Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20. № 2. С. 271–275

УДК 511.31
MSC2010 11B39

© А. В. Шутов[1]

Об одной сумме, связанной с системой счисления Фибоначчи

В работе получена асимптотическая формула для суммы $S(X) = \sum\limits_{n<X} \varepsilon(n)\varepsilon(n+$ $+\,1)$, где $\varepsilon(n)$ принимает значение $+1$ или $-\,1$ в зависимости от четности разложения суммы цифр n в систему счисления Фибоначчи.

Ключевые слова: *система счисления Фибоначчи, сумма цифр.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202028

Введение

Пусть $\{F_k\}$: $F_1=1,\ F_2=1,\ F_{k+2}=F_{k+1}+F_k$ — последовательность чисел Фибоначчи. Хорошо известно, что каждое натуральное n имеет разложение [3]

$$n = \sum_{k\,=\,2}^{\infty} f_k(n) F_k,$$

где $f_k(n)\in\{0,1\}$, $f_k(n)f_{k+1}(n)=0$, и $f_k(n)=0$ для $k>k_0(n)$. Мы будем называть данное разложение представлением n в системе счисления Фибоначчи.

Определим множества

$$\mathbb{F}_0 = \{n : n\in\mathbb{N}, \sum_{k\,=\,2}^{\infty} f_k(n) \equiv 0 \pmod 2\},$$

$$\mathbb{F}_1 = \mathbb{N}\setminus\mathbb{F}_0,$$

то есть множества натуральных чисел с четной и нечетной суммой цифр представления в системе счисления Фибоначчи.

Пусть

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} \ \ 1, & n\in\mathbb{F}_0 \\ -\,1, & n\in\mathbb{F}_1 \end{cases}.$$

[1] Владимирский государственный университет, 600000, г. Владимир, ул. Горького, 87. Электронная почта: `a1981@mail.ru`

Ясно, что

$$\varepsilon(n) = (-1)^{\sum\limits_{k=2}^{\infty} f_k(n)}.$$

Рассмотрим сумму

$$S(X) = \sum_{n<X} \varepsilon(n)\varepsilon(n+1).$$

Теорема 1. *Справедлива асимптотическая формула*

$$S(X) = \frac{2\sqrt{5}-5}{5}X + O(\log X).$$

Данная теорема впервые была доказана в работе [2]. Доказательство было основано на сведении вычисления асимптотики $S(X)$ к изучению суммы $S^*(n)=S(F_n)$, а также на получении явного линейного рекуррентного соотношения для сумм $S^*(n)$.

В настоящей работе мы даем новое доказательство теоремы 1, основанное на доказанной в [4] теореме о геометризации системы счисления Фибоначчи.

Отметим, что в случае двоичной системы счисления асимптотика аналогичной суммы была найдена в [1] и, независимо, в [6].

1. Геометризация системы счисления Фибоначчи

Пусть $w=w_k\dots w_1w_0$ — некоторое конечное слово над алфавитом $\{0,1\}$, не содержащее двух единиц подряд. Такие слова будем называть допустимыми.

Пусть w — допустимое слово. Определим множество

$$\mathbb{N}(w) = \{n \in \mathbb{N} : f_{k+2}(n) = w_k, \dots, f_2(n) = w_0\}.$$

Пусть $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Определим функцию

$$\chi(n) = \{(n+1)\tau^{-1}\},$$

где $\{\cdot\}$ — дробная доля числа. Также рассмотрим множество

$$X(w) = \overline{\chi(\mathbb{N}(w))},$$

где черта сверху обозначает замыкание.

В [4] доказан следующий результат.

Теорема 2. *Пусть w — допустимое слово, длина которого равна l. Тогда $X(w)$ представляет собой некоторый отрезок вида $[\{-a\tau^{-1}\}, \{-b\tau^{-1}\}]$ с $0 \leqslant a, b \leqslant F_{l+1}$. Длина этого отрезка равна τ^{-l}, если слово w начинается с нуля, и $\tau^{-(l+1)}$, если слово w начинается с единицы. Отрезки, соответствующие различным допустимым словам одинаковой длины не имеют общих внутренних точек.*

Отметим, что из теоремы 2 следует, что $n \in \mathbb{N}(w)$ тогда и только тогда, когда $\chi(n) \in X(w)$. Поэтому

$$A_N(w) = \sharp\{n : n < N, n \in \mathbb{N}(w)\}$$

может быть записано в виде

$$A_N(w) = \sharp\{n : n < N, \chi(n) \in X(w)\}.$$

Разбиения отрезка $[0;1]$ на множества $X(w)$, где w пробегает все допустимые слова одинаковой длины, известны под названием разбиений Фибоначчи. Они были введены и подробно изучены в [5]. Нам потребуется один результат из этой работы.

Теорема 3. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\sharp\{n : n < N, \chi(n) \in X(w)\} = |X(w)|N + O(1),$$

где $|\cdot|$ *означает длину отрезка, а константа в* $O(1)$ *не зависит от выбора слова* w.

Применение теоремы 3 к вычислению $A_n(w)$ дает

$$A_N(w) = |X(w)|N + O(1). \tag{1}$$

2. Доказательство теоремы 1

К сожалению, теорема 2 не позволяет ничего сказать о множествах $\chi(\mathbb{F}_0)$ и $\chi(\mathbb{F}_1)$, то есть о распределении значений $\varepsilon(n)$.

Тем не менее, ее удается применить для изучения совместного распределения $\varepsilon(n)$ и $\varepsilon(n+1)$.

Рассмотрим слова $w_{0,k} = 00(10)^k$ и $w_{1,k} = 00(10)^k 1$, где x^k означает k-кратное повторение слова x. Тогда множество натуральных чисел представимо в виде объединения непересекающихся множеств

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} (\mathbb{N}(w_{k,0}) \sqcup \mathbb{N}(w_{k,1})).$$

Пусть $f(n) = f_{k_0}(n) \ldots f_2(n)$ – слово, содержащее в себе все цифры разложения n в систему счисления Фибоначчи.

Предложение 1. *Пусть* $w'_{0,k} = 010^{2k}$ *и* $w'_{1,k} = 010^{2k+1}$. *Тогда из* $f(n) = uw_{r,k}$ *для некоторого допустимого слова* u *и* $r \in \{0,1\}$ *следует, что* $f(n+1) = uw'_{r,k}$.

Доказательство получается прибавлением единицы к разложению n в систему счисления Фибоначчи.

Предложение 2. *Справедливо равенство*

$$\varepsilon(n)\varepsilon(n+1) = \begin{cases} (-1)^{k+1}, & n \in \mathbb{N}(w_{k,0}) \\ (-1)^k, & n \in \mathbb{N}(w_{k,1}) \end{cases}.$$

Для допустимого слова $u = u_l \ldots u_1$ обозначим $\varepsilon(u) = (-1)^{\sum_{k=1}^{l} u_k}$. Пусть $n \in \mathbb{N}(w_{r,k})$. Тогда $f(n) = uw_{r,k}$, где u — допустимое слово. В результате, используя предложение 1, находим, что

$$\varepsilon(n)\varepsilon(n+1) = \varepsilon(f(n))\varepsilon(f(n+1)) = \varepsilon(u)\varepsilon(w_{r,k})\varepsilon(u)\varepsilon(w'_{r,k}) = \varepsilon(w_{r,k})\varepsilon(w'_{r,k}).$$

Последняя величина вычисляется непосредственно, что и доказывает предложение 2.

Далее заметим, что из $n \in \mathbb{N}(w_{r,k})$ вытекает, что $k \leqslant k_0(n)$. При этом $F_{k_0-1}(n) \leqslant n < F_{k_0}(n)$ и формула Бине для чисел Фибоначчи дает нам

$$\log_\tau n - C < k_0(n) < \log_\tau n + C. \tag{2}$$

Далее, согласно предложению 2, находим

$$S_1(X) = \sum_{k=0}^{k_0(X)} \left(\sum_{n<X, n\in\mathbb{N}(w_{0,k})} (-1)^{k+1} + \sum_{n<X, n\in\mathbb{N}(w_{1,k})} (-1)^k \right),$$

то есть

$$S_1(X) = \sum_{k=0}^{k_0(X)} \left((-1)^{k+1} A_X(w_{0,k}) + (-1)^k A_X(w_{1,k})\right). \tag{3}$$

Используя (1) и применяя (2) для оценки числа слагаемых вида $O(1)$, которые нужно просуммировать, приводим (3) к виду

$$S_1(X) = \sum_{k=0}^{k_0(X)} \left((-1)^{k+1}|X(w_{0,k})| + (-1)^k|X(w_{1,k})|\right) X + O(\log X).$$

Далее, используя теорему 2, находим

$$S_1(X) = \sum_{k=0}^{k_0(X)} \left((-1)^{k+1}\tau^{-(2k+2)} + (-1)^k\tau^{-(2k+3)}\right) X + O(\log X).$$

При этом

$$(-1)^{k+1}\tau^{-(2k+2)} + (-1)^k\tau^{-(2k+3)} = (-1)^{k+1}\tau^{-(2k+2)}(1-\tau^{-1}) = \\ = (-1)^{k+1}\tau^{-(2k+4)}.$$

Поэтому

$$S_1(X) = c_{k_0(X)}X + O(\log X),$$

где

$$c_{k_0(X)} = \sum_{k=0}^{k_0(X)} (-1)^{k+1}\tau^{-(2k+4)}.$$

Заметим, что

$$c_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1}\tau^{-(2k+4)} = \frac{2\sqrt{5}-5}{5}.$$

Поэтому, для завершения доказательства теоремы 1, остается показать, что

$$(c_{k_0(X)} - c_\infty)X = O(\log X).$$

Легко видеть, что справедлива оценка

$$|(c_{k_0(X)} - c_\infty)X| = |\sum_{k\,=\,k_0(X)+1}^{\infty}(-\,1)^{k+1}\tau^{-(2k+4)}| \leqslant C_1\tau^{-2k_0(X)}X.$$

С учетом (2) это дает

$$|(c_{k_0(X)} - c_\infty)X| \leqslant \frac{C_1X}{\tau^{2(\log_\tau X - C)}} = \frac{C_2X}{(\tau^{\log_\tau X})^2} =$$

$$= \frac{C_2}{X} = O(\frac{1}{X}) = O(\log X),$$

что и требовалось.

Список литературы

[1] K. Mahler, “The Spectrum of an Array and its Application to the Study of the Translation Properties of a Simple Class of Arithmetical Functions: Part Two On the Translation Properties of a Simple Class of Arithmetical Functions”, *J. Math. and Physics*, **6**, (1927), 158–163.

[2] A. Shutov, “On sum of digits of the Zeckendorf representations of two consecutive numbers”, *Fibonacci Quarterly*, **58**:3, (2020), 203–207.

[3] E. Zeckendorf, “Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas”, *Bull. Soc. R. Sci. Liege*, **41**, (1972), 179–182.

[4] Е. П. Давлетярова, А. А. Жукова, А. В. Шутов, “Геометризация системы счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел”, *Алгебра и анализ*, **25**:6, (2013), 1–23.

[5] В. Г. Журавлев, “Одномерные разбиения Фибоначчи”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:2, (2007), 89-–122.

[6] К. М. Эминян, “Об одной бинарной задаче”, *Математические заметки*, **60**:4, (1996), 478-481.

Поступила в редакцию
3 июня 2020 г.

Shutov A. V. On one sum associated with Fibonacci numeration system. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2020. V. 20. No 2. P. 271–275.

ABSTRACT

We obtain the asymptotic formula for the sum $S(X) = \sum_{n<X}\varepsilon(n)\varepsilon(n+1)$, where $\varepsilon(n)$ takes the value $+1$ or -1 depending on the parity of the expansion of the sum of the digits n in the Fibonacci numeration system.

Key words: *Fibonacci numeration system, sum of digits.*