вещественный фактор типа II_1, τ — точный нормальный канонический след на R. След τ продолжается на $M = R+iR$ как $\overline{\tau}(a+ib) := \tau(a)$, причем след $\overline{\tau}$ также является точным нормальным следом (см. [6]). Аналогично следы на алгебрах R' и $M' = (R+iR)'$ обозначим как τ' и $\overline{\tau}'$ соответственно. Для любого вектора $\xi \in H$ $(\xi \neq 0)$ рассмотрим следующие проекторы:

$$e_\xi : H \to \overline{R'\xi}, \quad e'_\xi : H \to \overline{R\xi}, \quad f_\xi : H \to \overline{M'\xi} \quad \text{и} \quad f'_\xi : H \to \overline{M\xi}.$$

Легко показать, что $e_\xi \in R$, $e'_\xi \in R'$, $f_\xi \in M$, $f'_\xi \in M'$. Известно, что число $\dfrac{\overline{\tau}(f_\xi)}{\overline{\tau}'(f'_\xi)}$ называется *парной константой Неймана – Мюррея*, причем это число не зависит от вектора ξ и обозначается через $\dim_M(H)$. А в [5, предложение 3.4.6] показано, что число $\dfrac{\tau(e_\xi)}{\tau'(e'_\xi)}$, обозначаемое через $\dim_R(H_r)$, также не зависит от вектора ξ, и эти парные константы Неймана – Мюррея совпадают между собой (см. также [5, теорема 3.5.2]):

$$\dim_M(H) = \frac{\overline{\tau}(f_\xi)}{\overline{\tau}'(f'_\xi)} = \frac{\tau(e_\xi)}{\tau'(e'_\xi)} = \dim_R(H_r).$$

Замечание 1. Вообще говоря, имеют место следующие неравенства

$$\overline{\tau}(f_\xi) \neq \tau(e_\xi), \qquad \overline{\tau}'(f'_\xi) \neq \tau'(e'_\xi).$$

То есть равенство $\overline{\tau}(a+ib) = \tau(a)$ не влечет за собой равенств: $\overline{\tau}(f_\xi) = \tau(e_\xi)$ и $\overline{\tau}'(f'_\xi) = \tau'(e'_\xi)$. Потому что, например, проектор $f_\xi \in M$ имеет вид $f_\xi = a+ib$, где $a, b \in R$, $a \geqslant 0$, $b = -b^*$, и в общем случае $a \neq e_\xi$. Однако ясно, что $\exists \lambda > 0$ с $\overline{\tau}(f_\xi) = \lambda\tau(e_\xi)$ и $\overline{\tau}'(f'_\xi) = \lambda\tau'(e'_\xi)$.

Пусть теперь $L^2(R)$ — вещественное гильбертово пространство, получаемое пополнением алгебры R относительно нормы $\|a\|_2 = \tau(a^*a)^{1/2}$. Аналогично через $L^2(M)$ обозначим пополнение алгебры M по норме $\|x\|_2 = \overline{\tau}(x^*x)^{1/2}$. Легко проверить, что

$$L^2(R) + iL^2(R) = L^2(M). \tag{1}$$

Определение 1. Пусть R — конечный вещественный фактор и $Q \subset R$ — подфактор. *Индексом* Q в R называется число $\dim_Q(L^2(R))$, которое обозначается как $[R : Q]$.

Из вышесказанного, а также по формуле (1) получим следующий результат (ср. [5, теорема 3.5.2]).

Теорема 1. *Индекс вещественного подфактора совпадает с индексом обертывающего подфактора*

$$\dim_Q(L^2(R)) = \dim_{Q+iQ}(L^2(R+iR)), \quad \text{т.е.} \quad [R : Q] = [R+iR : Q+iQ].$$

Ясно, что комплексный фактор имеет большее количество вещественных W*-подалгебр, чем комплексных W*-подалгебр. В частности, сам (комплексный) фактор является вещественной W*-алгеброй. Рассмотрим это на примере. Пусть M — фактор типа I_6, т.е. $M \cong M_6(\mathbb{C}) \cong B(\mathbb{C}^6)$. Тогда M имеет, с точностью до изоморфизма, девять [1] (без учета прямых сумм) собственных вещественных W*-подалгебр, являющихся вещественными или комплексными подфакторами M: $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{H}$, $M_2(\mathbb{R})$, $M_2(\mathbb{C})$, $M_3(\mathbb{R})$, $M_3(\mathbb{C})$, $M_3(\mathbb{H})$ и $M_6(\mathbb{R})$, где $\mathbb{H}$ — тело кватернионов. Индексы вещественных W*-подалгебр вычисляются непосредственно:

$$\begin{aligned}
&[M_6(\mathbb{C}) : \mathbb{C}] = [M_6(\mathbb{R}) : \mathbb{R}] = [M_3(\mathbb{H}) : \mathbb{R}] = 36,\\
&[M_6(\mathbb{C}) : M_2(\mathbb{C})] = [M_6(\mathbb{R}) : M_2(\mathbb{R})] = [M_3(\mathbb{H}) : \mathbb{H}] = 9,\\
&[M_6(\mathbb{R}) : M_3(\mathbb{R})] = 4,\\
&[M_6(\mathbb{C}) : M_3(\mathbb{R})] = 2[M_6(\mathbb{R}) : M_3(\mathbb{R})] = 8,\\
&[M_6(\mathbb{C}) : \mathbb{H}] = 2[M_3(\mathbb{H}) : \mathbb{H}] = 18,\\
&[M_6(\mathbb{C}) : M_2(\mathbb{R})] = 2[M_6(\mathbb{R}) : M_2(\mathbb{R})] = 18.
\end{aligned}$$

Можно заметить, что в общем случае справедливо следующие формулы:

$$[M_n(\mathbb{R}) : M_m(\mathbb{R})] = (\frac{n}{m})^2, \quad [M_n(\mathbb{C}) : M_m(\mathbb{R})] = 2(\frac{n}{m})^2.$$

Используя теорему 1 и [1, теорема 1], мы получим следущую теорему (ср. [5, теорема 3.5.5]).

Теорема 2. *Пусть R — конечный вещественный фактор и Q — подфактор R. Тогда*

$$[R : Q] \in \left\{4\cos^2\frac{\pi}{q} \;:\; q \geqslant 3\right\} \cup [4, +\infty].$$

4. Индекс произвольного подфактора

Теперь обобщим понятие индекса для произвольной вещественной W*-алгебры. Сначала дадим определение расширенной положительной части $\hat{R}^+$ вещественной W*-алгебры R. Пусть $R^+{}_*$ — множество всех нормальных положительных линейных функционалов на R, которые равны нулю на кососимметричных элементах R.

[1] Заметим, что фактор M имеет ровно три (комплексных) подфакторов.

Тогда каждый такой функционал f единственным образом продолжается на $M = R+iR$ как $\overline{f}(a+ib):=f(a)$, поскольку $a+ib\geqslant 0$, $b=-b^*$ и $f(b)=0$. Причем $\overline{f}$ также нормален. Рассмотрим на $R^+{}_*$ множество $\hat{R}^+$ всех положительно-однородных аддитивных полунепрерывных снизу функций $m: R^+{}_* \to [0,+\infty]$. Вложим $\hat{R}^+$ в конус R^+, отождествляя произвольный элемент $a\in R^+$ с функцией m_a, где $m_a(f)=f(a)$, $\forall f\in R^+{}_*$. Если a — неограниченный самосопряженный положительный оператор с носителем e, присоединенный к R, то определим функцию m_a следующим образом:

$$m_a(f) = \sum f(\bar{e}_n a) + (+\infty) f(\mathbf{1} - e),$$

где f — произвольный функционал из $R^+{}_*$ и $\bar{e}_n = e_{[n-1,n]}$ — спектральные проекторы элемента a и $n\in\overline{1,\infty}$.

Определение 2. Множество $\hat{R}^+$ называется расширенной положительной частью алгебры R.

Из определения вытекает, что $\hat{R}^+\subset\hat{M}^+$. Верно следующая теорема:

Теорема 3 [7]. *Для любого $m \in \hat{R}^+$ существуют проектор $e \in R$ и положительный самосопряженный (но не необходимо ограниченный) оператор a на eH, присоединенный к R, такой, что $m = m_a$.*

Пусть R — вещественная W*-алгебра, $Q\subset R$ — вещественная W*-подалгебра. *Операторно-значным весом* на алгебре R со значением в $\hat{Q}$ (или, вкратце, *Q-значным весом*) называется линейное отображение $T: R^+\to\hat{Q}^+$ такое, что $T(yxy^*)=yT(x)y^*$, для всех $x\in R^+$ и $y\in Q$. Нормальность, точность и полуконечность для T определяются так же, как и для линейных функционалов. А именно, T называется

— *нормальным*, если $a_\gamma \nearrow a$ влечет за собой $T(a_\gamma)\nearrow T(a)$, для $(a_\gamma)\subset R^+$;

— *точным*, если $T(a^*a)=0$ влечет за собой $a=0$;

— *полуконечным*, если множество $\{a\in R: \|T(a^*a)\|<\infty\}$ ультраслабо плотно в R.

Множество точных полуконечных весов на R обозначим как $P(R)$, а множество нормальных точных полуконечных операторно-значных весов — как $P(R,Q)$. Известно [8, теорема 5.9], что

$$P(M,N) \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; P(N',M') \neq \emptyset, \tag{2}$$

где $M=R+iR$ и $N=Q+iQ$ — обертывающие W*-алгебры.

Это справедливо и в вещественном случае как результат следующей теоремы.

Теорема 4. $P(R,Q)\neq\emptyset \;\Leftrightarrow\; P(M,N)\neq\emptyset$.

Доказательство. Импликация ($\Rightarrow$) следует из [7, теорема 4.1] с применением (2). Докажем обратное утверждение. Пусть $T_1 : M^+ \to \hat{N}^+$ — точный нормалный полуконечный операторно-значный вес, т.е. $T_1 \in P(M,N)$. Рассмотрим отображение

$$T(x) = \frac{1}{2}(T_1(x) + \bar{\alpha}T_1(x)),$$

где α — инволютивный *-антиавтоморфизм M, порождающий R (т.е. $R = (M,\alpha)$), $\bar{\alpha}$ — продолжение α на $\hat{M}^+$. Так как $\bar{\alpha}T = T$, $R^+ \subset M^+$ и $\hat{Q}^+ \subset \hat{N}^+$, то для любого

$x \in R^+$ и $y = T(x) \in \hat{N}^+$ мы имеем

$$\bar{\alpha}(y) = \bar{\alpha}T(x) = T(x) = y = y^*,$$

т.е. $y \in \hat{Q}^+$. Кроме того, $T : R^+ \to \hat{Q}^+$. Из линейности T_1 вытекает линейность T. Если $y \in Q$, тогда в силу того, что $T_1(yxy^*) = yT_1(x)y^*$ и $\bar{\alpha}(y^*) = y$, мы получим

$$T(yxy^*) = \frac{1}{2}(yT_1(x)y^* + \bar{\alpha}(y^*)T_1(x)\bar{\alpha}(y)) = y(\frac{1}{2}(T_1(x) + \bar{\alpha}T_1(x)))y^* = yT(x)y^*.$$

Таким образом, отображение $T : R^+ \to \hat{Q}^+$ является операторно-значным весом.

Если $x_\gamma, x \in R^+ \subset M^+$ и $x_\gamma \nearrow x$, тогда из нормальности T_1 мы получим $T(x_\gamma) \nearrow T(x)$, т.е. T также является нормальным. Если $T(x^*x) = 0$, тогда $T_1(x^*x) = 0$. Следовательно, из точности T_1 следует точность T. Если $\|T(x^*x)\| < \infty$, то $\|T_1(x^*x)\| < \infty$, т.е. полуконечность T_1 влечет за собой полуконечность T.

Таким образом, отображение $T : R^+ \to \hat{Q}^+$ является точным, нормальным, полуконечным, операторно-значным весом, т.е. $T \in P(R, Q)$. Теорема 4 доказана. □

Следствие 1. $P(R,Q) \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; P(Q',R') \neq \emptyset$.

Определение 3. Пусть R — σ-конечный (т.е. число попарно ортогональных эквивалентных проекторов не более чем счетно) вещественный фактор и пусть $Q \subset R$ — подфактор. Положительное линейное отображение $E : R \to Q$ называется *условным ожиданием*, если выполняются следующие условия:

(i) $E(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;

(ii) $E(E(x)y) = E(x)E(y) = E(xE(y))$;

(iii) $E(x)^*E(x) \leqslant E(x^*x), \quad \forall x, y \in R$.

Пусть $E\colon R \to Q$ — нормальное условное ожидание. Продолжение E на W*-алгебру $M = R + iR$ мы обозначим как $\overline{E}$ (см. [7, теорема 1]). Так как отображение E является операторно-значным весом, то по следствию 1 ему соответствует некоторое отображение $E^{-1} \in P(Q', R')$. По доказательству теоремы 4 нетрудно заключить, что $\overline{E}^{-1} = \overline{E^{-1}}$. По определению отображение E имеем $\overline{E}(\mathbf{1}) = E(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Однако в общем случае, $\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) = E^{-1}(\mathbf{1}) \neq \mathbf{1}$. Легко увидеть, что для любых унитарных элементов $u \in R'$ и $v \in M'$ справедливо равенства

$$uE^{-1}(\mathbf{1})u^* = E^{-1}(u\mathbf{1}u^*) = E^{-1}(\mathbf{1}), \qquad v\overline{E}^{-1}(\mathbf{1})v^* = \overline{E}^{-1}(v\mathbf{1}v^*) = \overline{E}^{-1}(\mathbf{1}).$$

Отсюда $uE^{-1}(\mathbf{1}) = E^{-1}u$ и $v\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) = \overline{E}^{-1}(\mathbf{1})v$. Таким образом, элемент $E^{-1}(\mathbf{1}) = \overline{E}^{-1}(\mathbf{1})$ коммутирует произвольным унитарным элементом коммутанта алгебры. Так как всякий элемент алгебры порождается унитарными элементами, то $E^{-1}(\mathbf{1}) \in R'' = R$ и $\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) \in M'' = M$. Однако по определению отображение E^{-1} имеем $E^{-1}(\mathbf{1}) \in R'$ и $\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) \in M'$. Поэтому $\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) = E^{-1}(\mathbf{1}) \in Z = R \cap R' \subset M \cap M'$, т.е. $\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) = E^{-1}(\mathbf{1})$ – центральный элемент. Так как R и M – факторы, т.е. центр алгебры тривиален, то элемент $\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) = E^{-1}(\mathbf{1})$ скалярно кратен $\mathbf{1}$, т.е. $E^{-1}(\mathbf{1}) = \lambda\mathbf{1}$ (возможно, и $\lambda = +\infty$).

Определение 4. Скалярное число λ называется индексом вещественного подфактора Q на вещественном факторе R и обозначается $[R : Q]$ или $[(M,\alpha) : (N,\alpha)]$.

Из равенства $\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) = E^{-1}(\mathbf{1})$ следует следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 5. *Пусть R — σ-конечный вещественный фактор и пусть $Q \subset R$ — подфактор. Тогда $[R:Q] = [R+iR : Q+iQ]$.*

Отсюда, используя [2, теорема 5.4], получим вещественный аналог теоремы Косаки.

Следствие 2. *Пусть R — σ-конечный вещественный фактор и $Q \subset R$ — подфактор. Тогда $[R:Q] = 4\cos^2(\pi/q)$ $(q \geqslant 3)$ или $[R:Q] \geqslant 4$.*

5. W^*-подалгебры и их графы

Пусть теперь $A \subseteq B$ — конечномерные вещественные или комплексные W*-алгебры. Тогда $A \cong \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(F)$ и $B \cong \bigoplus_{j=1}^{l} M_{m_j}(F)$, где $F = \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$ — тело кватернионов). Положим $\overrightarrow{n} = (n_1, \ldots, n_k)$ и $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_l)$ и назовем их вектор-размерностями A и B соответственно. Определим элементы Λ_{ij} $k \times l$-матрицы Λ_A^B следующим образом: Λ_{ij} — число i-го слагаемого в представлении A в j-м слагаемом B (см. [1], [9], [10]). Продемонстрируем это на следующем примере.

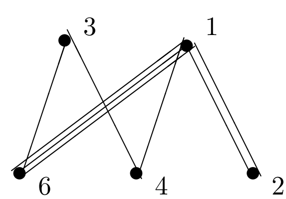
Пример 1. Пусть $M = M_6(\mathbb{C}) \bigoplus M_4(\mathbb{C}) \bigoplus M_2(\mathbb{C})$ и $N = M_3(\mathbb{C}) \bigoplus \mathbb{C}$. Вложение $N \subset M$ задаётся как

$$N \ni (x, y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x \in M_3(\mathbb{C}), y \in \mathbb{C} \right) \in M.$$

Так как слагаемые $M_3(\mathbb{C})$ и $\mathbb{C}$ в представлении N участвуют в первом слагаемом M один и три раза соответственно, то $\Lambda_{11} = 1$ и $\Lambda_{21} = 3$; а во втором слагаемом алгебры M они участвуют по одному разу, и поэтому $\Lambda_{12} = \Lambda_{22} = 1$. Аналогично вычисляются числа $\Lambda_{13} = 0$ и $\Lambda_{23} = 2$. Таким образом, это вложение имеет следующую матрицу:

$$\Lambda_N^M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

С помощью матрицы Λ_N^M построим граф следующим образом. Верхние и нижние вершины графа состоят из количества слагаемых в представлениях N и M соответственно. Они нумеруются по координатам векторов $\overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{m}$. Число рёбер, соединяющих две вершины, определяется числом Λ_{ij}. Например, так как $\Lambda_{11} = 1$, то число рёбер между верхней вершиной 3 и нижней вершиной 6 равно 1. Таким образом, матрице Λ_N^M соответствует граф



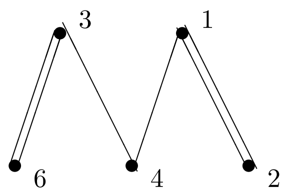
Легко увидеть, что указанное вложение не единственно, и, следовательно, матрица Λ_N^M и ее граф не единственны. В примере 1, можно выбрать ещё два вложения:

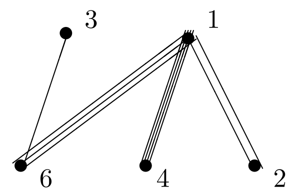
$$(x,y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x \in M_3(\mathbb{C}), y \in \mathbb{C} \right),$$

$$(x,y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x \in M_3(\mathbb{C}), y \in \mathbb{C} \right).$$

Тогда они имеют матрицы и графы

$$\Lambda_N^M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \Lambda_N^M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$





По аналогии рассмотрим примеры для вещественных W*-алгебр: $P \subset R$.

Пример 2. Пусть $R = M_8(\mathbb{R}) \bigoplus M_6(\mathbb{R}) \bigoplus M_3(\mathbb{R}) \bigoplus M_2(\mathbb{R})$ и $P = M_3(\mathbb{R}) \bigoplus M_2(\mathbb{R}) \bigoplus \mathbb{R}$. Рассмотрим два вложения $P \subset R$:

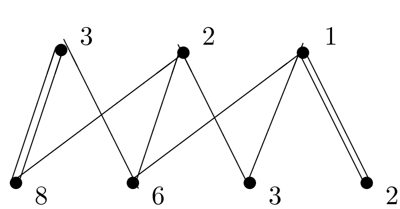
$$1)\ (x,y,z) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right),$$

$$2)\ (x,y,z) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} y \end{pmatrix} \right),$$

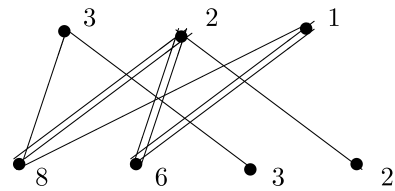
где $x \in M_3(\mathbb{R}), y \in M_2(\mathbb{R}), z \in \mathbb{R}$.

Для них матрицы и графы имеют вид

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



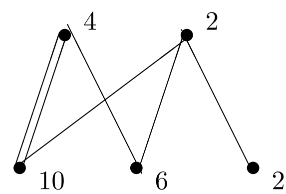
Пример 3. Пусть $R = M_5(\mathbb{H}) \bigoplus M_3(\mathbb{H}) \bigoplus \mathbb{H}$ и $P = M_2(\mathbb{H}) \bigoplus \mathbb{H}$. Вложения $P \subset R$, задаваемые как

$$1)\ (x,y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} y \end{pmatrix} : x \in M_3(\mathbb{H}), y \in \mathbb{H} \right),$$

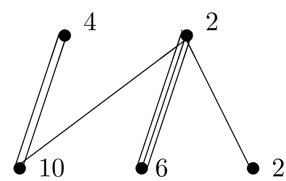
$$2)(x,y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} y \end{pmatrix} : x \in M_3(\mathbb{H}), y \in \mathbb{H} \right),$$

имеют матрицы и графы

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



Ясно, что разные вложения дают разные матрицы и графы.

Для пар $A \subseteq B$ — конечномерных вещественных или комплексных W*–алгебр матрица Λ_A^B обладает следующими свойствами:

1) $\overline{m} = \overline{n} \cdot \Lambda_A^B$;

2) $\Lambda_A^B = \Lambda_A^C \cdot \Lambda_C^B$, где W*-алгебра C содержит A и содержится в B;

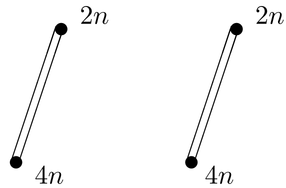
3) Если A и B — конечные комплексные W*-алгебры, то $[B:A] = \|\Lambda_A^B\|^2$ (ср. ниже следствие 3).

В качестве одного из приложений приведем теорему.

Теорема 6 [10]. *Пусть $N \subset M$ и $N_1 \subset M_1$ — пары конечномерных W*-алгебр, для которых имеются совпадающие графы. Тогда существует изоморфизм $\theta : M \to M_1$ с $\theta(N) = N_1$.*

Замечание 2. Теорема 6 неверна в вещественном случае. Это показывает пример 4.

Пример 4. Пусть $P_1 = M_n(\mathbb{H}) \subset R_1 = M_{2n}(\mathbb{H})$ и $P_2 = M_{2n}(\mathbb{R}) \subset R_2 = M_{4n}(\mathbb{R})$, $n \geqslant 1$. Рассмотрим графы этих пар:



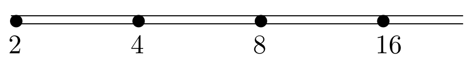
Очевидно, что графы одинаковы. Однако легко показать, что вещественные факторы R_1 и R_2 и вещественные подфакторы P_1 и P_2 не изоморфны.

В работе [10] теорема 6 обобщается следующим образом.

Теорема 7 [10]. *Пусть* $\mathbf{1} \in M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ *и* $\mathbf{1} \in N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \ldots$ *— две цепи матричных алгебр, для которых графы совпадают. Тогда существует изоморфизм* $\varphi : \bigcup_k M_k \to \bigcup_k N_k$ *такой, что* $\varphi(M_k) = N_k$ *для всех* k.

Замечание 3. Теорема 7 также неверна в вещественном случае, как показывает пример 5.

Пример 5. Пусть $\mathbf{1} \in M_2(\mathbb{R}) \subset M_4(\mathbb{R}) \subset M_8(\mathbb{R}) \subset M_{16}(\mathbb{R}) \subset \ldots$ и $\mathbf{1} \in \mathbb{H} \subset M_2(\mathbb{H}) \subset M_4(\mathbb{H}) \subset M_8(\mathbb{H}) \subset \ldots$ — две цепи матричных алгебр. Легко увидеть, что цепи имеют одинаковый граф



Тем не менее теорема 7 неверна, так как алгебры $M_{2n}(\mathbb{R})$ и $M_n(\mathbb{H})$ не изоморфны.

Теперь рассмотрим вектор-размерность $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_l)$ алгебры B. Отображение $\tau \to \overline{x}$ задает биекцию между множеством точных следов B и открытым симплексом $\triangle^k = \{\overline{x} = (x_1, \ldots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k : x_j > 0, \forall j$ и $\overline{m} \cdot \overline{x} = 1\}$, где $x_j = \tau(p_j)$ и p_j — минимальный проектор j-го слагаемого в представлении B. Пусть $e_A : L^2(B, \tau) \to L^2(A, \tau)$ — проектор, $E_A : B \to A$ — τ-инвариантное условное ожидание и $\langle B, e_A \rangle = \{B \cup \{e_A\}\}''$. В работе [9] показано, что след τ продолжается на W*-алгебру $\langle B, e_A \rangle$ таким образом, что $E_B(e_A) = \lambda \cdot \mathbf{1}$ (для некоторого λ) тогда и только тогда, когда $\Lambda^T \Lambda \overline{x} = \lambda^{-1} \overline{x}$. В этом случае: $\lambda^{-1} = \|\Lambda\|^2$. Такой след τ называется *марковским следом.* В [9] получено следующее необходимое и достаточное условия для существования единственного марковского следа.

Теорема 8 [9]. *Для пары* $A \subseteq B$ *существует единственный Марковский след тогда и только тогда, когда граф является связанным.*

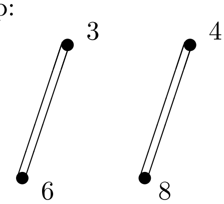
В приведенных выше примерах все графы являются связанными. Приведем примеры несвязанных графов.

Пример 6. Пусть $M=M_6(\mathbb{C})\bigoplus M_8(\mathbb{C})$ и $N=M_3(\mathbb{C})\bigoplus M_4(\mathbb{C})$. Легко увидеть, что подалгебру N можно вложить в M единственным образом:

$$(x,y)\mapsto\left(\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}\bigoplus\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & y\end{pmatrix} : x\in M_3(\mathbb{C}), y\in M_4(\mathbb{C})\right),$$

при этом вложение имеет такие матрицу и граф:

$$\Lambda_N^M=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

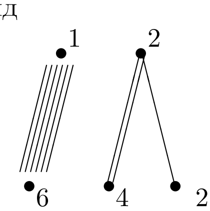


Пример 7. Пусть $R=M_6(\mathbb{R})\bigoplus M_2(\mathbb{H})\bigoplus\mathbb{H}$ и $P=\mathbb{R}\bigoplus\mathbb{H}$. Подалгебра P вкладывается в R единственным образом:

$$(x,y)\mapsto\left(\begin{pmatrix}x&0&0&0&0&0\\0&x&0&0&0&0\\0&0&x&0&0&0\\0&0&0&x&0&0\\0&0&0&0&x&0\\0&0&0&0&0&x\end{pmatrix}\bigoplus\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}\bigoplus\begin{pmatrix}\ y\ \end{pmatrix} : x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{H}\right),$$

Для этого вложения матрица и граф имеют вид

$$\Lambda_P^R=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$



Очевидно, что эти графы являются несвязанными. Теперь в примере 7 рассмотрим обертывающие W*-алгебры: $M=R+iR$ и $N=P+iP$. Тогда

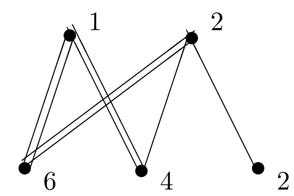
$$M=M_6(\mathbb{C})\bigoplus M_4(\mathbb{C})\bigoplus M_2(\mathbb{C}),\qquad N=\mathbb{C}\bigoplus M_2(\mathbb{C}).$$

Вложение $N\subset M$, задаваемое как

$$(x,y)\mapsto\left(\begin{pmatrix}x&0&0&0\\0&x&0&0\\0&0&y&0\\0&0&0&y\end{pmatrix}\bigoplus\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&y\end{pmatrix}\bigoplus\begin{pmatrix}\ y\ \end{pmatrix} : x\in\mathbb{C}, y\in M_2(\mathbb{C})\right),$$

имеет такие матрицу и граф:

$$\Lambda_N^M = \Lambda_{P+iP}^{R+iR} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Замечание 4. Очевидно, что в последнем примере граф является связанным. Этот пример интересен тем, что вещественная пара не имеет связанного графа, в то время как их обертывающая комплексная пара имеет связанный граф. Поэтому, по теореме 8, для пары $N \subset M$ существует единственный Марковский след τ, а для пары $P \subset R$ след не является Марковским. Из указанного примера видим, что матрицы Λ_P^R и Λ_{P+iP}^{R+iR} могут не совпадать, т.е. верно следующее

Следствие 3. *Для пар $P \subset R$ — вещественных W*-алгебр в общем случае верно неравенство*

$$\Lambda_P^R \neq \Lambda_{P+iP}^{R+iR}.$$

Как отмечалось выше, в комплексном случае верно равенство

$$[M : N] = \|\Lambda_N^M\|^2. \tag{3}$$

В силу действия теоремы 1 для вещественных факторов $P \subset R$ верно равенство $[R:P] = [R+iR:P+iP]$. Следовательно,

$$[R : P] = [R + iR : P + iP] = \|\Lambda_{P+iP}^{R+iR}\|^2 = \|\Lambda_P^R\|^2.$$

Однако для вышеприведенных матриц Λ_P^R и Λ_{P+iP}^{R+iR} справедливо соотношения $\|\Lambda_P^R\| = 6$ и $\|\Lambda_{P+iP}^{R+iR}\| \leqslant 4$. Отсюда вытекает следующий полезный результат для вещественных W*-подалгебр.

Следствие 4. *Для вещественных факторов $P \subset R$ всегда выполняется равенство*

$$[R : P] = \|\Lambda_P^R\|^2,$$

а в общем случае, т.е. когда по крайне мере один из вещественных W-алгебр не является фактором, то справедливо неравенство (ср. (3))*

$$[R : P] \neq \|\Lambda_P^R\|^2.$$

Авторы выражают глубокую признательность профессору Чилину Владимиру Ивановичу за полезные советы при работе над статьей.

Список литературы

[1] V. F. R. Jones, “Index for Subfactors”, *Inventiones Math.*, 1983, 1–25.

[2] H. Kosaki, “Extension of Jones’ Theory on index to arbitrary factors”, *J.Funct.Anal.*, 1986, 123–140.

[3] Sh. A. Ayupov, A. A. Rakhimov, Sh. M. Usmanov, *Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras*, v. 418, Kluw.Acad.Pub., MAIA, 1997, 235 pp.

[4] Bing-Ren Li, *Real operator algebras*, v. 1, World Sci. Pub. Co. Pte. Ltd., 2003, 241 pp.

[5] Sh. A. Ayupov, A. A. Rakhimov, *Real W*-algebras, Actions of groups and Index theory for real factors*, VDM Publishing House Ltd. Beau-Bassin, Mauritius, 2010, 138 pp.

[6] Sh. A. Ayupov, *Classification and representation of ordered Jordan algebras*, Fan, Tashkent, 1986.

[7] Ш. М. Усманов, "Условные ожидания на вещественных W*-алгебрах и JW-алгебрах", *Известия высших учебных заведений. Математика.*, **470**:7, (2001), 43–47.

[8] U. Haagerup, "Operator valued weights in von Neumann algebras I, II", *J. Funct. Anal.*, 1979, 175–206.

[9] V. F. R. Jones, V. S. Sunder, "Introduction to Subfactors", *Lon. Mat. Soc.*, **234**, (1997), 1–162.

[10] F.Goldman, P. de la. Harpe, V. F. R. Jones, *Coxeter graphs and towers of algebras*, v. 14, MSRI Publications, (Springer), New York, 1989.

Поступила в редакцию
14 октября 2019 г.

Rakhimov A. A., Boltaev X. X. Index of real subfactors of W*-algebras. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2020. V. 20. No 2. P. 234–246.

ABSTRACT

The index of a real subfactor is defined and the set of possible values of index is found. It is proved, that some properties of an index truly also in a real case, and properties which are not true for real subfactors are shown. By means of examples for each pair C*-algebras $N \subset M$ schemes of construction of graph are given.

Key words: *real subfactors, index of real subfactors, graphs.*