Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20. № 2. С. 247–254

УДК 517.583+512.742.72
MSC2010 33E05

© М. А. Романов[1]

О максимальных степенях коэффициентов последовательностей Сомоса

Элементы последовательностей Сомос-4, 5, 6, 7 являются полиномами от коэффициентов. В работе вычисляются степени этих полиномов.

Ключевые слова: *последовательности Сомоса, тропические последовательности.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202025

Введение

Пусть $k \geqslant 2$ — натуральное и

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k/2\}, \quad \boldsymbol{x} = \{x_j \mid -k/2 < j \leqslant k/2\}$$

— два множества независимых формальных переменных в количестве $[k/2]$ в первом случае и k — во втором. Последовательность Сомос-k, $S_k(n) = S_k(n; \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{x})$ $(n \in \mathbb{Z})$, определяется рекуррентным соотношением

$$S_k(n+[(k+1)/2])S_k(n-[k/2]) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k/2} \alpha_i S_k(n+[(k+1)/2]-i)S_k(n-[k/2]+i) \quad (1)$$

и начальными значениями $S_k(j) = x_j$.

При $k=2$

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1\}, \quad \boldsymbol{x} = \{x_0, x_1\}, \quad S_2(n+1)S_2(n-1) = \alpha_1 S_2^2(n),$$

а при $k=3$

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1\}, \quad \boldsymbol{x} = \{x_{-1}, x_0, x_1\}, \quad S_3(n+2)S_3(n-1) = \alpha_1 S_3(n+1)S_3(n).$$

С помощью метода математической индукции по n легко показать, что

$$S_2(n) = \alpha_1^{n(n-1)/2} x_0^{1-n} x_1^n,$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: `romanov@iam.khv.ru`

$$S_3(n) = \begin{cases} \alpha_1^{(n/2)^2} x_{-1}^{-n/2} x_0 x_1^{n/2}, \text{ если } n \text{ — чётное} \\ \alpha_1^{(n^2-1)/4} x_{-1}^{(1-n)/2} x_1^{(1+n)/2}, \text{ если } n \text{ — нечётное.} \end{cases}$$

При $k \geqslant 4$ ситуация сложнее. Известно (см. [1] и [2]), что для $4 \leqslant k \leqslant 7$

$$S_k(n;\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{x}) \in \mathbb{Z}[\ldots,\alpha_i,\ldots;\ldots,x_j^{\pm 1},\ldots].$$

Мы будем рассматривать $S_k(n) = S_k(n;\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{x})$ как полином от переменных $\alpha_1,\ldots,\alpha_{[k/2]}$. Пусть $d_k^{(i)}(n)$ — наибольшая степень переменной α_i в $S_k(n)$, а $d_k(n) = \deg S_k(n)$ — степень полинома $S_k(n)$. В данной работе мы вычисляем последовательности $d_k^{(i)}(n)$ и $d_k(n)$ при $k = 4,5,6,7$. Результаты сформулированы в следующей теореме.

Теорема. *Для любого целого n*

$$d_4^{(1)}(n) = d_4(n) = \frac{1}{6}n(n-1) + \lambda_4^{(1)}(n), \quad d_4^{(2)}(n) = \frac{1}{7}n(n-1) + \lambda_4^{(2)}(n),$$

где

$$\lambda_4^{(1)}(n+3) = \lambda_4^{(1)}(n), \quad \lambda_4^{(2)}(n+7) = \lambda_4^{(2)}(n)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$. Значения последовательностей $\lambda_4^{(i)}(n)$ приведены в таблице 1.

$$d_5^{(1)}(n) = d_5(n) = \frac{1}{8}n^2 + \lambda_5^{(1)}(n), \quad d_5^{(2)}(n) = \frac{1}{12}n^2 + \lambda_5^{(2)}(n),$$

где

$$\lambda_5^{(1)}(n+4) = \lambda_5^{(1)}(n), \quad \lambda_5^{(2)}(n+6) = \lambda_5^{(2)}(n)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$. Значения последовательностей $\lambda_5^{(i)}(n)$ приведены в таблице 2.

$$d_6^{(1)}(n) = d_6(n) = \frac{1}{10}n(n-1) + \lambda_6^{(1)}(n), \quad d_6^{(2)}(n) = \frac{2}{29}n(n-1) + \lambda_6^{(2)}(n),$$
$$d_6^{(3)}(n) = \frac{1}{16}n(n-1) + \lambda_6^{(3)}(n),$$

где

$$\lambda_6^{(1)}(n+5) = \lambda_6^{(1)}(n), \quad \lambda_6^{(2)}(n+29) = \lambda_6^{(2)}(n), \quad \lambda_6^{(3)}(n+16) = \lambda_6^{(3)}(n)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$. Значения последовательностей $\lambda_6^{(i)}(n)$ приведены в таблице 3.

$$d_7^{(1)}(n) = d_7(n) = \frac{1}{12}n^2 + \lambda_7^{(1)}(n), \quad d_7^{(2)}(n) = \frac{1}{20}n^2 + \lambda_7^{(2)}(n),$$
$$d_7^{(3)}(n) = \frac{1}{24}n^2 + \lambda_7^{(3)}(n),$$

где

$$\lambda_7^{(1)}(n+6) = \lambda_7^{(1)}(n), \quad \lambda_7^{(2)}(n+10) = \lambda_7^{(2)}(n), \quad \lambda_7^{(3)}(n+12) = \lambda_7^{(3)}(n)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$. Значения последовательностей $\lambda_7^{(i)}(n)$ приведены в таблице 4.

Автор выражает благодарность В.А. Быковскому за постановку задачи.

1. Тропические последовательности

Положим

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Из равенства (1) следует, что последовательность $d_k^{(i)}(n)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} d_k^{(i)}(n + [(k+1)/2]) + d_k^{(i)}(n - [k/2]) = \\ = \max_{1 \leqslant j \leqslant k/2} \{\delta_{ij} + d_k^{(i)}(n + [(k+1)/2] - j) + d_k^{(i)}(n - [k/2] + j)\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что $d_k(n) = \deg S_k(n; \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{x})$ с $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{[k/2]}$. Поэтому $d_k(n)$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} d_k(n + [(k+1)/2]) + d_k(n - [k/2]) = \\ = 1 + \max_{1 \leqslant j \leqslant k/2} \{d_k(n + [(k+1)/2] - j) + d_k(n - [k/2] + j)\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Последовательности $d_k^{(i)}(n)$ $(i = 1, \ldots, [k/2])$ и $d_k(n)$ задаются начальными значениями

$$d_k^{(i)}(j) = d_k(j) = 0 \quad (-k/2 < j \leqslant k/2). \tag{4}$$

При $k = 2$ соотношение (2) имеет вид

$$d_2^{(1)}(n+1) + d_2^{(1)}(n-1) = 1 + 2d_2^{(1)}(n),$$

поэтому

$$d_2^{(1)}(n) = d_2(n) = \frac{n(n-1)}{2},$$

что согласуется с явной формулой для $S_2(n)$ из введения.

При $k = 3$

$$d_3^{(1)}(n+2) + d_3^{(1)}(n-1) = 1 + d_3^{(1)}(n+1) + d_3^{(1)}(n).$$

Следовательно,

$$d_3^{(1)}(n) = d_3(n) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{(-1)^n - 1}{8},$$

что соответствует формуле для $S_3(n)$ из введения.

1.1. Сомос-4

При $k = 4$ соотношения (2) и (3) имеют вид

$$d_4^{(i)}(n+2) + d_4^{(i)}(n-2) = \max\{\delta_{i1} + d_4^{(i)}(n+1) + d_4^{(i)}(n-1), \delta_{i2} + 2d_4^{(i)}(n)\} \quad (i = 1, 2)$$

и

$$d_4(n+2) + d_4(n-2) = 1 + \max\{d_4(n+1) + d_4(n-1), 2d_4(n)\} \quad (i = 1, 2)$$

соответственно. С помощью замен (разность второго порядка)

$$h_4^{(i)}(n) = \Delta^2 d_4^{(i)}(n) = d_4^{(i)}(n+2) - 2d_4^{(i)}(n+1) + d_4^{(i)}(n),$$
$$h_4(n) = \Delta^2 d_4(n)$$

они приводятся к виду

$$\begin{aligned} h_4^{(i)}(n) + 2h_4^{(i)}(n-1) + h_4^{(i)}(n-2) &= \max\{\delta_{i1} + h_4(n-1), \delta_{i2}\}, \\ h_4(n) + 2h_4(n-1) + h_4(n-2) &= 1 + \max\{h_4(n-1), 0\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Вычисляя $h_4^{(i)}(n)$ при начальных значениях $h_4^{(i)}(-1) = h_4^{(i)}(0) = 0$, получим следующую таблицу.

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$h_4^{(1)}(n)$	0	0	1	0	0	1	0	0	1
$h_4^{(2)}(n)$	0	0	1	-1	2	-1	1	0	0

Так как $h_4^{(i)}(n)$ однозначно определяется двумя последовательными значениями, то для любого целого n

$$h_4^{(1)}(n+3) = h_4^{(1)}(n), \quad h_4^{(2)}(n+7) = h_4^{(2)}(n).$$

Отсюда следует, что

$$d_4^{(1)}(n) = \frac{1}{6}n(n-1) + \lambda_4^{(1)}(n), \quad \lambda_4^{(1)}(n+3) = \lambda_4^{(1)}(n),$$
$$d_4^{(2)}(n) = \frac{1}{7}n(n-1) + \lambda_4^{(2)}(n), \quad \lambda_4^{(2)}(n+7) = \lambda_4^{(2)}(n)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$. Значения последовательностей $\lambda_4^{(i)}(n)$ приведены в следующей таблице.

Таблица 1. Значения $3\lambda_4^{(1)}(n)$ и $7\lambda_4^{(2)}(n)$.

n	-1	0	1	2	3	4	5
$3\lambda_4^{(1)}(n)$	-1	0	0	-1	0	0	-1
$7\lambda_4^{(2)}(n)$	-2	0	0	-2	1	-5	1

При начальных значениях (4)

$$h_4^{(1)}(-1) = h_4(-1) = h_4^{(1)}(0) = h_4(0) = 0.$$

Поскольку $h_4^{(1)}(n) \geqslant 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, то

$$1 + \max\{h_4^{(1)}(n), 0\} = \max\{1 + h_4^{(1)}(n), 0\} = 1 + h_4^{(1)}(n).$$

Поэтому из соотношений (5) при $i = 1$ следует, что для всех $n \in \mathbb{Z}$

$$h_4(n) = h_4^{(1)}(n).$$

Из этого равенства, принимая во внимание (4), получаем, что $d_4(n) = d_4^{(1)}(n)$ для всех целых n. Таким же способом доказывается, что $d_k(n) = d_k^{(1)}(n)$ для $k = 5,6,7$.

1.2. Сомос-5

Для $k=5$

$$d_5^{(i)}(n+3)+d_5^{(i)}(n-2)=$$
$$=\max\{\delta_{i1}+d_5^{(i)}(n+2)+d_5^{(i)}(n-1),\delta_{i2}+d_5^{(i)}(n+1)+d_5^{(i)}(n)\}\quad (i=1,2),$$
$$h_5^{(i)}(n)=\Delta^2 d_5^{(i)}(n),$$
$$h_5^{(i)}(n+1)+2h_5^{(i)}(n)+2h_5^{(i)}(n-1)+h_5^{(i)}(n-2)=\max\{\delta_{i1}+h_5^{(i)}(n)+h_5^{(i)}(n-1),\delta_{i2}\}.$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$h_5^{(1)}(n)$	0	0	0	1	0	0	0	1	0
$h_5^{(2)}(n)$	0	0	0	1	-1	1	0	0	0

$$h_5^{(1)}(n+4)=h_5^{(1)}(n),\quad h_5^{(2)}(n+6)=h_5^{(2)}(n),$$
$$d_5^{(1)}(n)=d_5(n)=\frac{1}{8}n^2+\lambda_5^{(1)}(n),\quad \lambda_5^{(1)}(n+4)=\lambda_5^{(1)}(n),$$
$$d_5^{(2)}(n)=\frac{1}{12}n^2+\lambda_5^{(2)}(n),\quad \lambda_5^{(2)}(n+6)=\lambda_5^{(2)}(n).$$

Таблица 2. Значения $8\lambda_5^{(1)}(n)$ и $12\lambda_5^{(2)}(n)$.

n	-2	-1	0	1	2	3
$8\lambda_5^{(1)}(n)$	-4	-1	0	-1	-4	-1
$12\lambda_5^{(2)}(n)$	-4	-1	0	-1	-4	3

1.3. Сомос-6

Для $k=6$ соотношение (2) принимает вид

$$d_6^{(i)}(n+3)+d_6^{(i)}(n-3)=$$
$$=\max\{\delta_{i1}+d_6^{(i)}(n+2)+d_6^{(i)}(n-2),\delta_{i2}+d_6^{(i)}(n+1)+d_6^{(i)}(n-1),\delta_{i3}+2d_6^{(i)}(n)\},$$

и поэтому

$$h_6^{(i)}(n+1)+2h_6^{(i)}(n)+3h_6^{(i)}(n-1)+2h_6^{(i)}(n-2)+h_6^{(i)}(n-3)=$$
$$=\max\{\delta_{i1}+h_6^{(i)}(n)+2h_6^{(i)}(n-1)+h_6^{(i)}(n-2),\delta_{i2}+h_6^{(i)}(n-1),\delta_{i3}\},$$

где

$$h_6^{(i)}(n)=\Delta^2 d_6^{(i)}(n)\quad (i=1,2,3).$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$h_6^{(1)}(n)$	0	0	0	0	1	0	0	0	0

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$h_6^{(2)}(n)$	0	0	0	0	1	-1	1	-1	2	-1	0
n	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$h_6^{(2)}(n)$	0	1	0	-1	1	0	1	-1	0	1	0
n	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$h_6^{(2)}(n)$	0	-1	2	-1	1	-1	1	0	0	0	0

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$h_6^{(3)}(n)$	0	0	0	0	1	-1	0	2	-2	1
n	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$h_6^{(3)}(n)$	1	-2	2	0	-1	1	0	0	0	0

$$h_6^{(1)}(n+5) = h_6^{(1)}(n), \quad h_6^{(2)}(n+29) = h_6^{(2)}(n), \quad h_6^{(3)}(n+16) = h_6^{(3)}(n),$$

$$d_6^{(1)}(n) = d_6(n) = \frac{1}{10}n(n-1) + \lambda_6^{(1)}(n), \quad \lambda_6^{(1)}(n+5) = \lambda_6^{(1)}(n),$$

$$d_6^{(2)}(n) = \frac{2}{29}n(n-1) + \lambda_6^{(2)}(n), \quad \lambda_6^{(2)}(n+29) = \lambda_6^{(2)}(n),$$

$$d_6^{(3)}(n) = \frac{1}{16}n(n-1) + \lambda_6^{(3)}(n), \quad \lambda_6^{(3)}(n+16) = \lambda_6^{(3)}(n).$$

Таблица 3. Значения $5\lambda_6^{(1)}(n)$, $29\lambda_6^{(2)}(n)$ и $8\lambda_6^{(3)}(n)$.

n	-2	-1	0	1	2
$5\lambda_6^{(1)}(n)$	-3	-1	0	0	-1

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$29\lambda_6^{(2)}(n)$	-12	-4	0	0	-4	-12	5	-11	-2	-26
n	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$29\lambda_6^{(2)}(n)$	4	1	-6	-17	-3	7	-16	-14	-16	7
n	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
$29\lambda_6^{(2)}(n)$	-3	-17	-6	1	4	-26	-2	-11	5	

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$8\lambda_6^{(3)}(n)$	-3	-1	0	0	-1	-3	2	-2
n	6	7	8	9	10	11	12	13
$8\lambda_6^{(3)}(n)$	-7	3	-4	-4	3	-7	-2	2

1.4. Сомос-7

Для $k=7$

$$d_7^{(i)}(n+4)+d_7^{(i)}(n-3)=$$
$$=\max\{\delta_{i1}+d_7^{(i)}(n+3)+d_7^{(i)}(n-2),\delta_{i2}+d_7^{(i)}(n+2)+d_7^{(i)}(n-1),$$
$$\delta_{i3}+d_7^{(i)}(n+1)+d_7^{(i)}(n)\}.$$

Следовательно,

$$h_7^{(i)}(n+2)+2h_7^{(i)}(n+1)+3h_7^{(i)}(n)+3h_7^{(i)}(n-1)+2h_7^{(i)}(n-2)+h_7^{(i)}(n-3)=$$
$$=\max\{\delta_{i1}+h_7^{(i)}(n+1)+2h_7^{(i)}(n)+2h_7^{(i)}(n-1)+h_7^{(i)}(n-2),$$
$$\delta_{i2}+h_7^{(i)}(n)+h_7^{(i)}(n-1),\delta_{i3}\},$$

где

$$h_7^{(i)}(n)=\Delta^2 d_7^{(i)}(n)\quad (i=1,2,3).$$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$h_7^{(1)}(n)$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$h_7^{(2)}(n)$	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1	1	0	0	0	0	0

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$h_7^{(3)}(n)$	0	0	0	0	0	1	-1	0	1	0	-1	1	0	0	0	0	0

$$h_7^{(1)}(n+6)=h_7^{(1)}(n),\quad h_7^{(2)}(n+10)=h_7^{(2)}(n),\quad h_7^{(3)}(n+12)=h_7^{(3)}(n),$$
$$d_7^{(1)}(n)=d_7(n)=\frac{1}{12}n^2+\lambda_7^{(1)}(n),\quad \lambda_7^{(1)}(n+6)=\lambda_7^{(1)}(n),$$
$$d_7^{(2)}(n)=\frac{1}{20}n^2+\lambda_7^{(2)}(n),\quad \lambda_7^{(2)}(n+10)=\lambda_7^{(2)}(n),$$
$$d_7^{(3)}(n)=\frac{1}{24}n^2+\lambda_7^{(3)}(n),\quad \lambda_7^{(3)}(n+12)=\lambda_7^{(3)}(n).$$

Таблица 4. Значения $12\lambda_7^{(1)}(n)$, $20\lambda_7^{(2)}(n)$ и $24\lambda_7^{(3)}(n)$.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$12\lambda_7^{(1)}(n)$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-4	-1	0	-1	-4
$20\lambda_7^{(2)}(n)$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	4	-5	4	-9	-4
$24\lambda_7^{(3)}(n)$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	8	-1	-12	-1	8

Список литературы

[1] S. Fomin and A. Zelevinsky, “The Laurent Phenomenon”, *Adv. Appl. Math.*, **28**, (2002), 119–144.

[2] R. Robinson, “Periodicity of Somos sequences”, *Proceedings of the AMS*, **116**:3, (1992), 613–619.

Поступила в редакцию
27 октября 2020 г.

Romanov M. A. On the maximum degrees of the coefficients of the Somos sequences. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2020. V. 20. No 2. P. 247–254.

ABSTRACT

Elements of the Somos-4, 5, 6, 7 sequences are polynomials in the coefficients. In the paper, we calculate the degrees of these polynomials.

Key words: *Somos sequences, tropical sequences.*