Дальневосточный математический журнал. 2021. Т. 21. № 1. С. 89–104

УДК 519.21:517.977.56
MSC2020 93E20; 49K20

© Р. О. Масталиев[1]

Необходимые условия оптимальности первого порядка в стохастических системах Гурса – Дарбу

Для задач оптимального управления, описываемых стохастической системой Гурса – Дарбу, сформулирован и доказан ряд необходимых условий оптимальности первого порядка, который представляет собой стохастический аналог принципа максимума Понтрягина, линеаризованного принципа максимума и уравнения Эйлера.

Ключевые слова: *нелинейная стохастическая система Гурса – Дарбу, оптимальное управление, необходимые условия оптимальности, аналог уравнения Эйлера.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202108

Введение

Задачи оптимизации объектов с распределенными параметрами, описываемые системами Гурса – Дарбу, изучались рядом авторов (см. напр. [1–11]), что обусловлено большим прикладным значением таких задач [12–14]. Однако известно, что поведение реального объекта, функционирующего в условиях естественных шумов, характеризуется некоторой неопределенностью. Описание таких систем при помощи детерминистских подходов не всегда отражает действительную картину функционирования объекта. В связи с этим появляется необходимость исследования задач управления, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями Гурса – Дарбу. К настоящему времени исследован ряд аспектов таких задач управления, которому посвящен ряд работ [12, 15–19].

В настоящей работе также изучается одна задача оптимального управления стохастической системой Гурса – Дарбу и при различных предположениях устанавливается несколько необходимых условий оптимальности первого порядка.

Применяемая методика является стохастическим аналогом схем работ [10, 11].

[1] Институт Систем Управления НАН Азербайджана, Az 1141, г. Баку, ул. Бахтияр Вагабзаде, 68. Электронная почта: mastaliyevrashad@gmail.com

1. Постановка задачи

Пусть (Ω, F, P) — некоторое вероятностное пространство с определенным на нем неубывающий потоком σ — алгебр $\{F_{tx}, (t,x) \in D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]\}$. $\Re(D)$ — пространство измеримых по (t,x,ω) и F_{tx} — согласованных процессов $z: D \times \Omega \to R^n$ таких, что $E \int\limits_D \|z(t,x)\|^2 dt dx < +\infty$; E — знак математического ожидания.

Предположим, что имеем систему, закон изменения состояний которой может быть записан на заданном прямоугольнике D с помощью стохастического уравнения Дарбу

$$\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t\, \partial x} = f(t,x,z,z_t,z_x,u) + \mathrm{g}(t,x,z) \frac{\partial^2 W(t,x)}{\partial t\, \partial x}, \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

с краевыми условиями типа Гурса

$$\begin{gathered} z(t_0, x) = a(x), \qquad x \in [x_0, x_1], \\ z(t, x_0) = b(t), \qquad t \in [t_0, t_1], \\ a(x_0) = b(t_0). \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $f(t,x,p,u)$ — заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по p, где $p = (z, z_t, z_x)'$; $\mathrm{g}(t,x,z)$ — заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z; краевые n-мерные вектор-функции $a(x), b(t)$ — заданные на $[x_0, x_1]$ и $[t_0, t_1]$ соответственно, удовлетворяют условию Липшица; $\frac{\partial^2 W(t,x)}{\partial t\, \partial x}$ — n-мерный двухпараметрический независимый “белый шум” на плоскости [12, 20].

Под допустимыми управлениями будем понимать измеримые функции $u(t,x)$, стесненные ограничениями типа включения

$$u(t,x) \in U, \qquad (t,x) \in D, \tag{3}$$

где U — заданное непустое, ограниченное множество из R^r $(u(t,x) \in L_\infty(D,U))$.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t,x)$ соответствует с вероятностью 1 единственное решение $z(t,x)$ (в смысле [21, 22]) задачи (1)–(2).

Задача состоит в минимизации многоточечного функционала

$$S(u) = E\{\varphi(z(T_1, X_1), z(T_2, X_2), \ldots, z(T_k, X_k))\}, \tag{4}$$

на решениях системы (1)–(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями.

Здесь $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ — заданная, непрерывно-дифференцируемая скалярная функция, а (T_i, X_i), $i = \overline{1,k}$ $(t_0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_k \leqslant t_1; x_0 < X_1 < X_2 < \ldots < X_k \leqslant x_1)$ — заданные точки.

Заметим, что детерминированный аналог такого многоточечного функционала качества типа Майера введен в работах [10, 11] и др.

Допустимое управление $u(t,x)$, доставляющее минимум функционалу (4) при ограничениях (1)–(3), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t,x), z(t,x))$ — оптимальным процессом.

Нашей целью является вывод необходимых условий оптимальности первого порядка в рассматриваемой задаче (1)–(4).

2. Формула приращения функционала $S(u)$

Пусть $(u(t,x),z(t,x))$ — фиксированный, а $(\bar{u}(t,x)=u(t,x)+\Delta u(t,x),\bar{z}(t,x)=z(t,x)+$ $+\Delta z(t,x))$ — произвольные допустимые процессы.

Вычислим приращение функционала (4), соответствующее допустимым управлениям $\bar{u}(t,x)$ и $u(t,x)$

$$\begin{gathered}\Delta S(u)=S(\bar{u})-S(u)=\\ =E\big\{\varphi(\bar{z}(T_1,X_1),\bar{z}(T_2,X_2),\ldots,\bar{z}(T_k,X_k))-\varphi(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\ldots,z(T_k,X_k))\big\}\end{gathered} \tag{5}$$

С другой стороны, из (1) вытекает, что приращение $\Delta z(t,x)$ состояния $z(t,x)$ является решением стохастической системы

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Delta z(t,x)}{\partial t\,\partial x}&=[f(t,x,\bar{p}(t,x),\bar{u}(t,x))-f(t,x,p(t,x),u(t,x))]+\\ &+[\mathrm{g}(t,x,\bar{z})-\mathrm{g}(t,x,z)]\frac{\partial^2W(t,x)}{\partial t\,\partial x},\end{aligned} \tag{6}$$

с нулевыми краевыми условиями

$$\begin{aligned}z(t_0,x)=0,\qquad & x\in[x_0,x_1],\\ z(t,x_0)=0,\qquad & t\in[t_0,t_1].\end{aligned} \tag{7}$$

Пусть $\psi(t,x)\in L_\infty(D,R^n)$ — некоторая пока неизвестная вектор-функция. Тогда, учитывая, что математическое ожидание стохастических интегралов равно нулю [12], из (6) можно получить

$$\begin{gathered}E\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\frac{\partial^2\Delta z(t,x)}{\partial t\,\partial x}dxdt=\\ =E\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\big[H(t,x,\bar{p}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi(t,x))-H(t,x,p(t,x),u(t,x),\psi(t,x))\big]dxdt.\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $H(t,x,p(t,x),u(t,x),\psi(t,x))=\psi'(t,x)f(t,x,p(t,x),u(t,x))$ есть стохастической аналог функции Гамильтона$-$Понтрягина в рассматриваемой задаче, штрих $(')$ — операция транспонирования.

Пусть

$$\begin{gathered}H_p[t,x]=H_p(t,x,p(t,x),u(t,x),\psi(t,x)),\\ \Delta_{\bar{u}}H[t,x]=H(t,x,p(t,x),\bar{u}(t,x),\psi(t,x))-H(t,x,p(t,x),u(t,x),\psi(t,x))\end{gathered}$$

— обозначения, взятые для удобства записи формулы. Учитывая тождество (5) и применяя формулу Тейлора, согласно (8) приращение функционала (5) можно переписать так:

$$\Delta S(u)=S(\bar u)-S(u)=E\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k))}{\partial a_i}\Delta z(T_i,X_i)+\right.$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\frac{\partial^2\Delta z(t,x)}{\partial t\,\partial x}dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H_z'[t,x]\Delta z(t,x)dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H_{z_t}'[t,x]\Delta z_t(t,x)dxdt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H_{z_x}'[t,x]\Delta z_x(t,x)dxdt+o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|\right]\right)- \tag{9}$$
$$\left.-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_2(\|\Delta p(t,x)\|)dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar u}H_p'[t,x]\Delta p(t,x)dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar u}H[t,x]dxdt\right\}.$$

Здесь величины $o_i(.)$, $i=1,2$, определяются соответственно из разложений

$$\varphi(\bar z(T_1,X_1),\bar z(T_2,X_2),\dots,\bar z(T_k,X_k))-\varphi(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k))=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k))}{\partial a_i}\Delta z(T_i,X_i)+o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|\right]\right),$$

$$H(t,x,\bar p(t,x),\bar u(t,x),\psi(t,x))-H(t,x,p(t,x),u(t,x),\psi(t,x))=$$
$$=H(t,x,\bar p(t,x),\bar u(t,x),\psi(t,x))-H(t,x,p(t,x),\bar u(t,x),\psi(t,x))+$$
$$+H(t,x,p(t,x),\bar u(t,x),\psi(t,x))-H(t,x,p(t,x),u(t,x),\psi(t,x))=$$
$$=\Delta_{\bar u}H[t,x]+H_p'(t,x,p,\bar u,\psi)\Delta p(t,x)+o_2(\|\Delta p(t,x)\|)=$$
$$=\Delta_{\bar u}H[t,x]+H_p'(t,x,p,\bar u,\psi)\Delta p(t,x)-H_p'(t,x,p,u,\psi)\Delta p(t,x)+$$
$$+H_p'(t,x,p,u,\psi)\Delta p(t,x)+o_2(\|\Delta p(t,x)\|)=\Delta_{\bar u}H[t,x]+H_p'[t,x]\Delta p(t,x)+$$
$$+\Delta_{\bar u}H_p'[t,x]\Delta p(t,x)+o_2(\|\Delta p(t,x)\|).$$

Поскольку $\Delta z(t,x)$ абсолютно непрерывная вектор-функция, тогда с учетом нулевых краевых условий (7) следует справедливость равенств

$$\Delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\Delta z_{\tau s}(\tau,s)dsd\tau.$$

Учитывая это и теорему Фубини [23], показываем справедливость соотношений

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H_z'[t,x]\Delta z(t,x)dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1}H_z[\tau,s]dsd\tau\right]\Delta z_{tx}(t,x)dxdt, \tag{10}$$
$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H_{z_t}'[t,x]\Delta z_t(t,x)dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1}H_{z_t}[t,s]ds\right]\Delta z_{tx}(t,x)dxdt, \tag{11}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H'_{z_x}[t,x]\Delta z_x(t,x)dxdt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_t^{t_1} H_{z_x}[\tau,x]d\tau\right]\Delta z_{tx}(t,x)dxdt, \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k))}{\partial a_i}\Delta z(T_i,X_i) = \\ = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t,x)\frac{\partial\varphi(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k))}{\partial a_i}\Delta z_{tx}(t,x)dxdt,\end{gathered} \tag{13}$$

где $\alpha_i(t,x)$ — характеристическая функция области $[t_0,T_i]\times[x_0,X_i]$.

Подставляя (10)–(13) в (9), после группирования получаем, что

$$\begin{gathered}\Delta S(u) = E\left\{-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar u}H[t,x]dxdt+\right.\\ +\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\psi(t,x)+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t,x)\frac{\partial\varphi(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k))}{\partial a_i}-\right.\\ \left.\left.-\int_t^{t_1}\int_x^{x_1}H_z[\tau,s]dsd\tau-\int_x^{x_1}H_{z_t}[t,s]ds-\int_t^{t_1}H_{z_x}[\tau,x]d\tau\right]\Delta z_{tx}(t,x)dxdt\right\}+\eta_1(u;\,\Delta u),\end{gathered} \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered}\eta_1(u;\Delta u) = E\left\{o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|\right]\right)-\right.\\ \left.-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_2(\|\Delta z(t,x)\|)dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar u}H'_p[t,x]\Delta p(t,x)dxdt\right\}.\end{gathered} \tag{15}$$

Если предположить, что $\psi(t,x)\in L_\infty(D,R^n)$ является решением следующего двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра (сопряженная система)

$$\begin{gathered}\psi(t,x) = -\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t,x)\frac{\partial\varphi(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\dots,z(T_k,X_k))}{\partial a_i}+\int_t^{t_1}\int_x^{x_1}H_z[\tau,s]dsd\tau+\\ +\int_t^{t_1}H_{z_x}[\tau,x]d\tau+\int_x^{x_1}H_{z_t}[t,s]ds,\end{gathered} \tag{16}$$

то формула приращения (14) примет вид

$$\Delta S(u) = -E\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar u}H[t,x]dxdt+\eta_1(u;\,\Delta u). \tag{17}$$

В дальнейшем нам понадобятся оценки для $E\|\Delta z(t,x)\|$, $E\|\Delta z_t(t,x)\|$ и $E\|\Delta z_x(t,x)\|$. Перейдем к установлению этих оценок.

3. Оценка математических ожиданий приращения решений и его производной

Из анализа (6) становится ясно, что

$$\begin{aligned}\Delta z(t,x) = &\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}[f(\tau,s,\bar p(\tau,s),\bar u(\tau,s)) - f(\tau,s,p(\tau,s),u(\tau,s))]dsd\tau+\\ &+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}[\mathrm{g}(\tau,s,\bar z)-\mathrm{g}(\tau,s,z)]\frac{\partial^2 W(\tau,s)}{\partial\tau\,\partial s}dsd\tau,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\Delta z_t(t,x) = &\int_{x_0}^{x}[f(t,s,\bar p(t,s),\bar u(t,s)) - f(t,s,p(t,s),u(t,s))]ds+\\ &+\int_{x_0}^{x}[\mathrm{g}(t,s,\bar z)-\mathrm{g}(t,s,z)]\frac{\partial^2 W(t,s)}{\partial t\,\partial s}ds,\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\Delta z_x(t,x) = &\int_{t_0}^{t}[f(\tau,x,\bar p(\tau,x),\bar u(\tau,x)) - f(\tau,x,p(\tau,x),u(\tau,x))]d\tau+\\ &+\int_{t_0}^{t}[\mathrm{g}(\tau,x,\bar z)-\mathrm{g}(\tau,x,z)]\frac{\partial^2 W(\tau,x)}{\partial\tau\,\partial x}d\tau.\end{aligned} \tag{20}$$

Отсюда, переходя к норме и при этом используя условие Липшица, а также принимая от обеих частей полученных неравенств математические ожидания, выводим

$$\begin{gathered}E\|\Delta z(t,x)\|\leqslant\\ \leqslant E\left\{\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\|\Delta_{\bar u}f[\tau,s]\|dsd\tau + L_1\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}[\|\Delta z(\tau,s)\|+\|\Delta z_\tau(\tau,s)\|+\|\Delta z_s(\tau,s)\|]dsd\tau\right\},\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}E\|\Delta z_t(t,x)\|\leqslant\\ \leqslant E\left\{\int_{x_0}^{x}\|\Delta_{\bar u}f[t,s]\|ds + L_2\int_{x_0}^{x}[\|\Delta z(t,s)\|+\|\Delta z_t(t,s)\|+\|\Delta z_s(t,s)\|]ds\right\},\end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered}E\|\Delta z_x(t,x)\|\leqslant\\ \leqslant E\left\{\int_{t_0}^{t}\|\Delta_{\bar u}f[\tau,x]\|d\tau + L_3\int_{t_0}^{t}[\|\Delta z(\tau,x)\|+\|\Delta z_\tau(\tau,x)\|+\|\Delta z_x(\tau,x)\|]d\tau\right\}.\end{gathered} \tag{23}$$

Всюду $L_i = const > 0$, $i=\overline{1,14}$, и

$$\Delta_{\bar u}f[t,x] = f(t,x,p(t,x),\bar u(t,x)) - f(t,x,p(t,x),u(t,x)).$$

Применяя к последним двум неравенствам известную лемму Гронуолла – Вендроффа (см. напр. [21]) получаем, что

$$E\|\Delta z_t(t,x)\| \leqslant EL_4\left\{\int_{x_0}^{x}[\|\Delta_{\bar u}f[t,s]\|+\|\Delta z(t,s)\|+\|\Delta z_s(t,s)\|]ds\right\}, \tag{24}$$

$$E\|\Delta z_x(t,x)\| \leqslant EL_5\left\{\int_{t_0}^{t}[\|\Delta_{\bar u}f[\tau,x]\|+\|\Delta z(\tau,x)\|+\|\Delta z_\tau(\tau,x)\|]d\tau\right\}. \tag{25}$$

Усиливая неравенства (24), (25) друг с другом, а затем еще раз применяя леммы Гронуолла – Вендроффа, получаем

$$E\|\Delta z_t(t,x)\| \leqslant$$
$$\leqslant EL_6\left\{\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}[\|\Delta_{\bar u}f[\tau,s]\|+\|\Delta z(\tau,s)\|]dsd\tau+\int_{x_0}^{x}[\|\Delta_{\bar u}f[t,s]\|+\|\Delta z(t,s)\|]ds\right\}, \tag{26}$$

$$E\|\Delta z_x(t,x)\| \leqslant$$
$$\leqslant EL_7\left\{\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}[\|\Delta_{\bar u}f[\tau,s]\|+\|\Delta z(\tau,s)\|]dsd\tau+\int_{t_0}^{t}[\|\Delta_{\bar u}f[\tau,x]\|+\|\Delta z(\tau,x)\|]d\tau\right\}. \tag{27}$$

Если учесть оценку (25) в (21), то

$$\|\Delta z(t,x)\| \leqslant EL_8\left\{\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}[\|\Delta_{\bar u}f[\tau,s]\|+\|\Delta z(\tau,s)\|+\|\Delta z_\tau(\tau,s)\|]dsd\tau\right\}. \tag{28}$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла – Вендроффа делаем вывод, что

$$\|\Delta z(t,x)\| \leqslant EL_9\left\{\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}[\|\Delta_{\bar u}f[\tau,s]\|+\|\Delta z_\tau(\tau,s)\|]dsd\tau\right\}. \tag{29}$$

Комбинируя неравенства (26) и (27) с (29), можно записать следующие оценки:

$$E\|\Delta z_t(t,x)\| \leqslant EL_{10}\left\{\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}[\|\Delta_{\bar u}f[\tau,s]\|+\|\Delta z_\tau(\tau,s)\|]dsd\tau+\int_{x_0}^{x}\|\Delta_{\bar u}f[t,s]\|ds\right\}, \tag{30}$$

$$E\|\Delta z_x(t,x)\| \leqslant EL_{11}\left\{\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}[\|\Delta_{\bar u}f[\tau,s]\|+\|\Delta z_s(\tau,s)\|]dsd\tau+\int_{t_0}^{t}\|\Delta_{\bar u}f[\tau,x]\|d\tau\right\}. \tag{31}$$

Снова применяя леммы Гронуолла – Вендроффа к неравенствам (30), (31) получим, что

$$E\|\Delta z_t(t,x)\| \leqslant EL_{12}\left\{\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\|\Delta_{\bar{u}}f[\tau,s]\|dsd\tau+\int\limits_{x_0}^{x}\|\Delta_{\bar{u}}f[t,s]\|ds\right\}, \tag{32}$$

$$E\|\Delta z_x(t,x)\| \leqslant EL_{13}\left\{\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\|\Delta_{\bar{u}}f[\tau,s]\|dsd\tau+\int\limits_{t_0}^{t}\|\Delta_{\bar{u}}f[\tau,x]\|d\tau\right\}. \tag{33}$$

Далее, с учетом оценки (32) из (29) приходим к оценке

$$E\|\Delta z(t,x)\| \leqslant EL_9\left\{\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\|\Delta_{\bar{u}}f[\tau,s]\|dsd\tau+\right.$$

$$\left.+L_{12}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{s}\|\Delta_{\bar{u}}f[\alpha,\beta]\|d\alpha d\beta d\tau ds+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{s}\|\Delta_{\bar{u}}f[\tau,\beta]\|d\beta dsd\tau\right\}.$$

Отсюда, используя формулу Коши для повторных интегралов получаем

$$E\|\Delta z(t,x)\| \leqslant EL_9\left\{\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\|\Delta_{\bar{u}}f[\tau,s]\|dsd\tau+\right.$$

$$\left.+L_{12}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}(t-\tau)(x-s)\|\Delta_{\bar{u}}f[\tau,s]\|dsd\tau+L_{12}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}(x-s)\|\Delta_{\bar{u}}f[\tau,s]\|dsd\tau\right\}.$$

Последнее неравенство дает, наконец, оценку

$$E\|\Delta z(t,x)\| \leqslant EL_{14}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\|\Delta_{\bar{u}}f[\tau,s]\|dsd\tau. \tag{34}$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма. *Для всех* $(t,x)\in D$ *справедливы оценки* (32)–(34).

Переходим теперь к установлению различных необходимых условий оптимальности первого порядка, точнее говоря, стохастического аналога принципа максимума Понтрягина, линеаризованного принципа максимума, уравнения Эйлера [24].

4. Условие оптимальности типа принципа максимума

Пусть $u(t,x)$ — оптимальное управление. Зададим игольчатое приращение $\Delta u_\varepsilon(t,x)$ управления в виде

$$\Delta u_\varepsilon(t,x)=\begin{cases} v-u(t,x), & (t,x)\in D_\varepsilon=[\theta,\theta+\varepsilon)\times[\xi,\xi+\varepsilon),\\ 0, & (t,x)\in D\setminus D_\varepsilon. \end{cases} \tag{35}$$

Здесь и в дальнейшем $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ — произвольная правильная точка (точка Лебега) [25] управления $u(t,x)$, $v\in U$ — произвольный вектор, а $\varepsilon>0$ — достаточно малое число.

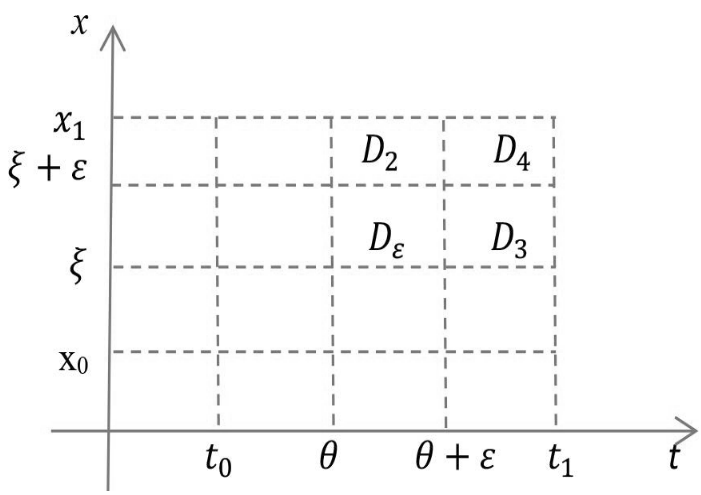
Через $\Delta z_\varepsilon(t,x)$ обозначим специальное приращение траектории $z(t,x)$, соответствующее приращению (35). Тогда из приведенной выше оценки (32)–(34) следует, что

$$E\|\Delta z_\varepsilon(t,x)\| \leqslant \begin{cases} 0, & (t,x)\in D_1 = D\setminus(D_\varepsilon\cup D_2\cup D_3\cup D_4), \\ L\varepsilon^2, & (t,x)\in D_\varepsilon\cup D_2\cup D_3\cup D_4, \end{cases} \tag{36}$$

$$E\|(\Delta z_\varepsilon(t,x))_t\| \leqslant \begin{cases} 0, & (t,x)\in D_1, \\ L\varepsilon, & (t,x)\in D_\varepsilon\cup D_2, \\ L\varepsilon^2, & (t,x)\in D_3\cup D_4, \end{cases} \tag{37}$$

$$E\|(\Delta z_\varepsilon(t,x))_x\| \leqslant \begin{cases} 0, & (t,x)\in D_1, \\ L\varepsilon, & (t,x)\in D_\varepsilon\cup D_3, \\ L\varepsilon^2, & (t,x)\in D_2\cup D_4. \end{cases} \tag{38}$$

Здесь $D_i, i=\overline{1,4}$ — подмножества прямоугольника D, изображенные на рисунке.



Рассмотрим приращение функционала (17) на игольчатой вариации управления (35).

Поскольку

$$\int_\theta^{\theta+\varepsilon}\int_\xi^{\xi+\varepsilon} \Delta_v H_p^{'}[t,x]\Delta p(t,x)dxdt = \varepsilon^2\Delta_v H_p^{'}[\theta,\xi]\Delta p(\theta,\xi) + o(\varepsilon^2),$$

с помощью оценки (36)–(38) можно убедиться в том, что остаточный член $\eta_1(u;\Delta u_\varepsilon)$ формулы (15) есть величина $o(\varepsilon^2)$. Тогда вдоль оптимального процесса $(u(t,x),z(t,x))$

формула приращения (17) принимает вид

$$-E\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\int\limits_{\xi}^{\xi+\varepsilon}\Delta_v H[t,x]dxdt+o(\varepsilon^2)\geqslant 0.$$

Отсюда, применяя теорему о среднем, получаем

$$E\Delta_v H[\theta,\xi]\leqslant 0. \tag{39}$$

Таким образом, приходим к следующему заключению.

Теорема 1 (стохастический аналог принципа максимума). *Для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы для всех $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ и $v\in U$ выполнялось неравенство (39).*

5. Линеаризованный принципа максимума

Предположим, что в задаче (1)–(4) множество U является выпуклым, а $f(t,x,p,u)$ — непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (p,u). Руководствуясь этими предположениями, приращения функционала (4) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Delta S(u)=E\Bigg\{&\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\ldots,z(T_k,X_k))}{\partial a_i}\Delta z(T_i,X_i)+\\&+\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\frac{\partial^2\Delta z(t,x)}{\partial t\,\partial x}dxdt-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}H'_z[t,x]\Delta z(t,x)dxdt-\\&-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}H'_{z_t}[t,x]\Delta z_t(t,x)dxdt-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}H'_{z_x}[t,x]\Delta z_x(t,x)dxdt+\\&+o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|\right]\right)-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}o_3(\|\Delta p(t,x)\|+\|\Delta u(t,x)\|)dxdt-\\&-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}H'_u[t,x]\Delta u(t,x)dxdt\Bigg\}.\end{aligned} \tag{40}$$

Здесь величины $o_3(.)$, определяются из разложения

$$\begin{aligned}&H(t,x,\bar p(t,x),\bar u(t,x),\psi(t,x))-H(t,x,p(t,x),u(t,x),\psi(t,x))=\\&=H'_p[t,x]\Delta p(t,x)+H'_u[t,x]\Delta u(t,x)+o_3(\|\Delta p(t,x)+\Delta u(t,x)\|).\end{aligned}$$

Предполагая, что $\psi(t,x)\in L_\infty(D,R^n)$ является решением сопряженной системы (16), аналогичными доказательствами формулы (17) показываем, что

$$\Delta S(u)=-E\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}H_u[t,x]\Delta u(t,x)dxdt+\eta_2(u;\Delta u). \tag{41}$$

Здесь

$$\eta_2(u;\Delta u)=E\left\{o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta z(T_i,X_i)\|\right]\right)-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}o_3(\|\Delta p(t,x)\|+\|\Delta u(t,x)\|)dxdt\right\}. \quad (42)$$

Применяя аналогичный прием доказательства неравенств (32)–(34), можно убедиться в оценке

$$E\|\Delta z(t,x)\|\leqslant EL\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\|\Delta u(\tau,s)\|]dsd\tau, \quad (43)$$

$$E\|\Delta z_t(t,x)\|\leqslant EL\left\{\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\|\Delta u(\tau,s)\|]dsd\tau+\int\limits_{x_0}^{x}\|\Delta u(t,s)\|]ds\right\}, \quad (44)$$

$$E\|\Delta z_x(t,x)\|\leqslant EL\left\{\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\|\Delta u(\tau,s)\|]dsd\tau+\int\limits_{t_0}^{t}\|\Delta u(\tau,x)\|]d\tau\right\}. \quad (45)$$

Считая $u(t,x)$ оптимальным управлением, его специальное приращение построим по формуле

$$\Delta u(t,x;\ \varepsilon)=\varepsilon(w(t,x)-u(t,x)), \quad (46)$$

где $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$, а $w(t,x)\in U$, $(t,x)\in D$ — вектор-функция.

Через $\Delta z(t,x;\varepsilon)$, обозначим специальное приращение траектории $z(t,x)$, соответствующее приращению (46). В этом случае из оценок (43)–(45) следует, что

$$E\|\Delta z(t,x;\ \varepsilon)\|\leqslant L\varepsilon,\quad E\|\Delta z_t(t,x;\ \varepsilon)\|\leqslant L\varepsilon,\quad E\|\Delta z_x(t,x;\ \varepsilon)\|\leqslant L\varepsilon.$$

Учитывая эти оценки в формуле (43), определяем, что вдоль оптимального процесса $(u(t,x),z(t,x))$ формула приращения (42) принимает вид

$$\Delta S(u)=\ -E\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}H'_u[t,x](w(t,x)-u(t,x))dxdt+o(\varepsilon)\geqslant 0.$$

Отсюда следует, что

$$E\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}H'_u[t,x](w(t,x)-u(t,x))dxdt\leqslant 0. \quad (47)$$

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если множество U выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы неравенство (47) выполнялось для всех $w(t,x)\in U$, $(t,x)\in D$.*

Заметим, что условие (47) представляет собой стохастический аналог линеаризованного интегрального условия максимума [10, 24].

Из неравенства (47), аналогично доказательству леммы из [26], нетрудно вывести, что справедливо следствие.

Следствие (поточечный линеаризованный принцип максимума). *Если множество U выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче* (1)–(4) *необходимо, чтобы*

$$EH'_u[\theta,\xi](v-u(\theta,\xi))\leqslant 0,$$

выполнялось для всех $v\in U$, $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$.

6. Стохастический аналог уравнения Эйлера

Продолжим исследование задачи (1)–(4), предпологая, что множество U является открытым, а $f(t,x,p,u)$ — непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (p,u).

Поскольку по предположению U открытое, то специальное приращение допустимого управления по $u(t,x)$ можно определить по формуле

$$\Delta u(t,x;\,\varepsilon)=\varepsilon\delta u(t,x), \tag{48}$$

где ε — достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t,x)\in U$, $(t,x)\in D$ — произвольная вектор-функция. Через $\Delta z(t,x;\varepsilon)$ обозначим специальное приращение траектории $z(t,x)$, соответствующее приращению (48). Пусть $\psi(t,x)\in L_\infty(D,R^n)$ — решение сопряженной системы (16).

Как известно, вдоль оптимального процесса $(u(t,x),z(t,x))$, вычисляемая обычной техникой [9–11,27], первая вариация (в классическом смысле) функционала $S(u)$ должна равняться нулю, а вторая вариация должна быть неотрицательной:

$$S^1(u,\delta u)=\,-E\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}H'_u[t,x]\delta u(t,x)dxdt=0, \tag{49}$$

$$\begin{gathered}S^2(u,\delta u)=\sum_{i,j\,=\,1}^{k}\delta z'(T_i,X_i)\frac{\partial^2\varphi(z(T_1,X_1),z(T_2,X_2),\ldots,z(T_k,X_k))}{\partial a_i\partial a_j}\delta z(T_j,X_j)-\\ -\delta z'(t,x)H_{zz}[t,x]\delta z(t,x)-2\delta u'(t,x)H_{uz}[t,x]\delta z(t,x)-\\ -\delta u'(t,x)H_{uu}[t,x]\delta u(t,x)\geqslant 0,\end{gathered} \tag{50}$$

для всех $\delta u(t,x)\in L_\infty(D,R^r)$, а $\delta z(t,x)$ — вариация вектора состояния процесса, являющаяся решением уравнения в вариациях

$$\frac{\partial^2\Delta z(t,x)}{\partial t\,\partial x}=f'_z[t,x]\delta z(t,x)+f'_u[t,x]\delta u(t,x)+\mathrm{g}'_z[t,x]\delta z(t,x)\frac{\partial^2W(t,x)}{\partial t\,\partial x},$$

$$\delta z(t_0,x)=0,$$

$$\delta z(t,x_0)=0.$$

Из тождества (49), в силу произвольности $\delta u(t,x)\in L_\infty(D,R^r)$ следует тождество

$$EH_u[\theta,\xi]=0. \tag{51}$$

Иными словами, доказана теорема 3.

Теорема 3 (аналог уравнения Эйлера). *Если множество U открытое, то для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы равенство (51) выполнялось для всех $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$.*

Заключение

С применением стохастического аналога модификации метода приращений в задаче стохастического оптимального управления систем с Гурса – Дарбу, получены различные необходимые условия оптимальности первого порядка.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за ценные замечания.

Список литературы

[1] А. И. Егоров, “Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах распределенными параметрами”, *Автоматика и телемеханика*, **25**:5 (1964), 613–623.

[2] А. И. Егоров, “Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности”, *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **29**:6 (1965), 1205–1260.

[3] В. И. Плотников, В. И. Сумин, “Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса – Дарбу”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **12**:1 (1972), 61–77.

[4] С. С. Ахиев, К. Т. Ахмедов, “Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления”, *Докл. АН Азерб. ССР*, **28**:5 (1972), 12–16.

[5] Л. Т. Ащепков, О. В. Васильев, “Об оптимальности особых управлений в системах Гурса – Дарбу”, *Журн. вычисл. мат. и мат. физики*, **15**:5 (1975), 1157–1167.

[6] Л. Т. Ащепков, О. В. Васильев, И. Л. Коваленок, “Усиленное условие оптимальности особых управлений в системе Гурса – Дарбу”, *Дифференц. уравнения*, **6** (1980), 1054–1059.

[7] В. А. Срочко, “Условия оптимальности для одного класса систем с распределенными параметрами”, *Сиб. мат. журнал*, **2** (1984), 56–65.

[8] Т. К. Меликов, *Исследование особых процессов в некоторых оптимальных системах // Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук*, Баку, 1976, 17 с.

[9] Т. К. Меликов, *Особые в классическом смысле управления в системах Гурса – Дарбу*, Элм, Баку, 2003, 96 с.

[10] К. Б. Мансимов, *Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления // Автореф. дисс. д-ра физ.-мат. наук*, Баку, 1994, 43 с.

[11] К. Б. Мансимов, *Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу*, Элм, Баку, 2010, 360 с.

[12] Ю. М. Ермольев, В. П. Гуленко, Т. И. Царенко, *Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления*, Наукова Думка, Киев, 1978, 164 с.

[13] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1977, 736 с.

[14] В. В. Рачинский, *Введение в общую теорию динамики сорбции и хроматографии*, Наука, М., 1964, 136 с.

[15] М. Х. Бикчентаев, "К оптимальному управлению системами с распределенными параметрами при случайных воздействиях", *Изв.АН СССР. Техн. кибернетика*, **3** (1969), 158–167.

[16] Л. Е. Шайхет, "Об оптимальном управлении одним классом стохастических дифференциалных уравнений в частных производных", *Матем. заметки*, **31**:6 (1982), 933–936.

[17] Л. Е. Шайхет, "О необходимом условии оптимальности управления стохастическими дифференциальными уравнениями гиперболического типа. Теория случайных процессов", *Теория случайных процессов.* Т. 12, Киев, 1984, 96–101.

[18] Л. Е. Шайхет, "Оптимальное управление некоторыми гиперболическими и интегральными уравнениями", *Теория случайных процессов.* Т. 15, Киев, 1987, 110–116.

[19] L. E. Shaikhet, "About an unsolved optimal control problem for stochastic partial differential equation", *XVI International Confrence: Dynamical systems modeliling and stability investigation, Kiev, Ukraine, 29-31 May, 2013*, 2013, 332–334.

[20] J. Yeh, "Wiener measure in a space of functions of two variables", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95** (1960), 433–450.

[21] В. И. Плотников, В. И. Сумин, "Проблема устойчивости нелинейных систем Гурса – Дарбу", *Дифференц. уравнения*, **8**:5 (1972), 845—856.

[22] Л. Л. Пономаренко, "Стохастическая бесконечномерная задача Гурса", *Математический анализ и теория вероятностей*, Киев, 1978, 140-143.

[23] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979, 429 с.

[24] Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, *Принцип максимума в теории оптимального управления*, URSS, М., 2011, 272 с.

[25] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, М., 1983, 392 с.

[26] В. А. Срочко, *Вычислительные методы оптимального управления*, Изд-во ИГУ, Иркутск, 1982, 110 с.

[27] Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, *Особые оптимальные управления*, Книжный дом "Либроком", М., 2013, 256 с.

Поступила в редакцию
23 сентября 2020 г.

Mastaliyev R. O.[1] First order necessary optimal conditions in Gursat-Darboux stochastic systems. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2021. V. 21. No 1. P. 89–104.

[1] Institute of Control Systems, National Academy of Sciences of Azerbaijan, Azerbaijan

ABSTRACT

For optimal control problems, described by the Gursat-Darboux stochastic system, a number of first-order necessary optimality conditions are formulated and proved, which are the stochastic analogue - the Pontryagin maximum principle, the linearized maximum principle and the Euler equation.

Key words: *nonlinear Gursat-Darboux stochastic system, optimal control, necessary optimality conditions, analogue of the Euler equation.*

References

[1] A. I. Egorov, "Ob optimal'nom upravlenii protsessami v nekotorykh sistemakh raspredelennymi parametrami", *Avtomatika i telemekhanika*, **25**:5 (1964), 613–623.

[2] A. I. Egorov, "Optimal'nye protsessy v sistemakh s raspredelennymi parametrami i nekotorye zadachi teorii invariantnosti", *Izv. AN SSSR, Ser. matem.*, **29**:6 (1965), 1205–1260.

[3] V. I. Plotnikov, V. I. Sumin, "Optimizatsiia ob"ektov s raspredelennymi parametrami, opisyvaemykh sistemami Gursa – Darbu", *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **12**:1 (1972), 61–77.

[4] S. S. Akhiev, K. T. Akhmedov, "Neobkhodimye usloviia optimal'nosti dlia nekotorykh zadach teorii optimal'nogo upravleniia", *Dokl. AN Azerb. SSR*, **28**:5 (1972), 12–16.

[5] L. T. Ashchepkov, O. V. Vasil'ev, "Ob optimal'nosti osobykh upravlenii v sistemakh Gursa – Darbu", *Zhurn. vychisl. mat. i mat. fiziki*, **15**:5 (1975), 1157–1167.

[6] L. T. Ashchepkov, O. V. Vasil'ev, I. L. Kovalenok, "Usilennoe uslovie optimal'nosti osobykh upravlenii v sisteme Gursa – Darbu", *Differents. uravneniia*, **6** (1980), 1054–1059.

[7] V. A. Srochko, "Usloviia optimal'nosti dlia odnogo klassa sistem s raspredelennymi parametrami", *Sib. mat. zhurnal*, **2** (1984), 56–65.

[8] T. K. Melikov, *Issledovanie osobykh protsessov v nekotorykh optimal'nykh sistemakh // Avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk*, Baku, 1976, 17 pp.

[9] T. K. Melikov, *Osobye v klassicheskom smysle upravleniia v sistemakh Gursa – Darbu*, Elm, Baku, 2003, 96 pp.

[10] K. B. Mansimov, *Neobkhodimye usloviia optimal'nosti osobykh protsessov v zadachakh optimal'nogo upravleniia // Avtoref. diss. d-ra fiz.-mat. nauk*, Baku, 1994, 43 pp.

[11] K. B. Mansimov, *Kachestvennaia teoriia optimal'nogo upravleniia sistemami Gursa-Darbu*, Elm, Baku, 2010, 360 pp.

[12] Iu. M. Ermol'ev, V. P. Gulenko, T. I. Tsarenko, *Konechno-raznostnyi metod v zadachakh optimal'nogo upravleniia*, Naukova Dumka, Kiev, 1978, 164 pp.

[13] A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Uravneniia matematicheskoi fiziki*, Nauka, M., 1977, 736 pp.

[14] V. V. Rachinskii, *Vvedenie v obshchuiu teoriiu dinamiki sorbtsii i khromatografii*, Nauka, M., 1964, 136 pp.

[15] M. Kh. Bikchentaev, "K optimal'nomu upravleniiu sistemami s raspredelennymi parametrami pri sluchainykh vozdeistviiakh", *Izv.AN SSSR. Tekhn. kibernetika*, **3** (1969), 158–167.

[16] L. E. Shaikhet, "Ob optimal'nom upravlenii odnim klassom stokhasticheskikh differentsialnykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh", *Matem. zametki*, **31**:6 (1982), 933–936.

[17] L. E. Shaikhet, "O neobkhodimom uslovii optimal'nosti upravleniia stokhasticheskimi differentsial'nymi uravneniiami giperbolicheskogo tipa. Teoriia sluchainykh protsessov", *Teoriia sluchainykh protsessov.* V. 12, Kiev, 1984, 96–101.

[18] L. E. Shaikhet, "Optimal'noe upravlenie nekotorymi giperbolicheskimi i integral'nymi uravneniiami", *Teoriia sluchainykh protsessov.* V. 15, Kiev, 1987, 110–116.

[19] L. E. Shaikhet, "About an unsolved optimal control problem for stochastic partial differential equation", *XVI International Confrence: Dynamical systems modeliling and stability investigation, Kiev, Ukraine, 29-31 May, 2013*, 2013, 332–334.

[20] J. Yeh, "Wiener measure in a space of functions of two variables", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95** (1960), 433–450.

[21] V. I. Plotnikov, V. I. Sumin, "Problema ustoichivosti nelineinykh sistem Gursa – Darbu", *Differents. uravneniia*, **8**:5 (1972), 845—856.

[22] L. L. Ponomarenko, "Stokhasticheskaia beskonechnomernaia zadacha Gursa", *Matematicheskii analiz i teoriia veroiatnostei*, Kiev, 1978, 140-143.

[23] V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal'noe upravlenie*, Nauka, M., 1979, 429 pp.

[24] R. Gabasov, F. M. Kirillova, *Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniia*, URSS, M., 2011, 272 pp.

[25] L. S. Pontriagin, V. G. Boltianskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *Matematicheskaia teoriia optimal'nykh protsessov*, Nauka, M., 1983, 392 pp.

[26] V. A. Srochko, *Vychislitel'nye metody optimal'nogo upravleniia*, Izd-vo IGU, Irkutsk, 1982, 110 pp.

[27] R. Gabasov, F. M. Kirillova, *Osobye optimal'nye upravleniia*, Knizhnyi dom "Librokom", M., 2013, 256 pp.