Дальневосточный математический журнал. 2021. Т. 21. № 1. С. 45–50

УДК 515.122.55+517.982.2+517.982.3
MSC2020 54C35 + 46E10

© А. П. Девятков[1], С. Д. Шалагинов[1]

О линейных непрерывных операторах на C_p-пространствах

В работе описывается строение непрерывного линейного оператора на пространстве непрерывных функций в топологии поточечной сходимости. Соответствующая теорема является обобщением теоремы А. В. Архангельского об общем виде непрерывного линейного функционала на таких пространствах.

Ключевые слова: *пространство непрерывных функций в топологии поточечной сходимости, топологическое векторное пространство, локально ограниченное пространство, непрерывный линейный оператор.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202104

1. Введение

Пространство $C_p(X)$ непрерывных вещественных функций на топологическом пространстве X, наделённое топологией поточечной сходимости, является объектом интенсивного изучения начиная с 70-х годов прошлого века. Основы C_p-теории были заложены отечественными математиками А. В. Архангельским, Н. В. Величко, Е. Г. Пыткеевым и другими. В настоящее время C_p-теория является активно развиваемой областью математики на стыке общей топологии и функционального анализа, см., например, серию монографий В. В. Ткачука [1].

С точки зрения функционального анализа пространство $C_p(X)$ является локально выпуклым топологическим векторным пространством, и естественно возникает вопрос, что представляет из себя его сопряженное пространство. В монографии А. В. Архангельского [2] показано, что любой линейный непрерывный функционал на пространстве $C_p(X)$ имеет вид

$$\varphi(f) = \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \text{ для всех } f \in C_p(X),$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$, $x_1,\ldots,x_n \in X$.

[1] Тюменский государственный университет, 625003, г. Тюмень, ул. Володарского, 6.
Электронная почта: a.p.devyatkov@utmn.ru (А. П. Девятков), s.d.shalaginov@utmn.ru (С. Д. Шалагинов).

Любая точка $x \in X$ порождает непрерывный линейный функционал φ_x на пространстве $C_p(X)$, действующий по правилу $\varphi_x(f) = f(x)$ для всех $f \in C_p(X)$. Нетрудно увидеть, что для тихоновского пространства X все такие функционалы линейно независимы. Кроме того, соответствие $x \mapsto \varphi_x$ является гомеоморфным вложением X в $C_p(C_p(X))$. Поэтому, обозначая через $L_p(X)$ всевозможные линейные комбинации вида $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_{x_i}$, мы можем записать $X \subset L_p(X) \subset C_p(C_p(X))$.

Теорему о строении линейного непрерывного функционала на пространстве $C_p(X)$ можно теперь сформулировать в следующем виде [2, с. 24]

Теорема 1. $(C_p(X))' = L_p(X)$.

Целью данной работы является доказательство аналога теоремы 1 для случая непрерывных линейных операторов из $C_p(X)$ в топологическое векторное пространство Z. При этом оказывается, что на пространство Z необходимо наложить дополнительное условие локальной ограниченности. Основной результат работы сформулирован в теореме 2. Также приведен пример, показывающий, что от условия локальной ограниченности пространства Z отказаться нельзя.

2. Необходимые определения

Для топологических пространств X, Y через $C_p(X,Y)$ обозначим пространство всех непрерывных отображений из X в Y, наделённое *топологией поточечной сходимости*. Базой топологии поточечной сходимости являются множества вида

$$W(x_1, \ldots, x_n, U_1, \ldots, U_n) = \{f \in C_p(X,Y) \mid f(x_i) \in U_i \text{ для всех } i = 1, \ldots, n\},$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — произвольный набор точек в X, $U_1, \ldots, U_n$ — произвольный набор открытых множеств в Y, $n \in \mathbb{N}$ (см. [2, с. 14]).

Пространство $C_p(X, \mathbb{R})$ обозначается как $C_p(X)$.

Далее будем считать, что пространство X является *вполне регулярным* (или *тихоновским*), то есть в X замкнуты все одноточечные множества и для любой точки $x \in X$ и замкнутого множества $F \subset X$, не содержащего точку x, найдётся функция $f \in C_p(X)$ такая, что $f(x) = 0$ и $f(y) = 1$ для всех $y \in F$.

Если Y является топологическим векторным пространством над полем действительных чисел (в частности, если $Y = \mathbb{R}$), то пространство $C_p(X,Y)$ с указанной топологией поточечной сходимости и с очевидной линейной структурой тоже становится топологическим векторным пространством над $\mathbb{R}$. Базисную систему окрестностей нуля в $C_p(X,Y)$ образуют множества

$$W(x_1, \ldots, x_n, U) = \{f \in C_p(X,Y) \mid f(x_i) \in U \text{ для всех } i = 1, \ldots, n\},$$

где $x_1, \ldots, x_n \in X$, U — окрестность нуля в Y.

Напомним [3, с. 44], что топологическое векторное пространство Z называется *локально ограниченным*, если в Z существует ограниченная окрестность нуля. При этом множество $E \subset Z$ называется ограниченным, если для любой окрестности нуля $V \subset Z$ найдётся число $s > 0$ такое, что $E \subset tV$ для всех $t > s$.

Заметим, что для бесконечного вполне регулярного пространства X пространство $C_p(X)$ не является локально ограниченным.

Для топологических векторных пространств Y, Z через $\mathscr{L}(Y,Z)$ обозначим множество всех линейных непрерывных операторов из Y в Z. Известно, что линейное отображение $\varphi\colon Y \to Z$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любой направленности $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$, сходящейся к нулю в пространстве Y, направленность $\{\varphi(y_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ сходится к нулю в пространстве Z.

Нам потребуется следующая лемма из линейной алгебры о факторизации линейных отображений.

Лемма. *Пусть даны векторные пространства X, Y, Z и линейные отображения $A\colon X \to Y$ и $B\colon X \to Z$. Если $\ker A \subset \ker B$, то существует единственное линейное отображение $C\colon \operatorname{im} A \to Z$ такое, что $B = CA$*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "B"'] & & \operatorname{im} A \subset Y \arrow[dl, dashed, "C"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Доказательство элементарно, и мы его опускаем (см. [4, с. 21]).

3. Основной результат

Теорема 2. *Пусть X — вполне регулярное топологическое пространство и пусть Y, Z — хаусдорфовы топологические векторные пространства над полем действительных чисел. Если пространство Z локально ограничено, то любой линейный непрерывный оператор $\varphi \in \mathscr{L}(C_p(X,Y),Z)$ имеет вид*

$$\varphi(f) = \Lambda_1 f(x_1) + \ldots + \Lambda_n f(x_n)$$

для всех $f \in C_p(X,Y)$, где $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n \in \mathscr{L}(Y,Z)$, $x_1,\ldots,x_n \in X$.

Такое представление единственно в следующем смысле: если точки $x_1,\ldots,x_n$ попарно различны, $\Lambda_i \neq 0$ для всех $i = 1,\ldots,n$ и имеется ещё одно представление

$$\varphi(f) = \Lambda'_1 f(x'_1) + \ldots + \Lambda'_k f(x'_k)$$

с попарно различными точками $x'_1,\ldots,x'_k$ и $\Lambda'_i \neq 0$ для всех $i = 1,\ldots,k$, то $k = n$ и после изменения нумерации точек $x'_i = x_i$, $\Lambda'_i = \Lambda_i$ для всех $i = 1,\ldots,n$.

Доказательство. Пусть V_0 — ограниченная окрестность нуля в пространстве Z. Так как линейное отображение $\varphi\colon C_p(X,Y) \to Z$ непрерывно, то найдётся окрестность нуля $W = W(x_1,\ldots,x_n,U)$ в пространстве $C_p(X,Y)$ вида

$$W(x_1,\ldots,x_n,U) = \{f \in C_p(X,Y) | f(x_i) \in U \text{ для всех } i = 1,\ldots,n\}$$

(точки $x_1,\ldots,x_n \in X$ попарно различны, U — окрестность нуля в Y)

такая, что $\varphi(W) \subset V_0$.

Предположим, что функция $f \in C_p(X,Y)$ удовлетворяет условию $f(x_i) = 0$ для всех $i = 1,\dots,n$. Тогда для любого числа $k = 1,2,\dots$ будет выполнено $kf(x_i) \in U$ для всех $i = 1,\dots,n$. Следовательно, $kf \in W$ и $k\varphi(f) = \varphi(kf) \in \varphi(W) \subset V_0$. Таким образом, $\varphi(f) \in \frac{1}{k}V_0$ для любого $k = 1,2,\dots$. Так как окрестность V_0 ограничена, то для любой окрестности нуля V пространства Z и для всех достаточно больших номеров k будет выполнено включение $\frac{1}{k}V_0 \subset V$. Следовательно, $\varphi(f) \in V$ для любой окрестности нуля пространства Z. Поскольку мы рассматриваем хаусдорфовы топологические векторные пространства, это возможно только если $\varphi(f) = 0$. Таким образом, для любой функции $f \in C_p(X,Y)$, удовлетворяющей условию $f(x_i) = 0$ для всех $i = 1,\dots,n$, выполнено $\varphi(f) = 0$.

Рассмотрим линейное отображение $F\colon C_p(X,Y) \to Y^n$, задаваемое равенством $F(f) = (f(x_1),\dots,f(x_n))$ для любого $f \in C_p(X,Y)$. Легко увидеть, что отображение F сюръективно. Действительно, так как пространство X вполне регулярно, то найдутся непрерывные вещественные функции h_i на X, $i = 1,\dots,n$, такие, что $h_i(x_i) = 1$ и $h_i(x_j) = 0$ при $i \neq j$. Тогда для любого набора векторов $(y_1,\dots,y_n) \in Y^n$ функция $f = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i y_i$ принадлежит пространству $C_p(X,Y)$ и $F(f) = (y_1,\dots,y_n)$.

По доказанному $\ker F \subset \ker\varphi$. Тогда по лемме о факторизации существует *единственное* линейное отображение $\Lambda\colon Y^n \to Z$ такое, что $\varphi = \Lambda F$, то есть коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
C_p(X,Y) \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Y^n \arrow[d, dashed, "\Lambda"] \\
& Z
\end{tikzcd}$$

Отображение Λ имеет вид

$$\Lambda(y_1,\dots,y_n) = \Lambda_1(y_1) + \ldots + \Lambda_n(y_n)$$

для всех $(y_1,\dots,y_n) \in Y^n$, где Λ_i — некоторые линейные отображения из Y в Z. Таким образом, отображение φ имеет вид

$$\varphi(f) = \Lambda_1 f(x_1) + \ldots + \Lambda_n f(x_n)$$

для всех $f \in C_p(X,Y)$. Остаётся показать, что линейные отображения Λ_i непрерывны, то есть $\Lambda_i \in \mathscr{L}(Y,Z)$. Это следует из непрерывности отображения φ. Действительно, для любой направленности $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$, сходящейся к нулю в Y, направленность $\{f_{i,\alpha} = h_i \cdot y_\alpha\}_{\alpha\in A}$, где вещественные функции h_i на X описаны выше ($h_i(x_i) = 1$ и $h_i(x_j) = 0$ при $i \neq j$), сходится к нулю в пространстве $C_p(X,Y)$. Так как отображение φ непрерывно, то направленность $\{\varphi(f_{i,\alpha}) = \Lambda_i y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ сходится к нулю в Z. Это означает, что линейное отображение Λ_i непрерывно в нуле и, таким образом, $\Lambda_i \in \mathscr{L}(Y,Z)$.

Единственность представления следует из единственности отображения Λ в лемме о факторизации. Действительно, если имеем два представления

$$\varphi(f) = \Lambda'_1 f(x'_1) + \ldots + \Lambda'_k f(x'_k),$$
$$\varphi(f) = \Lambda''_1 f(x''_1) + \ldots + \Lambda''_l f(x''_l),$$

то, дополняя каждое из них нулевыми слагаемыми до представления вида

$$\varphi(f) = \Lambda_1 f(x_1) + \ldots + \Lambda_n f(x_n),$$

где $\{x_1,\ldots,x_n\}=\{x'_1,\ldots,x'_k\}\cup\{x''_1,\ldots,x''_l\}$, из единственности отображения $\Lambda=(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n)$ получаем, что $k=l=n$ и с точностью до перестановок $x'_i=x''_i=x_i$, $\Lambda'_i=\Lambda''_i=\Lambda_i$ для всех $i=1,\ldots,n$. □

Привлекая понятие тензорного произведения векторных пространств и пространство $L_p(X)=(C_p(X))'$ (см. Введение, теорема 1), доказанную теорему можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3. *Пусть X — вполне регулярное топологическое пространство, а Y, Z — хаусдорфовы топологические векторные пространства. Если пространство Z локально ограничено, то*

$$\mathscr{L}(C_p(X,Y),Z) = \mathscr{L}(Y,Z)\otimes L_p(X).$$

Следствие. *Если хаусдофово топологическое векторное пространство Z локально ограничено, то любой линейный непрерывный оператор $\varphi\in\mathscr{L}(C_p(X),Z)$ имеет вид*

$$\varphi(f) = z_1 f(x_1) + \ldots + z_n f(x_n)$$

для всех $f\in C_p(X)$, где $z_1,\ldots,z_n\in Z$, $x_1,\ldots,x_n\in X$. То же самое выражается равенством

$$\mathscr{L}(C_p(X),Z) = Z\otimes L_p(X).$$

Для доказательства достаточно заметить, что линейный оператор из пространства $\mathscr{L}(\mathbb{R},Z)$ имеет вид $t\mapsto zt$, где $z\in Z$ — фиксированный вектор.

Замечание 1. Любое нормированное пространство является локально ограниченным. Поэтому теорема верна, в частности, для операторов со значениями в нормированных пространствах.

Замечание 2. Следующий простой пример показывает, что от требования локальной ограниченности пространства Z отказаться нельзя.

Пусть $X=\mathbb{N}$, $Y=\mathbb{R}$, $Z=C_p(X,Y)$, $\varphi\colon C_p(X,Y)\to Z$ — тождественное отображение. Заметим, что пространство $Z=C_p(X,Y)=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — произведение счётного семейства прямых — есть локально выпуклое пространство, метризуемое полной метрикой, то есть пространство Фреше. Несложно показать, что пространство Z не является локально ограниченным. Линейный оператор $\varphi\in\mathscr{L}(C_p(X,Y),Z)$ имеет вид

$$\varphi(f) = \varphi(f(1),f(2),\ldots) = (f(1),f(2),\ldots)$$

для всех $f=(f(1),f(2),\ldots)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Очевидно, что φ нельзя представить в виде

$$\varphi(f) = \Lambda_1 f(x_1) + \ldots + \Lambda_n f(x_n),$$

так как тогда значение $\varphi(f)$ зависело бы только от значений функции f в конечном числе точек и не зависело бы от значений f в остальных точках. Но это очевидно не так.

Список литературы

[1] V. Tkachuk, *A Cp-theory problem book.* V. I-IV, Problem Books in Mathematics, Springer, 2011–2015.

[2] А. В. Архангельский, *Топологические пространства функций*, Изд-во МГУ, М., 1989.

[3] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971.

[4] С. С. Кутателадзе, *Основы функционального анализа*, Издательство Института математики, Новосибирск, 2000.

Поступила в редакцию
2 марта 2021 г.

Devyatkov A. P.[1], *Shalaginov S. D.*[1] On linear continuous operators on C_p-spaces. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2021. V. 21. No 1. P. 45–50.

[1] Tyumen State University, Russia

ABSTRACT

The paper describes the structure of a linear continuous operator on the space of continuous functions in the topology of pointwise convergence. The corresponding theorem is a generalization of A. V. Arkhangel'skii's theorem on the general form of a continuous linear functional on such spaces.

Key words: *space of continuous functions in the topology of pointwise convergence, topological vector space, locally bounded space, continuous linear operator.*

References

[1] V. Tkachuk, *A Cp-theory problem book.* V. I-IV, Problem Books in Mathematics, Springer, 2011–2015.

[2] A. V. Arkhangel'skii, *Topologicheskie prostranstva funktsii*, Izd-vo MGU, M., 1989.

[3] Kh. Shefer, *Topologicheskie vektornye prostranstva*, Mir, M., 1971.

[4] C. C. Kutateladze, *Osnovy funktsional'nogo analiza*, Izdatel'stvo Instituta matematiki, Novosibirsk, 2000.