Дальневосточный математический журнал. 2021. Т. 21. № 1. С. 105–112

УДК 517.957
MSC2020 80A22+35K55+46N20

© А. Г. Подгаев[1], Т. Д. Кулеш[1]

Теоремы компактности для задач с неизвестной границей

Доказана теорема компактности для последовательностей функций, имеющих оценки старших производных в каждой подобласти области определения, разделенной на части последовательностью некоторых кривых класса W_2^1. При этом во всей области определения суммируемых старших производных эти последовательности не имеют. Эти результаты позволяют совершать предельные переходы по приближенным решениям в задачах с неизвестной границей, описывающих процессы фазовых переходов.

Ключевые слова: *задачи Стефана, нелинейное параболическое уравнение, нецилиндрическая область, теорема компактности.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202109

Введение

Различные задачи, в которых описываются процессы, сопровождающиеся фазовыми превращениями среды с поглощением или выделением скрытой теплоты, вследствие чего появляются неизвестные заранее границы фазовых переходов (называемых свободными границами), называют задачами Стефана. Основная цель исследования — доказать теорему компактности, позволяющую при исследованиях разрешимости многофазных задач с неизвестной границей и с условием типа Стефана на границах фаз, совершить предельный переход в итерационном процессе. Специфика таких задачах состоит в том, что оценки старших производных по всей рассматриваемой области просто невозможны. Это являлось препятствием при обоснованиях разрешимости таких задач и приводило к необходимости построения различных методик для преодоления трудностей предельных переходов. Однако теорема имеет самостоятельный интерес и сформулирована независимо от возможных её применений.

Обоснование использует некоторые методы исследования компактности абстрактных функций из “шкалы” банаховых пространств [1], являющиеся обобщением (на

[1] Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
Электронная почта: pvu1707@mail.ru (А. Г. Подгаев), 2015302323@pnu.edu.ru (Т. Д. Кулеш).

случай функций со значениями в семействе пространств) теорем компактности из Aubin J. [2], Simon J. [3], Дубинского Ю. А. [4]. При этом в теоремах из [2–4] “шкала” вообще не рассматривалась, но требования гладкости по пространственной и временной переменным также были различны.

Примеры, в которых возникают множества функций, к которым можно применить полученные результаты, находим, например, в [5] (случай одной фазы), в [6] (близкие к двухфазным задачи, но в заданных областях), в [7], (где рассматривается случай многих фаз).

1. Формулировка результата

Без уменьшения общности рассмотрим случай двух фаз с порядком старших производных у функций равным двум. Рассматриваются последовательности функции u_n двух действительных переменных (x,t). Чтобы технические подробности не заслонили существа доказательства, рассмотрим случай, когда ограничения на старшие производные сформулированы для самого семейства u_n, а не для, например, $f(u_n)$. Показатель суммируемости старших производных взят равным двум, но и здесь возможно рассмотрение общего случая.

Пусть для области $Q \subset R^2$,

$$Q = \big\{(x,t) : a < x < b, \quad 0 < t < T\big\}$$

имеется последовательность линий, заданных последовательностью функций $x = s^n(t), \quad t \in [0,T]$, для которых для всех t выполнено $a \leqslant s^n(t) \leqslant b$, и эти линии делят область Q на соответствующую последовательность частей

$$Q_n^{\pm} = Q \cap \big\{(x,t) : \pm x < \pm s^n(t)\big\}.$$

И пусть имеется последовательность определенных в Q функций $w_n(x,t)$.

Теорема. *Пусть для последовательностей $s^n(t)$ и $w_n(x,t)$ существует постоянная с такая, что для всех n выполнены неравенства:*

$$\|w_n\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(a,b))} \leqslant c; \qquad \|w_{nt}\|_{L_2(Q)} \leqslant c,$$

функции w_n имеют в Q_n^+ и в Q_n^- вторые обобщенные производные по x, причем

$$\int\limits_0^T \int\limits_a^{s^n(\tau)} w_{nxx}^2 dx d\tau + \int\limits_0^T \int\limits_{s^n(\tau)}^b w_{nxx}^2 dx d\tau \leqslant c \quad \text{и} \quad s^n(t) \to s(t) \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T].$$

Тогда для любого $1 \leqslant q < 2$ последовательность w_n относительно компактна в $L_q(0,T;W_q^1(a,b))$.

2. Стационарный случай

Пусть, на время s^n и s константы, $a \leqslant s^n \leqslant b$ и $s^n \to s$ при $n \to \infty$; и пусть число $0<\nu<1$ фиксировано.

Рассмотрим для заданного c множество функций, определённых на $[a,b]$

$$G_c = \left\{ w_n(x) \in C^\nu([a,b]) : \int_a^b (w_n^2 + w_{nx}^2) dx \leqslant c, \quad \text{где} \right.$$

$$\left. a \leqslant s^n \leqslant b,\ s^n \to s,\ \int_a^{s^n} w_{nxx}^2 dx + \int_{s^n}^b w_{nxx}^2 dx \leqslant c \right\}.$$

Заметим, что на всем промежутке $[a,b]$ функции w_n могут не иметь вторых суммируемых обобщенных производных.

Лемма 1. *Для любого $c < \infty$ множество G_c для всех $q_0 : 1 \leqslant q_0 < 2$ относительно компактно в $W^1_{q_0}(a,b)$.*

Доказательство. Определим числа

$$S_N^- = \inf_{n \geqslant N} \{s^n, n = 1,2,3,...\}, \quad S_N^+ = \sup_{n \geqslant N} \{s^n, n = 1,2,3,...\}.$$

Тогда для всех N и всех $n \geqslant N$ выполнены неравенства

$$S_{N+1}^- \geqslant S_N^-,\ S_N^+ \geqslant S_{N+1}^+,\ S_N^- \leqslant s^n \leqslant S_N^+ \quad \text{и} \quad S_N^- \to s,\ S_N^+ \to s \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Функции $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ из пространства $W_2^1(a,b)$ начиная с $n \geqslant N$ принадлежат $W_2^2(a, S_N^-)$ и, в силу последней оценки в определении G_c, равномерно ограничены в норме $W_2^2(a, S_N^-)$. Поэтому существует подпоследовательность, для которой $w_n \to w$ в $W_2^1(a, S_1^-)$. Отбросим у этой последовательности первый элемент (если он оказался элементом w_1.) Оставшаяся часть будет состоять из функций, определенных в области $x \in (a,b)$ и равномерно ограниченных в норме $W_2^2(a, S_2^-)$. Поэтому у нее существует подпоследовательность, сходящаяся по норме $W_2^1(a, S_2^-)$ к той же самой функции. И так далее. Диагональная последовательность состоит из функций пространства $W_2^1(a,b)$ и обладает тем свойством, что для всех N ее "хвост", начиная с номера N, равномерно ограничен в $W_2^2(a, S_N^-)$. Обозначим её $\{w_n\}_{n \in A}$, где A — некоторое бесконечное подмножество натуральных чисел. Сохраняя для этой последовательности прежнее обозначение w_n, далее считаем, что $n \in A$.

Для построенной последовательности $\{w_n\}_{n \in A}$ проведем аналогичный выбор диагональной подпоследовательности, связанный с последовательностью S_N^+. Новая диагональная подпоследовательность состоит из функций пространства $W_2^1(a,b)$ и обладает тем свойством, что для всех N ее "хвост", начиная с номера N, равномерно ограничен в $W_2^2(a, S_N^+)$. Сохраним для неё обозначение $\{w_n\}_{n \in B}$.

Докажем, что она сходится в $W^1_{q_0}(a,b)$ для любого $1 \leqslant q_0 < 2$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $N_1(\varepsilon)$ так, чтобы для всех $n, m \in B$, $n, m \geqslant N_1$ выполнялись неравенства

$$|S_{N_1}^- - s^n| < \varepsilon, \quad |S_{N_1}^- - s^m| < \varepsilon, \quad |S_{N_1}^+ - s^n| < \varepsilon, \quad |S_{N_1}^+ - s^m| < \varepsilon.$$

Представим (a,b) в виде $(a,S^-_{N_1}]\bigcup(S^-_{N_1},S^+_{N_1}]\bigcup(S^+_{N_1},b)$. Тогда имеем для всех $n\geqslant N_1, m\geqslant N_1$:

$$\int\limits_a^b |w_{nx}-w_{mx}|^{q_0}dx \leqslant \int\limits_a^{S^-_{N_1}} + \int\limits_{S^-_{N_1}}^{S^+_{N_1}} + \int\limits_{S^+_{N_1}}^{b}.$$

Оценим второе слагаемое

$$\int\limits_{S^-_{N_1}}^{S^+_{N_1}} |w_{nx}-w_{mx}|^{q_0}dx \leqslant \left\{\int\limits_{S^-_{N_1}}^{S^+_{N_1}} |w_{nx}-w_{mx}|^{2}dx\right\}^{\frac{q_0}{2}} |S^-_{N_1}-S^+_{N_1}|^{\chi} \leqslant c^{\frac{q_0}{2}}(2\varepsilon)^{\chi}, \quad \chi>0.$$

Оценим первое

$$\int\limits_a^{S^-_{N_1}} |w_{nx}-w_{mx}|^{q_0}dx \overset{n,m\geqslant N_1}{\leqslant} (b-a)^{\frac{2-q_0}{2}} \|w_{nx}-w_{mx}\|^{q_0}_{L_2(a,S^-_{N_1})}. \tag{1}$$

Аналогично оценивается третье слагаемое

$$\int\limits_{S^+_{N_1}}^{b} |w_{nx}-w_{mx}|^{q_0}dx \overset{n,m\geqslant N_1}{\leqslant} (b-a)^{\frac{2-q_0}{2}} \|w_{nx}-w_{mx}\|^{q_0}_{L_2(S^+_{N_1},b)}. \tag{2}$$

Так как хвост диагональной последовательности $\{w_n\}_{n\in B}$ сходится в нормах $W^1_2(a,S^-_{N_1})$ и $W^1_2(S^+_{N_1},b)$, то по $\varepsilon>0$ найдется $N_2(\varepsilon)$ такое, что при $n,m\geqslant N_2$, $n,m\in B$ выполнены неравенства

$$\|w^n-w^m\|_{W^1_2(a,S^-_{N_1})}<\varepsilon, \quad \|w^n-w^m\|_{W^1_2(S^+_{N_1},b)}<\varepsilon.$$

Увеличив, если надо, $N_2(\varepsilon)$, считаем, что $N_2(\varepsilon)\geqslant N_1(\varepsilon)$. Отсюда следует, что правые части в (1) и (2) для $n,m\geqslant N_2(\varepsilon), n,m\in B$ оцениваются через $\tilde c\varepsilon^{q_0}$. Поэтому,

$$\int\limits_a^b |w_{nx}-w_{mx}|^{q_0}dx \leqslant \tilde c(2\varepsilon^{q_0}+(2\varepsilon)^{\chi}),\ \tilde c = max(4c^{\frac{q_0}{2}},(b-a)^{\frac{2-q_0}{2}})$$

для всех $n,m\geqslant N_2(\varepsilon), n,m\in B$. Относительная компактность G_c установлена. □

3. Нестационарный случай

Зададим последовательность неубывающих функций $\{s^n(t)\}^{\infty}_{n=1}, t\in[0,T]$ такую, что $a\leqslant s^n(t)\leqslant b, s^n(t)\to s(t)$ для всех $t\in[0,T]$. По функциям двух переменных $w_n(x,t)$, определенным в области Q и имеющих суммируемые обобщенные производные $w_{nxx}(x,t)$ на каждой из нецилиндрических областей

$$\big\{(x,t): t\in[0,T],\, a\leqslant x\leqslant s^n(t)\big\} \quad \text{и} \quad \big\{(x,t): t\in[0,T],\, s^n(t)\leqslant x\leqslant b\big\},$$

определим для фиксированного c множество:

$$F_c = \Big\{ w_n : \|w_n\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(a,b))} \leqslant c, \ \|w_{nt}\|_{L_2(Q)} \leqslant c,$$
$$\int\limits_0^T \int\limits_a^{s^n(t)} w_{nxx}^2 dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_{s^n(t)}^b w_{nxx}^2 dxdt \leqslant c \Big\}.$$

Определим измеримые множества

$$S_n = \Big\{ t \in [0,T] : \|w_n(\cdot,t)\|_{W_2^1(a,b)} \leqslant c < \infty,$$
$$\|w_{nxx}(\cdot,t)\|_{L_2(a,s^n(t))} + \|w_{nxx}(\cdot,t)\|_{L_2(s^n(t),b)} < \infty \Big\}.$$

Мера S_n равна мере $[0,T]$, так как для w_n выполнена первая оценка при определении F_c и, в силу третьей оценки, функции

$$\|w_{nxx}(\cdot,t)\|_{L_2(a,s^n(t))}, \ \|w_{nxx}(\cdot,t)\|_{L_2(s^n(t),b)},$$

как функции t, почти всюду на $[0,T]$ конечны. Поэтому для множества $S = \cup_n S_n$, имеем $S \subseteq [0,T]$ и мера S равна мере $[0,T]$.

Справедливо следующее утверждение, аналогичное леммам из [1].

Лемма 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $c(\varepsilon)$ такое, что для всех $t \in S$ и для всех натуральных n и m выполнено неравенство*

$$\|w_n(\cdot,t) - w_m(\cdot,t)\|_{W_{q_0}^1(a,b)}^{q_0} \leqslant \varepsilon \left(1 + \int\limits_a^{s^n(t)} w_{nxx}^2(x,t)dx + \int\limits_{s^n(t)}^b w_{nxx}^2(x,t)dx + \right.$$
$$\left. + \int\limits_a^{s^m(t)} w_{mxx}^2(x,t)dx + \int\limits_{s^m(t)}^b w_{mxx}^2(x,t)dx \right) + c(\varepsilon)\|w_n(\cdot,t) - w_m(\cdot,t)\|_{L_2(a,b)}^2.$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не выполнено. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$, что для любого натурального k найдутся $t_k \in S$ и натуральные n_k и m_k, для которых выполнено неравенство

$$\|w_{n_k}(\cdot,t_k) - w_{m_k}(\cdot,t_k)\|_{W_{q_o}^1(a,b)}^{q_0} >$$
$$> \varepsilon_0 \left(1 + \int\limits_a^{s^{n_k}(t_k)} w_{n_k xx}^2(x,t_k)dx + \int\limits_{s^{n_k}(t_k)}^b w_{n_k xx}^2(x,t_k)dx + \int\limits_a^{s^{m_k}(t_k)} w_{m_k xx}^2(x,t_k)dx + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{s^{m_k}(t_k)}^b w_{m_k xx}^2(x,t_k)dx \right) + k\|w_{n_k}(\cdot,t_k) - w_{m_k}(\cdot,t_k)\|_{L_2(a,b)}^2.$$

Обозначим $\varphi_k(x)=w_{n_k}(x,t_k)$, $\psi_k(x)=w_{m_k}(x,t_k)$, $s_k^1=s^{n_k}(t_k)$, $s_k^2=s^{m_k}(t_k)$. В этих обозначениях, вспоминая определения F_c и S, последнее неравенство с некоторой константой c_1 можно переписать в виде

$$c_1 \geqslant \|\varphi_k-\psi_k\|^{q_0}_{W^1_{q_0}(a,b)} >$$
$$> \varepsilon_0\left(1+\int\limits_a^{s_k^1}\varphi^2_{kxx}dx+\int\limits_{s_k^1}^b\varphi^2_{kxx}dx+\int\limits_a^{s_k^2}\psi^2_{kxx}dx+\int\limits_{s_k^2}^b\psi^2_{kxx}dx\right)+k\|\varphi_k-\psi_k\|^2_{L_2(a,b)}.$$

Выбирая подпоследовательность, считаем, что $s_k^1\longrightarrow s_1, s_k^2\longrightarrow s_2$. Нетрудно увидеть, что функции одной переменной φ_k и ψ_k принадлежат G_{c_2} с $c_2=\max(c_1/\varepsilon_0,c)$. Тогда, в силу Леммы 1, выбирая, если необходимо, подпоследовательность, можно считать, что $\varphi_k\longrightarrow\varphi$ и $\psi_k\longrightarrow\psi$ в $W^1_{q_0}(a,b)$. Поэтому,

$$\varphi_k-\psi_k\longrightarrow\varphi-\psi \quad \text{в} \quad W^1_{q_0}(a,b).$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\|\varphi_k-\psi_k\|^2_{L_2(a,b)}\leqslant c_1/k\longrightarrow 0,$$

то есть $\varphi-\psi=0$. Это противоречит условию

$$\|\varphi_k-\psi_k\|^{q_0}_{W^1_{q_0}(a,b)}>\varepsilon_0,$$

вытекающему из того же неравенства. □

4. Доказательство Теоремы

Интегрируя неравенство Леммы 2 по t, получим, что для любого $\varepsilon>0$ найдется постоянная $c(\varepsilon)$ такая, что для всех n и m верно неравенство

$$\int\limits_0^T\|w_n(\cdot,t)-w_m(\cdot,t)\|^{q_0}_{W^1_{q_0}(a,b)}dt\leqslant\varepsilon\left(T+\int\limits_0^T\int\limits_a^{s^n(t)}w^2_{nxx}(x,t)dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_{s^n(t)}^b w^2_{nxx}(x,t)dxdt+\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^T\int\limits_a^{s^m(t)}w^2_{mxx}(x,t)dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_{s^m(t)}^b w^2_{mxx}(x,t)dxdt\right)+c(\varepsilon)\int\limits_0^T\|w_n(\cdot,t)-w_m(\cdot,t)\|^2_{L_2(a,b)}dt\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon(T+2c)+c(\varepsilon)\int\limits_0^T\|w_n(\cdot,t)-w_m(\cdot,t)\|^2_{L_2(a,b)}dt. \tag{3}$$

По определению F_c верна оценка $\|w_n\|_{W^1_2(Q)}\leqslant c$. Поэтому существует подпоследовательность w_n, сходящаяся сильно в $L_2(Q)$. Из неравенства (3) легко выводим, что эта подпоследовательность будет также сходиться по норме пространства $L_{q_0}(0,T;W^1_{q_0}(a,b))$.

Теорема доказана. Отметим, что случай, когда непересекающихся фаз, на которые делится область Q, конечное число, рассматривается по этой же схеме.

Список литературы

[1] A. G Podgaev, "On Relative Compactness Set of Abstract Function from Scale of the Banach Spaces", *Functional Analysis, Approximation Theory and Numerical Analysis.*, Word Scientific Publishing Co, 1994, 219–236.

[2] J. Aubin, "Un theoreme de compacte", *Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris)*, **256** (1963), 5042–5044.

[3] J. Simon, "Compact Sets in the $L_p(0,T;B)$", *Annalidi Matematica pura ed applicata (IV)*, **CXLVI** (1987), 65–96.

[4] Ю. А. Дубинский, "Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях", *Матем. сб.*, **67 (109)**:4 (1965).

[5] А. Г. Подгаев, "Разрешимость осесимметричной задачи для нелинейного параболического уравнения в областях с нецилиндрической или неизвестной границей. I", *Челяб. физ.-матем. журнал.*, **5**:1 (2020), 44–55.

[6] С. В. Попов, А. И. Шадрина, "Контактные параболические краевые задачи для уравнений второго порядка.", *Математические заметки ЯГУ*, **16**:2 (2009), 66–77.

[7] А. М. Мейрманов, *Задача Стефана*, Наука, Новосибирск, 1986.

Поступила в редакцию
28 марта 2021 г.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, Хабаровского отделения регионального научно-образовательного математического центра «Дальневосточный центр математических исследований» (дополнительное соглашение № 075-02-2020-1529/1 от 21 апреля 2020 г.)

Podgaev A. G.[1], *Kulesh T. D.*[1] Compactness theorems for problems with unknown boundary. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2021. V. 21. No 1. P. 105–112.

[1] Pacific National University, Russia

ABSTRACT

The compactness theorem is proved for sequences of functions that have estimates of the higher derivatives in each subdomain of the domain of definition, divided into parts by a sequence of some curves of class W_2^1. At the same time, in the entire domain of determining summable higher derivatives, these sequences do not have. These results allow us to make limit transitions using approximate solutions in problems with an unknown boundary that describe the processes of phase transitions.

Key words: *Stefan's problems, quasilinear parabolic equation, non-cylindrical domain, compactness theorem.*

References

[1] A. G Podgaev, "On Relative Compactness Set of Abstract Function from Scale of the Banach Spaces", *Functional Analysis, Approximation Theory and Numerical Analysis.*, Word Scientific Publishing Co, 1994, 219–236.

[2] J. Aubin, "Un theoreme de compacte", *Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris)*, **256** (1963), 5042–5044.

[3] J. Simon, "Compact Sets in the $L_p(0, T; B)$", *Annalidi Matematica pura ed applicata (IV)*, **CXLVI** (1987), 65–96.

[4] Iu. A. Dubinskii, "Slabaia skhodimost' v nelineinykh ellipticheskikh i parabolicheskikh uravneniiakh", *Matem. sb.*, **67 (109)**:4 (1965).

[5] A. G. Podgaev, "Razreshimost' osesimmetrichnoi zadachi dlia nelineinogo paraboliche- skogo uravneniia v oblastiakh s netsilindricheskoi ili neizvestnoi granitsei. I", *Cheliab. fiz.-matem. zhurnal.*, **5**:1 (2020), 44–55.

[6] S. V. Popov, A. I. Shadrina, "Kontaktnye parabolicheskie kraevye zadachi dlia uravnenii vtorogo poriadka.", *Matematicheskie zametki IaGU*, **16**:2 (2009), 66–77.

[7] A. M. Meirmanov, *Zadacha Stefana*, Nauka, Novosibirsk, 1986.