*Дальневосточный математический журнал.* 2020. Т. 20. № 2. С. 267–270

УДК 519.178
MSC2010 68R10

© Г. Ш. Цициашвили[1]

# Вычислительная сложность оптимального блокирования вершин в орграфе

В настоящей работе решена задача определения минимального набора ребер, удаление которых из орграфа разрывает все пути, проходящие через выделенное множество вершин. Эта задача сведена к задаче о минимальном разрезе и максимальном потоке в двухполюснике. Предложены способы декомпозиции орграфа, уменьшающие вычислительную сложность алгоритма решения данной задачи.

**Ключевые слова:** *орграф, теорема Форда – Фалкерсона, оптимальное блокирование, вычислительная сложность.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202027

## Введение

Рассматривается ориентированный граф (орграф) $G$ с конечными множествами вершин $U$ и ребер $V$. В множестве вершин $U$ выделено некоторое подмножество $U_1$. Требуется в множестве ребер $V$ выделить такое подмножество ребер, удаление которых разрывает все пути, проходящие через множество вершин $U_1$, и число ребер в котором минимально. Эта задача была поставлена В. П. Булгаковым с целью локализовать в белковой сети пораженные белки, перекрывая пути прохождения сигналов через них. Предполагалось, что минимизация числа удаляемых ребер наименьшим образом деформирует белковую сеть.

Широко распространенные сейчас меры изоляции в различных коммуникационных сетях: транспортных, экономических, медицинских, образовательных и др. расширяют сферу применения данной биотехнологической задачи. Требуются экономные алгоритмы ее решения. В свою очередь, при неправильной постановке эта задача легко может стать NP-задачей. В настоящей работе данная задача оптимизации ставится так, чтобы ее можно было свести к задаче о поиске минимального разреза и максимального потока в двухполюснике [1, 2] алгоритмами, имеющими степенную сложность. Приводятся различные способы декомпозиции орграфа, уменьшающие вычислительную сложность этой задачи.

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690550, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: guram@iam.dvo.ru

## 1. Преобразование задачи блокирования вершин в задачу о минимальном разрезе

Обозначим $V_1 \subseteq V$ множество всех ребер орграфа $G$, соединяющих вершины множества $U_1$. Тогда множество вершин $U_1$ и множество ребер $V_1$ образуют подграф $G_1$ в орграфе $G$. Пусть $U_1' \subseteq U_1$ — множество (входных) вершин, в которые входят ребра из множества $U \setminus U_1$, и $U_1'' \subseteq U_1$ — множество (выходных) вершин, из которых выходят ребра в множество $U \setminus U_1$. Назовем путь, начинающийся ребром из множества $U \setminus U_1$ в множество $U_1'$, проходящий через множество $U_1$ и заканчивающийся ребром из множества $U_1''$ в множество $U \setminus U_1$, путем, проходящим через множество вершин $U_1$ в орграфе $G$.

Обозначим $V_1'$ (обозначим $V_1''$) множество ребер, идущих из множества вершин $U \setminus U_1$ в множество вершин $U_1$ (множество ребер из $U_1$ в $U \setminus U_1$). Нашей задачей является выделение в множестве ребер $V_1' \cup V_1''$ минимального по числу ребер подмножества $V_2' \cup V_2''$, $V_2' \subseteq V_1'$, $V_2'' \subseteq V_1''$, удаление которых из орграфа $G$ приводит к разрыву всех путей, проходящих через множество вершин $U_1$.

Следуя [3], построим двудольный орграф $G_2$ с множествами входных и выходных вершин $U_1', U_1''$ и ребер, идущих из множества $U_1'$ в множество $U_1''$. Если $u_1' \in U_1'$, $u_1'' \in U_1''$, и в орграфе $G_1$ существует путь из вершины $u_1'$ в вершину $u_1''$, то в двудольном орграфе $G_2$ эти вершины соединены ребром $(u_1', u_1'')$. Преобразуем двудольный орграф $G_2$ в двухполюсник $G_3$ введением в $G_2$ источника $s$, стока $t$ и ребер $(s, u_1')$, $(u_1'', t)$, $u_1' \in U_1'$, $u_1'' \in U_1''$. Определим теперь веса ребер двухполюсника $G_3$, полагая $n(s, u_1')$ число ребер множества $V_1'$, входящих в вершину $u_1'$, и $n(u_1'', t)$ — число ребер множества $V_1''$, выходящих из вершины $u_1''$. В свою очередь, вес ребра $(u_1', u_1'') \in G_3$ задается равенством $n(u_1', u_1'') = n(s, u_1') + 1$.

Определим теперь минимальный разрез в двухполюснике $G_3$. Пусть $f$ — максимальный поток в двухполюснике $G_3$. Из определения весов ребер в $G_3$ следует, что ребро вида $(u_1', u_1'')$, $u_1' \in U_1'$, $u_1'' \in U_1''$ не может быть нагруженным, т.к. $n(u_1', u_1'') > n(s, u_1') \geqslant f(s, u_1')$. Поэтому из теоремы Форда–Фалкерсона следует, что минимальный разрез состоит только из нагруженных ребер, т.е. из некоторых ребер вида $(s, u_1')$, $(u_1'', t)$, $u_1' \in U_1'$, $u_1'' \in U_1''$.

Таким образом, нашей задачей является нахождение максимального потока в двухполюснике $G_3$ и определение минимального разреза по заданному максимальному потоку $f$. Для этого можно воспользоваться следующим алгоритмом Форда–Фалкерсона, основанным на построении в множестве $U_3 = \{s, t, U_1\}$ вершин двухполюсника $G_3$ подмножества $X$, $s \in X$, $t \notin X$ и его дополнения $U_3 \setminus X$ такого, что минимальный разрез строится рекуррентно по следующим правилам. На первом шаге полагается $s \in X$, далее, если $x \in X$, $f(x,y) < n(x,y)$, то $y \in X$, если $f(y,x) > 0$, то $y \in X$. Таким образом, все ребра $(x,y)$, попадающие в минимальный разрез, являются насыщенными, т.е. $f(x,y) = n(x,y)$.

Известные алгоритмы нахождения максимального потока основаны на поиске дополняющего пути, увеличивающего уже найденный поток. Наиболее употребляющимися алгоритмами являются алгоритмы Эдмонса–Карпа [4] и Диница [5], отличающиеся способом нахождения дополняющего пути. В частности, в алгоритме

Эдмондса – Карпа выбирается кратчайший дополняющий путь. Если $N$ — число вершин, а $M$ — число ребер в двухполюснике $G_3$, то вычислительная сложность для алгоритма Эдмондса – Карпа равна $O(NM^2)$ и $O(N^2M)$ — для алгоритма Диница. В свою очередь, сложность алгоритма нахождения множества $X$ по найденному потоку $f$ равна $O(N^2)$.

## 2. Основные способы уменьшения вычислительной сложности

Рассмотрим приемы уменьшения размерности в задаче поиска минимального разреза в двухполюснике $G_3$. Скажем, что вершины $p,q \in U_1$ орграфа $G_1$ циклически эквивалентны, если они входят в какой-либо цикл, содержащийся в $G_1$. На множестве классов циклической эквивалентности (кластеров) определим отношение частичного порядка $v \succeq w$, если в $G_1$ существует путь из кластера $v$ в кластер $w$. Из этого определения следует, что существование пути из кластера $v$ в кластер $u$ эквивалентно существованию пути из любой вершины кластера $u$ в любую вершину кластера $v$. Определим ноль-один матрицу $a = ||a(v,u)||$ на множестве кластеров из условия $a(v,u) = 1$, если $v \succeq u$.

Назовем кластер входным (выходным), если он содержит входную (выходную) вершину. Число ребер, входящих из множества $U \setminus U_1$ во входной кластер $u$ равно сумме $\sum\limits_{p \in u} n(p)$, аналогичное равенство справедливо для числа ребер, выходящих из выходного кластера в множество $U \setminus U_1$. Отсюда следует, что перед преобразованием $G_1 \to G_2$ можно провести кластеризацию орграфа $G_1$, уменьшающую число вершин в двудольном орграфе $G_2$, и значит, уменьшающую вычислительную сложность. В работе [6] изложен быстрый алгоритм кластеризации орграфа, основанный на последовательном включении в него вершин и связанных с ними ребер.

Второй способ уменьшения вычислительной сложности основан на декомпозиции двудольного орграфа. Удалим в двудольном орграфе $G_2$ ориентацию ребер, преобразуя его в неориентированный граф. Выделим в полученном неориентированном графе компоненты связности и восстановим в каждой компоненте связности ориентацию ребер. В результате получим несколько двудольных орграфов, не соединенных между ребрами. Причем в каждом выделенном так двудольном орграфе выходной кластер соединен ребрами со всеми входными кластерами и, наоборот, каждый входной кластер соединен ребрами со всеми выходными кластерами исходного орграфа.

Теперь к каждому из выделенных такой декомпозицией двудольных орграфов можно присоединить отдельные источник и сток и найти минимальный разрез. В результате вычислительная сложность задачи оптимального блокирования ребер уменьшится.

## Список литературы

[1] L. R. Ford, D. R. Fulkerson, “Maximal Flow Through a Network”, *Canadian Journal of Mathematics*, **8**, (1956), 399–404.

[2] L. R. Ford, D. R. Fulkerson, “Algorithm for Finding Maximal Network Flows and an Application to the Hitchcock Problem”, *Canadian Journal of Mathematics*, **9**, (1957), 210—218.

[3] G. Sh. Tsitsiashvili, “Optimal blocking of undesired nodes in digraph”, *Annals of Biostatistics and Biometric Applications*, **4**:1, (2020).

[4] J. Edmonds and R. M. Karp, “Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems”, *Journal of the ACM*, **19**:2, (1972), 248—264.

[5] E. A. Dinits, “Algorithm for solving the problem of maximum flow in the network with power estimation”, *Reports of the USSR Academy of Sciences (In Russian)*, **194**:4, (1970), 754—757.

[6] G. Sh. Tsitsiashvili, “Sequential algorithms of graph nodes factorization”, *Reliability: Theory and Applications*, **8**:4, (2013), 30–33.

Поступила в редакцию
11 августа 2020 г.

Исследование выполнено при финансовой ПФИ ДВО РАН “Дальний Восток” (проект № 15-I-4-047).

*Tsitsiashvili G. Sh.* The computational complexity of optimal blocking of vertices in the digraph. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2020. V. 20. No 2. P. 267–270.

ABSTRACT

In this paper, we solve the problem of determining the minimum set of edges, whose removal from the digraph breaks all paths, that pass through the selected set of vertices. This problem is reduced to the problem of the minimum section and maximum flow in a bipolar junction. Methods of digraph decomposition that reduce its computational complexity are proposed.

Key words: *digraph, Ford-Fulkerson Theorem, optimal blocking, computational complexity.*