

УДК 517.583+512.742.72

MSC2020 14T90

© М. О. Авдеева<sup>1</sup>

## Периодические ультрадискретные преобразования плоскости с периодами 5, 7, 8, 9

В дополнение к двум известным периодическим ультрадискретным преобразованиям плоскости В. А. Быковским были построены три новых. В его работе была предложена лишь идея доказательства этих утверждений. Мы приводим полное и подробное их доказательство для последовательностей с периодами 5, 7, 8, 9.

**Ключевые слова:** нелинейные рекуррентные последовательности, тропические последовательности, нелинейные периодические преобразования.

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202111>

В работе [1] были построены два периодических преобразования плоскости  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= (y, z) & \text{с} & \quad z = \min\{-x, -x - y\}, \\ T_2(x, y) &= (y, z) & \text{с} & \quad z = \min\{-x - y, -x - 2y\} \end{aligned}$$

с периодами 7 и 8 соответственно. В другой работе [2] были построены еще два преобразования

$$\begin{aligned} T_3(x, y) &= (y, z) & \text{с} & \quad z = \min\{-x, -x + y\}, \\ T_4(x, y) &= (y, z) & \text{с} & \quad z = \min\{-x - y, -x + y\}. \end{aligned}$$

Эти преобразования возникают в результате выполнения процедуры ультрадискретизации (см. [3]) нелинейных рекуррентных соотношений ( $n \in \mathbb{Z}$ )

$$u_1(n+2)u_1(n+1)u_1(n) = \alpha u_1(n+1) + \beta, \quad (1)$$

$$u_2(n+2)u_2^2(n+1)u_2(n) = \alpha u_2(n+1) + \beta, \quad (2)$$

$$u_3(n+2)u_3(n) = \alpha u_3(n+1) + \beta, \quad (3)$$

$$u_4(n+2)u_4(n+1)u_4(n) = \alpha u_4^2(n+1) + \beta, \quad (4)$$

определяющих последовательности рациональных функций от переменных  $\alpha, \beta$  и начальных значений  $u_i(0) = x, u_i(1) = y$ , также рассматриваемых как переменные.

<sup>1</sup>Хабаровское отделение Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 34. Электронная почта: [avdeeva@iam.dvo.ru](mailto:avdeeva@iam.dvo.ru)

### 1. Периодичность преобразования $T_1$

При выполнении ультрадискретизации соотношения (1) возникает последовательность точек плоскости  $P_1(n) = (p_1(n), p_1(n+1))$ . Она определяется начальной точкой  $P_1(0) = (1, 0)$  и рекуррентным соотношением  $P_1(n+1) = T_1(P_1(n))$ .

**Теорема 1.** Преобразование плоскости  $T_1$  периодическое с длиной периода 7.

*Доказательство.* Для  $0 \leq t \leq 1$  определим последовательность отрезков  $\mathcal{P}_k(t)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) на плоскости с помощью рекуррентного соотношения

$$\mathcal{P}_{k+1}(t) = T_1(\mathcal{P}_k(t))$$

и начального значения

$$\mathcal{P}_0(t) = [1 - t, t].$$

Легко проверить, что эта последовательность периодическая с периодом

$$[1 - t, t], [t, -1], [-1, -t], [-t, 1], [1, -1 + t], [-1 + t, -1], [-1, 1 - t]$$

длиной 7. При этом множества

$$\{\mathcal{P}_k(t) \mid 0 \leq t < 1\}$$

являются прямолинейными полуинтервалами на плоскости  $Oxy$  (рис. 1). Для  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  они не пересекаются, и их объединение — выпуклый семиугольник с вершинами в точках  $\mathcal{P}_k(0) = P_1(n)$  с  $k = n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ :

$$(1, 0), (0, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1).$$

Преобразование  $T_1$  отображает этот семиугольник на себя, и при этом каждая его сторона переходит в некоторую другую. Следовательно, для любой начальной точки

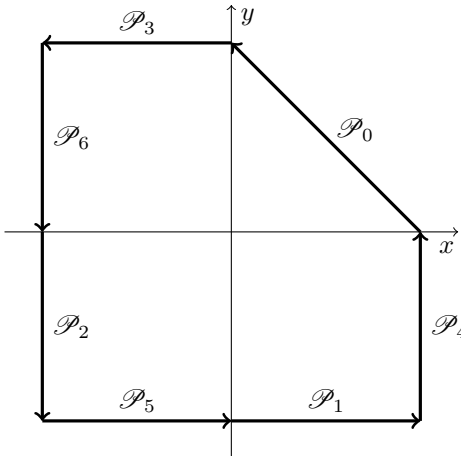


Рис. 1

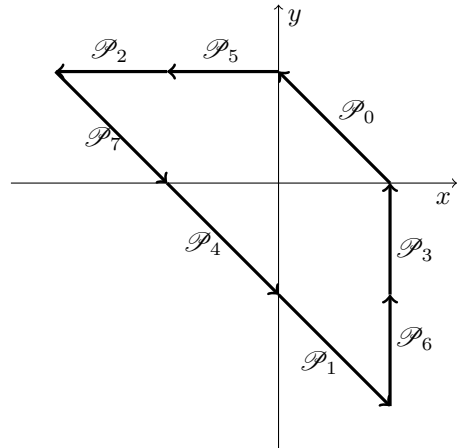


Рис. 2

$P_0$  в вершине семиугольника последовательность точек, определяемая рекуррентным соотношением  $P_{k+1} = T_1(P_k)$ , — периодическая с длиной периода 7. Так как для любого  $r \geq 0$  последовательность  $rp_1(n)$  удовлетворяет рекуррентному соотношению для  $p_1(n)$  и точка  $(0, 0)$  лежит внутри семиугольника, то утверждение теоремы 1 справедливо при любом выборе начальной точки.  $\square$

## 2. Периодичность преобразования $T_2$

При выполнении ультрадискретизации соотношения (2) возникает последовательность точек плоскости  $P_2(n) = (p_2(n), p_2(n+1))$ . Она определяется начальной точкой  $P_2(0) = (1, 0)$  и рекуррентным соотношением  $P_2(n+1) = T_2(P_2(n))$ .

**Теорема 2.** Преобразование плоскости  $T_2$  периодическое с длиной периода 8.

*Доказательство.* Для  $0 \leq t \leq 1$  определим последовательность отрезков  $\mathcal{P}_k(t)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) на плоскости с помощью рекуррентного соотношения

$$\mathcal{P}_{k+1}(t) = T_2(\mathcal{P}_k(t)), \quad \mathcal{P}_0(t) = [1 - t, t].$$

Эта последовательность периодическая с периодом

$$[1 - t, t], [t, -1 - t], [-1 - t, 1], [1, t - 1], [t - 1, -t], [-t, 1], [1, t - 2], [t - 2, 1 - t]$$

длиной 8. Множества

$$\{\mathcal{P}_k(t) \mid 0 \leq t < 1\}$$

являются прямолинейными полуинтервалами на плоскости  $Oxy$  (рис. 2). Для  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7$  они не пересекаются, и их объединение — выпуклый восьмиугольник с вершинами в точках  $\mathcal{P}_k(0) = P_2(n)$  с  $k = n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ :

$$(1, 0), (0, -1), (-1, 1), (1, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, -2), (-2, 1).$$

Преобразование  $T_2$  отображает этот восьмиугольник на себя, и при этом каждая его сторона переходит в некоторую другую. Следовательно, для любой начальной точки  $P_0$  в вершине семиугольника последовательность точек, определяемая рекуррентным соотношением  $P_{k+1} = T_2(P_k)$ , — периодическая с длиной периода 7. Так как для любого  $r \geq 0$  последовательность  $rp_2(n)$  удовлетворяет рекуррентному соотношению для  $p_2(n)$  и точка  $(0, 0)$  лежит внутри восьмиугольника, то утверждение теоремы 2 справедливо при любом выборе начальной точки.  $\square$

## 3. Периодичность преобразования $T_3$

При выполнении ультрадискретизации соотношения (3) возникает последовательность точек плоскости  $P_3(n) = (p_3(n), p_3(n+1))$ . Она определяется начальной точкой  $P_3(0) = (1, 0)$  и рекуррентным соотношением  $P_3(n+1) = T_3(P_3(n))$ .

**Теорема 3.** Преобразование плоскости  $T_3$  периодическое с длиной периода 5.

**Доказательство.** Для  $0 \leq t \leq 1$  определим последовательность отрезков  $\mathcal{P}_k(t)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) на плоскости с помощью рекуррентного соотношения

$$\mathcal{P}_{k+1}(t) = T_3(\mathcal{P}_k(t)), \quad \mathcal{P}_0(t) = [1 - t, t].$$

Эта последовательность периодическая с периодом

$$[1 - t, t], [t, -1 + t], [-1 + t, -1], [-1, -t], [-t, 1 - t]$$

длиной 5. Множества

$$\{\mathcal{P}_k(t) \mid 0 \leq t < 1\}$$

являются прямолинейными полуинтервалами на плоскости  $Oxy$  (рис. 3). Для  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  они не пересекаются, и их объединение — выпуклый пятиугольник с вершинами в точках  $\mathcal{P}_k(0) = P_3(n)$  с  $k = n = 0, 1, 2, 3, 4$

$$(1, 0), (0, -1), (-1, -1), (-1, 0), (0, 1).$$

Преобразование  $T_3$  отображает этот пятиугольник на себя, и при этом каждая его сторона переходит в некоторую другую. Следовательно, для любой начальной точки  $P_0$  в вершине восьмиугольника последовательность точек, определяемая рекуррентным соотношением  $P_{k+1} = T_3(P_k)$ , — периодическая с длиной периода 5. Так как для любого  $r \geq 0$  последовательность  $rp_3(n)$  удовлетворяет рекуррентному соотношению для  $p_3(n)$  и точка  $(0, 0)$  лежит внутри восьмиугольника, то утверждение теоремы 3 справедливо при любом выборе начальной точки.  $\square$

#### 4. Периодичность преобразования $T_4$

При выполнении ультрадискретизации соотношения (4) возникает последовательность точек плоскости  $P_4(n) = (p_4(n), p_4(n+1))$ . Она определяется начальной точкой  $P_4(0) = (1, 0)$  и рекуррентным соотношением  $P_4(n+1) = T_4(P_4(n))$ .

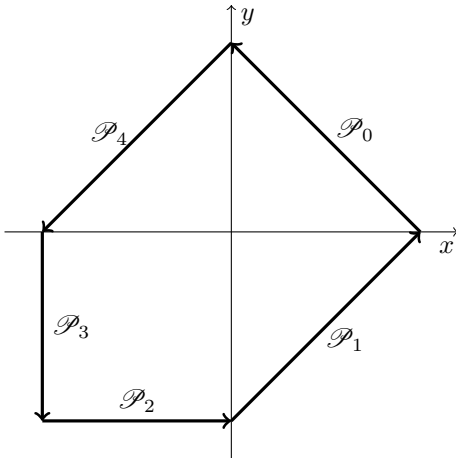


Рис. 3

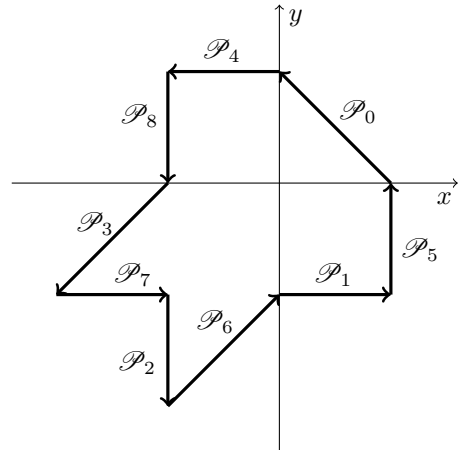


Рис. 4

**Теорема 4.** Преобразование плоскости  $T_4$  периодическое с длиной периода 9.

**Доказательство.** Для  $0 \leq t \leq 1$  определим последовательность  $\mathcal{P}_k(t)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) на плоскости с помощью рекуррентного соотношения

$$\mathcal{P}_{k+1}(t) = T_4(\mathcal{P}_k(t)), \quad \mathcal{P}_0(t) = [1 - t, t].$$

Эта последовательность периодическая с периодом

$$[1 - t, t], [t, -1], [-1, -t - 1], [-t - 1, -t], \\ [-t, 1], [1, t - 1], [t - 1, -2 + t], [-2 + t, -1], [-1, 1 - t]$$

длиной 9. Множества

$$\{\mathcal{P}_k(t) \mid 0 \leq t < 1\}$$

являются прямолинейными полуинтервалами на плоскости  $Oxy$  (рис. 4). Для  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$  они не пересекаются, и их объединение — выпуклый девятиугольник с вершинами в точках  $\mathcal{P}_k(0) = P_4(n)$  с  $k = n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ :

$$(1, 0), (0, -1), (-1, -1), (-1, 0), (0, 1).$$

Преобразование  $T_4$  отображает этот многоугольник на себя, и при этом каждая его сторона переходит в некоторую другую. Следовательно, для любой начальной точки  $P_0$  в вершине восьмиугольника последовательность точек, определяемая рекуррентным соотношением  $P_{k+1} = T_4(P_k)$ , — периодическая с длиной периода 9. Так как для любого  $r \geq 0$  последовательность  $rp_4(n)$  удовлетворяет рекуррентному соотношению для  $p_4(n)$  и точка  $(0, 0)$  лежит внутри многоугольника, то утверждение теоремы 4 справедливо при любом выборе начальной точки.  $\square$

Автор благодарит Быковского В. А. за постановку задачи и внимание.

## Список литературы

- [1] A. Nobe, “Ultradiscrete QRT maps and tropical elliptic curves”, *J. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **41**:12. 125205 (2008), 12 pp.
- [2] В. А. Быковский, “Периодические ультрадисперсные преобразования плоскости”, *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*, **500** (2021), 23–25.
- [3] A. P. Fordy, A. None, “Symplectic Maps from Cluster Algebras”, *SIGMA*, **7**. 091 (2011), 1–12.

Поступила в редакцию  
6 сентября 2021 г.

*Avdeeva M. O.*<sup>1</sup> Periodic ultradiscrete transformations of the plane with periods of 5, 7, 8, 9. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2021. V. 21. No 2. P. 127–132.

<sup>1</sup> Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

#### ABSTRACT

V. A. Bykovskii constructed three new periodic ultradiscrete transformations of the plane In addition to the two well-known. In his work, only the idea of proving these statements was proposed. We give a complete and detailed proof of them for sequences with periods 5, 7, 8, 9.

Key words: *nonlinear recurrent sequences, tropical sequences, nonlinear periodic transformations.*

#### References

- [1] A. Nobe, “Ultradiscrete QRT maps and tropical elliptic curves”, *J. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **41**:12. 125205 (2008), 12 pp.
- [2] V. A. Bykovskii, “Periodicheskie ul’tradispersnye preobrazovaniia ploskosti”, *Doklady Rossiiskoi akademii nauk. Matematika, informatika, protsessy upravleniia.*, **500** (2021), 23–25.
- [3] A. P. Fordy, A. Hone, “Symplectic Maps from Cluster Algebras”, *SIGMA*, **7. 091** (2011), 1–12.