УДК 517.53
MSC2020 30C70

© Я. В. Борисова[1], И. А. Колесников[1], С. А. Копанев[1], Г. Д. Садритдинова[1]

Решение задачи Фекете и Сеге вариационным методом

Статья посвящена известной задаче Фекете и Сеге. Исследования проведены достаточно подробно с использованием некоторых новых наблюдений классическим методом внутренних вариаций, развиваемым в Томской школе комплексного анализа. Рассмотрен один частный случай. Проведен полный качественный анализ функционально-дифференциального уравнения для граничного отображения. Полностью решена задача для вещественного параметра.

Ключевые слова: *экстремальная задача, вариационный метод, задача Фекете и Сеге, функционал.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202112

1. Постановка задачи

Пусть S — множество всех голоморфных однолистных в круге $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ отображений $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z+c_2z^2+c_3z^3+\ldots+c_nz^n+\ldots$.

Задача о нахождении множества значений функционала

$$J : S \to \mathbb{C}, \quad J(f) = c_3 - \gamma c_2^2, \quad \gamma \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

и граничных отображений (отображений, вносящих неособые граничные точки множества значений $J(S):=D$), называется задачей Фекете и Сеге.

Сеге и Фекете в 1933 году [1] (см. также [2, §3.8]) решили задачу при $\gamma=\dfrac{\lambda-1}{2\lambda}$, $\lambda\in\mathbb{N}$, доказав этим при $\lambda=2$ несправедливость гипотезы Литтлвуда–Пэли, утверждавшей, что коэффициенты нечетных отображений класса S ограничены единицей. Доказательство Сеге и Фекете, опирающееся на уравнение Левнера, распространили для $0\leqslant\gamma<1$ [3]. Этот результат получен Дж. А. Дженкинсом [4] с помощью теоремы о коэффициентах. Этот же подход использовал А. Флюгер [5] для оценки

[1] Национальный исследовательский Томский государственный университет, 634050, г. Томск, пр. Ленина 36
Электронная почта: borisova_yana@list.ru (Я. В. Борисова), ia.kolesnikov@mail.ru (И. А. Колесников), copanev_d@mail.ru (С. А. Копанев), dolina725@gmail.com (Г. Д. Садритдинова).

функционала $J(f)$ при $\operatorname{Re}\dfrac{1}{1-\gamma}\geqslant 1$. И. А. Александров [6] решил задачу для вещественных γ с помощью вариационно-параметрического метода (метода П. П. Куфарева). В работе [7] А. Флюгера с помощью вариационного метода и метода квадратичных дифференциалов получена оценка функционала для $0<\gamma<1$, исследована геометрия граничного отображения. Позднее А. Флюгер [8] получил точную оценку функционала для комплексных γ. В работе [9] другим методом получена точная оценка для комплексных γ для класса однолистных ограниченных отображений. Задача Фекете и Сеге рассматривается на различных классах аналитических функций, отметим некоторые работы. В [10] с помощью вариационного метода получена оценка на классе звездных отображений. В [11] задача Фекете и Сеге решена для класса почти выпуклых отображений порядка β. В работе [12] для класса голоморфных в единичном круге отображений с разложением $f(z)=z^p+\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_{p+k}z^{p+k}$, получена точная оценка для функционала $|c_{p+2}-\gamma c_{p+1}^2|$ и, как следствие, для однолистных звездных и однолистных выпуклых отображений. Задача Фекете и Сеге решается в [13] для класса вогнутых однолистных отображений с вещественным параметром γ. В работе [14] для голоморфных в единичном шаре отображений в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Напомним некоторые из основных понятий вариационного метода, разработанного для класса S.

Если для каждого отображения $f\in S$ существует отображение $f:\mathbb{D}\times[0,\varepsilon_0)\to\mathbb{C}$, $w=f(z,\varepsilon)$, $f(z,\varepsilon)\in S$ для всех $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$, и $f(z,\varepsilon)$ равномерно внутри $\mathbb{D}$ дифференцируемо по ε в точке $\varepsilon=0$, то разложение $f(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon P(z)+o(\varepsilon,z)$, где $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{o(\varepsilon,z)}{\varepsilon}=0$ равномерно внутри $\mathbb{D}$, называется вариационной формулой в (на) классе S для отображения f.

Если при $f\in S$ для функционала $J:S\to\mathbb{C}$, $J=J(f)$, существует $\mathbb{R}$-линейный относительно P предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{J\big(f(z,\varepsilon)\big)-J(f)}{\varepsilon}=\Phi[f,P],$$

то он называется функциональной производной при $f\in S$, а сам функционал слабо дифференцируемым.

Лемма 1. *Функционал* (1) *является слабо дифференцируемым с функциональной производной* $\Phi[f,P]=\frac{P'''(0)}{6}-\gamma c_2P''(0)$.

Для доказательства достаточно записать $J\big(f(z,\varepsilon)\big)$ по формуле Тейлора:

$$J\big(f(z,\varepsilon)\big)=c_3+\varepsilon\frac{P'''(0)}{6}+o(\varepsilon)-\gamma\left(c_2+\varepsilon\frac{P''(0)}{2}+o(\varepsilon)\right)^2=$$
$$=J(f)+\varepsilon\left(\frac{P'''(0)}{6}-\gamma c_2P''(0)\right)+o(\varepsilon).$$

Согласно терминологии Н. А. Лебедева [15], если J_e — внешняя точка для $J(S)=D$, то ближайшая к ней точка из D — точка $J_0=J(f)\in D$ называется неособой граничной точкой, а отображение f — граничным отображением.

Неособая граничная точка J_0 удовлетворяет неравенству

$$\Big|J\big(f(z,\varepsilon)\big) - J_e\Big|^2 = |J_0 - J_e|^2 + 2\varepsilon\,\mathrm{Re}\Big(\big(\overline{J}_0 - \overline{J}_e\big)\Phi[f,P]\Big) + o(\varepsilon) \geqslant |J_0 - J_e|^2,$$

из которого следует

Лемма 2. *Граничное отображение f функционала* (1) *удовлетворяет условию (называемому необходимым):*

$$\mathrm{Re}\Big(\overline{x}\big(P'''(0) - 6\gamma c_2 P''(0)\big)\Big) \geqslant 0,$$

где $x = e^{i\alpha}$, $\alpha = \arg(J_0 - J_e)$ — параметр, характеризующий неособую граничную точку $J_0 = J_0(\alpha) = J(f)$.

Если в вариационной формуле $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, то в необходимом условии знак неравенства заменяется на знак равенства.

Когда α пробегает сегмент $[0, 2\pi]$, точка $J_0(\alpha) = J_{\mathrm{Re}}(\alpha) + iJ_{\mathrm{Im}}(\alpha)$ описывает границу множества значений функционала (1), за исключением особых точек.

Отметим, что точка $0 \in D$ (так как $J\big(f(z) = z\big) = 0$).

Воспользуемся малой вариационной формулой [16]

$$f(z,\varepsilon) = f(z) + i\varepsilon\big(zf'(z) - f(z)\big) + o(z,\varepsilon), \quad \varepsilon \in (-\,\varepsilon_0; \varepsilon_0).$$

Необходимое условие примет вид

$$\mathrm{Re}\, i\overline{x}\left(c_3 - \gamma c_2^2\right) = 0 \qquad \text{или} \qquad \mathrm{Im}\, e^{-i\alpha} e^{i \arg J_0(\alpha)} = 0.$$

Из последнего равенства следует, что $\alpha = \arg J_0(\alpha)$, откуда для границы $J_0(\alpha) = J_{\mathrm{Re}}(\alpha) + iJ_{\mathrm{Im}}(\alpha)$ множества значений D функционала получается дифференциальное уравнение

$$J_{\mathrm{Re}}(\alpha)J'_{\mathrm{Re}}(\alpha) + J_{\mathrm{Im}}(\alpha)J'_{\mathrm{Im}}(\alpha) = 0.$$

В результате интегрирования получим следующую лемму.

Лемма 3. *Множеством значений D функционала* (1) *является замкнутый круг с центром в начале координат.*

Полученные результаты позволяют сформулировать задачу Фекете и Сеге в следующем виде.

Найти $\max\limits_{f \in S} I(f)$, где

$$I : S \to \mathbb{R}, \quad I(f) = \mathrm{Re}(c_3 - \gamma c_2^2), \quad \gamma \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

а также найти граничные отображения.

Класс S обладает свойством: отображение $f \in S$ тогда и только тогда, когда отображение $f_1(z) = e^{-i\beta} f\left(e^{i\beta} z\right) \in S$. Из этого свойства можно заключить, что если $f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots$ доставляет максимум функционалу (2), то и отображение $-f(-z) = z - c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots$ доставляет максимум, а отображения $\pm if(\mp iz) = z \pm ic_2 z^2 - c_3 z^3 + \ldots$ соответствуют минимальному значению функционала (2).

Теорема 1. *Граничное отображение f для функционала (2) удовлетворяет функционально-дифференциальному уравнению*

$$\left(\frac{z}{f(z)}\right)^4 \big(1+qf(z)\big)f'^2(z) = 1+qz+bz^2+\overline{q}z^3+z^4, \tag{3}$$

где $q=2(1-\gamma)c_2$, $b=2I(f)$.

Доказательство. Возьмем известную вариационную формулу Г. М. Голузина [17, §4]

$$f(z,\varepsilon) = f(z)+\varepsilon P(z)+o(z,\varepsilon) = f(z)+\varepsilon\left(A\left(\frac{z_0f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2\frac{f^2(z)}{f(z)-f(z_0)} - \right.$$
$$\left. -\frac{A}{2}\left(zf'(z)\frac{z+z_0}{z-z_0}+f(z)\right) - \frac{\overline{A}}{2}\left(zf'(z)\frac{z\overline{z_0}+1}{z\overline{z_0}-1}+f(z)\right)\right)+o(z,\varepsilon),$$

где $A\in\mathbb{C}$, $z_0\in\mathbb{D}$. Выполним некоторые преобразования:

$$\frac{f^2(z)}{f(z)-f(z_0)} = f(z)+f(z_0)+\frac{f^2(z_0)}{f(z)-f(z_0)},$$
$$zf'(z)\frac{z+z_0}{z-z_0} = zf'(z)+2z_0f'(z)+2z_0^2\frac{f'(z)}{z-z_0}.$$

Тогда $P(z)$ примет вид

$$P(z) = A\left(\frac{z_0f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2\left(f(z)+f(z_0)+\frac{f^2(z_0)}{f(z)-f(z_0)}\right) -$$
$$-\frac{A}{2}\left(f(z)+zf'(z)+2z_0f'(z)+2z_0^2\frac{f'(z)}{z-z_0}\right) -$$
$$-\frac{\overline{A}}{2}\left(f(z)+zf'(z)+\frac{2}{\overline{z_0}}f'(z)+\frac{2}{\overline{z_0}}\frac{f'(z)}{z\overline{z_0}-1}\right).$$

Введем обозначение $H(z_0)=\dfrac{z_0f'(z_0)}{f(z_0)}$. Подсчитаем

$$P''(0) = AH^2(z_0)\left(-\frac{2}{f(z_0)}\right)+A\left(c_2+\frac{2}{z_0}\right)+\overline{A}(c_2+2\overline{z}_0),$$
$$P'''(0) = AH^2(z_0)\left(-\frac{12c_2}{f(z_0)}-\frac{6}{f^2(z_0)}\right)+A\left(6c_3+\frac{12c_2}{z_0}+\frac{6}{z_0^2}\right)+\overline{A}(6c_3+12c_2\overline{z}_0+6\overline{z}_0^2).$$

Теперь необходимое условие для граничного отображения f можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\left(A\left(H^2(z_0)\frac{-12c_2(1-\gamma)f(z_0)-6}{f^2(z_0)}+\frac{6\big(c_3-\gamma c_2^2\big)z_0^2+12c_2(1-\gamma)z_0+12}{z_0^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\overline{A}\left(6\big(c_3-\gamma c_2^2\big)+12c_2(1-\gamma)\overline{z}_0+6\overline{z}_0^2\big)\right)\leqslant 0.$$

Так как вещественная часть сопряженного и самого числа одинакова, то учитывая, что A — любое комплексное число, утверждаем, что необходимое условие эквивалентно равенству

$$\left(\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2 \frac{1+2(1-\gamma)c_2 f(z_0)}{f^2(z_0)} + c_3 + \frac{2c_2}{z_0} + \frac{2}{z_0^2} - \gamma c_2^2 - \frac{2\gamma c_2}{z_0} +$$
$$+\overline{c}_3 + 2\overline{c}_2 z_0 + z_0^2 - \gamma\overline{c}_2^2 - 2\gamma\overline{c}_2 z_0 = 0.$$

Для завершения доказательства достаточно, учитывая, что это равенство выполняется для всех $z_0 \in \mathbb{D}$, переобозначить z_0 через z и провести небольшие преобразования. □

Отметим, что если z_0 — корень полинома в правой части уравнения (3), то и $\dfrac{1}{\overline{z_0}}$ является корнем этого полинома; если $|z_0|=1$, то z_0 — корень кратностью два.

2. Частный случай

Рассмотрим частный случай $\gamma=1$. При $\gamma=1$ функционал (2) примет вид $I(f)= = \mathrm{Re}\big(c_3 - c_2^2\big)$, а уравнение (3) —

$$\left(\frac{f'(z)}{f^2(z)}\right)^2 = \frac{1+2\,\mathrm{Re}\big(c_3 - c_2^2\big)z^2 + z^4}{z^4}.$$

Заметим, что полином в числителе правой части является биквадратом. Следовательно, если μ — корень полинома, то и $-\mu$ есть корень полинома. Тогда уравнение принимает вид

$$z^4 f'^2(z) = f^4(z)(z^2-\mu^2)\left(z^2 - \frac{1}{\overline{\mu}^2}\right). \qquad (4)$$

Пусть $\mu \in \mathbb{D}$. Разложение граничного отображения в окрестности этой точки будет иметь вид $f(z) = a_0 + a_1(z-\mu) + a_2(z-\mu)^2 + \ldots,\ a_1 \neq 0$. Разложим правую и левую части уравнения (4) в окрестности точки μ, получим

$$\mu^4 a_1^2 + 4\mu^3 a_1(a_1 + a_2\mu)(z-\mu) + \ldots = 2a_0^2\mu\left(\mu^2 - \frac{1}{\overline{\mu}^2}\right)(z-\mu) + \ldots .$$

В левой части разложение начинается с константы, в правой — с первой степени. Получаем противоречие.

Тогда $|\mu|=1$, и уравнение (4) примет вид

$$\left(\frac{f'(z)}{f^2(z)}\right)^2 = \frac{(z-\mu)^2(z+\mu)^2}{z^4}.$$

Полученное дифференциальное уравнение равносильно двум уравнениям:

$$\frac{f'(z)}{f^2(z)} = \frac{z^2-\mu^2}{z^2} \quad \text{и} \quad \frac{f'(z)}{f^2(z)} = \frac{\mu^2 - z^2}{z^2}, \text{ где } |\mu| = 1.$$

Решения этих уравнений обозначим через f_1 и f_2 соответственно. Проинтегрировав эти уравнения при начальных условиях $f_k(0)=0$, $f'_k(0)=1$, $k=1,2$, получим

$$f_1(z)=f_1(z,B_1)=-\frac{z}{z^2+B_1z-1},\quad f_2(z)=f_2(z,B_2)=\frac{z}{z^2+B_2z+1},$$

где B_1,B_2 — постоянные.

Заметим, что $f_1(z;B_1)=-if_2(iz;-iB_1)$. Тогда, как отмечено в п.1, если на одном отображении функционал имеет максимум, то на другом — минимум.

Представим семейство $f_1(z,B_1)$ в виде композиции

$$f_1(z;B_1)=\big(h\circ \mathrm{g}\big)(z),$$

где $\zeta=\mathrm{g}(z)=\dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$, $w=h(\zeta)=-\dfrac{1}{2\zeta+B_1}$, $B_1\in\mathbb{C}$.

Точка $\zeta_0=-\dfrac{B_1}{2}$ — простой полюс для $w=h(\zeta)$. Так как $f_1\in S$, то отображение может иметь особенности только на границе единичного круга. Значит, прообраз $z_0=\mathrm{g}^{-1}(\zeta_0)$, должен удовлетворять условию $|z_0|=1$. Следовательно, $f_1\in S$ тогда и только тогда, когда $B_1=iB$, $B\in[-2,2]$.

Подсчитав значение функционала $I(f)=\mathrm{Re}(c_3-c_2^2)$ при отображении f_1, получим $I(f_1)=1$.

Таким образом, справедлива теорема 2.

Теорема 2. *Максимум функционала* $I:S\to\mathbb{R}$, $I(f)=\mathrm{Re}(c_3-c_2^2)$, *равен единице и достигается отображениями* $f(z;B)=-\dfrac{z}{z^2+iBz-1}$, $B\in[-2,2]$.

3. Качественный анализ

Далее будем изучать функционал

$$I:S\to\mathbb{R},\quad I(f)=\mathrm{Re}(c_3-\gamma c_2^2),\quad \gamma\in\mathbb{C}\backslash\{1\}. \tag{5}$$

Из компактности (в себе) класса S и непрерывности функционала (5) следует существование в классе S граничного отображения, которое, как показано в п. 1, удовлетворяет функционально-дифференциальному уравнению (3).

Получим ряд свойств граничного отображения функционала (5).

Лемма 4. *Для функционала* (5) *множество значений граничного отображения не имеет внешних точек.*

Доказательство. Предположим, что существует внешняя точка $w_0\in\mathbb{C}\backslash\overline{f(\mathbb{D})}$, где f — граничное отображение для функционала (5). Возьмем малую вариационную формулу [16] $f(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon A\dfrac{f^2(z)}{f(z)-w_0}$, где $\varepsilon\geqslant 0$, $A\in\mathbb{C}$ и произвольно.

Подсчитаем $P''(0)=-\dfrac{2A}{w_0}$, $P'''(0)=-\dfrac{6A}{w_0^2}-\dfrac{12Ac_2}{w_0}$. Тогда необходимое условие для f можно записать в виде неравенства

$$\mathrm{Re}\,A\left(-\frac{6}{w_0^2}-\frac{12c_2}{w_0}+\frac{12\gamma c_2}{w_0}\right)\leqslant 0,$$

а за счет произвольности числа A — в виде равенства $1+2(1-\gamma)c_2w_0=0$. Получили противоречие: множество имеет одну внешнюю точку, но внешних точек может быть только континуум. □

Из качественной теории дифференциальных уравнений следует, что граничное отображение, удовлетворяющее уравнению (3), может иметь только алгебраические точки ветвления [18, Гл. 3]. Следовательно, по лемме 4, образом $\mathbb{D}$ относительно граничного отображения является область, граница которой $\Gamma_f=\partial f(\mathbb{D})$ — разрез, состоящий из конечного числа аналитических дуг, одна из которых имеет конечную концевую точку, а одна уходит на бесконечность.

Если точка $z_0\in\mathbb{D}$, то граничное отображение f голоморфно в этой точке и имеет в этой точке разложение

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2}(z-z_0)^2+\ldots,\quad f'(z_0)\neq 0.$$

Если $|z_0|=1$, то точка z_0 для f либо точка голоморфности и f имеет в этой точке разложение

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k+\frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{k+1}+\ldots,\quad k\in\{1,2\},\quad f^{(k)}(z_0)\neq 0,$$

либо z_0 — алгебраическая точка ветвления порядка p. Во втором случае отображение f имеет разложение

$$f(z)=f(z_0)+s_m\,(z-z_0)^{\frac{m}{p}}+s_{m+1}\,(z-z_0)^{\frac{m+1}{p}}+\ldots,$$

где $s_m\neq 0$, $p,m\in\mathbb{N}$, на множестве $U(z_0)=\mathbb{D}\bigcap\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<\delta,\ \delta \text{ достаточно мало}\}$.

Лемма 5. *Пусть f — граничное отображение для функционала* (2)*. Тогда прообраз конечного конца Γ_f является точкой голоморфности для отображения f.*

Доказательство. Пусть μ есть прообраз конечного конца границы Γ_f относительно граничного отображения f. С помощью аналитического продолжения отображения f через дугу окружности $\partial\mathbb{D}\bigcap\{z\in\mathbb{C}:|z-\mu|<\delta\}$ в одной плоскости и соответствующую аналитическую кривую Γ_f в другой плоскости получим полную аналитическую функцию F, которая обладает свойством $F\big(\mu+\rho e^{i\beta}\big)=F\big(\mu+\rho e^{i(\beta+2\pi)}\big)$, где $\rho<\delta$, то есть точка μ является точкой голоморфности отображения f и $f(z)=f(\mu)+\dfrac{f''(\mu)}{2}(z-\mu)^2+\ldots$, $f''(\mu)\neq 0$. □

Лемма 6. *Если μ — прообраз конечного конца Γ_f относительно граничного отображения f, то f будет удовлетворять уравнению* (3) *только тогда, когда μ есть корень кратности два для полинома правой части уравнения и $f(\mu)\neq -\dfrac{1}{q}$.*

Доказательство. Пусть μ является корнем правой части уравнения (3) и $f(\mu)\neq -\dfrac{1}{q}$. Тогда при разложении правой и левой частей уравнение будет иметь вид

$$A_2\,(z-\mu)^2+\ldots=P_2\,(z-\mu)^2+\ldots,\quad A_2\neq 0,\quad P_2\neq 0,$$

то есть этот случай возможен. В остальных трех случаях 1) μ является корнем правой части уравнения (3) и $f(\mu) = -\dfrac{1}{q}$, 2) μ не является корнем правой части уравнения (3) и $f(\mu) \neq -\dfrac{1}{q}$, 3) μ не является корнем правой части уравнения (3) и $f(\mu) = -\dfrac{1}{q}$. Раскладывая правую и левую части уравнения (в этих трех случаях) получаем противоречия. В случае 2), например, разложение имеет вид

$$A_2(z-\mu)^2 + \ldots = P_0 + \ldots, \quad A_2 \neq 0, \quad P_0 \neq 0.$$

Лемма доказана. □

Лемма 7. *Пусть граничное отображение функционала* (5) *имеет в* $U(z_0)$ *разложение*

$$f(z) = f(z_0) + s_m\,(z-z_0)^{\frac{m}{p}} + s_{m+1}\,(z-z_0)^{\frac{m+1}{p}} + \ldots, \quad s_m \neq 0, \quad p, m \in \mathbb{N}.$$

Тогда кривая $f\Big(\partial\mathbb{D} \bigcap \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < \delta\}\Big)$ *в точке* $f(z_0)$ *имеет угол* $\dfrac{m}{p}\pi$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно рассматривать отображение $f(z) = s_m z^{\frac{m}{p}} + s_{m+1} z^{\frac{m+1}{p}} + \ldots$, $s_m \neq 0$, $\dfrac{m}{p} \leqslant 2$, $p, m \in \mathbb{N}$, в верхней полуокрестности начала координат.

Отрезок $l_\varphi = \{z : z = re^{i\varphi}, r \in [0,\varepsilon)\}$, φ — фиксировано, $\varphi \in (0,\pi)$, выходящий из начала координат под углом φ к положительной части вещественной оси, переходит при отображении f в аналитическую дугу

$$L_\varphi = f(l_\varphi) = \Big\{w : w = u + iv = s_m r^{\frac{m}{p}} e^{i\varphi\frac{m}{p}} + s_{m+1} r^{\frac{m+1}{p}} e^{i\varphi\frac{m+1}{p}} + \ldots, r \in [0,\varepsilon)\Big\},$$

выходящую из начала координат под углом ψ к положительной части вещественной оси, причем

$$\operatorname{tg}\psi = \lim_{r\to+0} \frac{v'_r}{u'_r} = \lim_{r\to+0} \frac{\frac{m}{p} s_m r^{\frac{m}{p}-1} \sin\varphi\frac{m}{p} + \frac{m+1}{p} s_{m+1} r^{\frac{m+1}{p}-1} \sin\varphi\frac{m+1}{p} + \ldots}{\frac{m}{p} s_m r^{\frac{m}{p}-1} \cos\varphi\frac{m}{p} + \frac{m+1}{p} s_{m+1} r^{\frac{m+1}{p}-1} \cos\varphi\frac{m+1}{p} + \ldots} = \operatorname{tg}\Big(\varphi\frac{m}{p}\Big).$$

Из этого наблюдения следует утверждение леммы. □

У границы $\Gamma_f = \partial f(\mathbb{D})$, где f — граничное отображение, всегда есть конечный конец, следовательно, правая часть в уравнении (3) имеет вид $(z-\mu)^2(z-z_0)\Big(z - \dfrac{1}{\overline{z}_0}\Big)$, где μ — прообраз конечного конца, $|z_0| \leqslant 1$.

Если $|z_0| < 1$ и $f(z_0) = -\dfrac{1}{q}$, то

$$\frac{z^4\big(qf(z)+1\big)}{f^4(z)} f'^2(z) = A_1(z-z_0) + A_2(z-z_0)^2 + \ldots,$$

где $A_1 = q^5 z_0^4 f'^3(z_0)$, и

$$\frac{z^4\big(qf(z)+1\big)}{f^4(z)} f'^2(z) = A_0 + A_1(z-z_0) + \ldots,$$

где $A_0 = z_0^4 f'^3(z_0)\dfrac{1+qf(z_0)}{f^4(z_0)}$, если $f(z_0) \neq -\dfrac{1}{q}$. Сравнивая эти разложения в $U(z_0)$ с соответствующими разложениями правой части уравнения (3), получаем следующий результат.

Лемма 8. *Качественный анализ не исключает, что граница $\Gamma_f = \partial f(\mathbb{D})$, где f — граничное отображение функционала (5), может состоять из одной аналитической кривой при условии $f(z_0) = -\dfrac{1}{q}$ и $|z_0| < 1$.*

Из полученных результатов также вытекает, что на границе $\partial\mathbb{D}$ круга $\mathbb{D}$ могут быть точки 1) μ_k, $k=1,2$, — прообразы конечных концевых точек границы Γ_f, 2) ν_k, $k=1,2,3$, — прообразы точки соединения аналитических дуг границы Γ_f, 3) ζ_k, $k=1,2$, — прообразы бесконечности.

Пусть у границы $\Gamma_f = \partial f(\mathbb{D})$, где f — граничное отображение, есть один конечный конец и пусть ν_k, $k=1,2$, — прообраз точки соединения аналитических дуг границы Γ_f. Тогда точка ν_k будет алгебраической точкой ветвления порядка p для f и левая часть уравнения (3) будет в $U(\nu_k)$ иметь разложение

$$\frac{z^4\bigl(qf(z)+1\bigr)}{f^4(z)}f'^2(z) = A_0(z-\nu_k)^{\frac{3m-2p}{p}} + A_1(z-\nu_k)^{\frac{3m-2p+1}{p}} + \ldots,$$

если $f(\nu_k) = -\dfrac{1}{q}$, и

$$\frac{z^4\bigl(qf(z)+1\bigr)}{f^4(z)}f'^2(z) = A_0(z-\nu_k)^{\frac{2m-2p}{p}} + A_1(z-\nu_k)^{\frac{2m-2p+1}{p}} + \ldots,$$

если $f(\nu_k) \neq -\dfrac{1}{q}$; а для правой части имеем следующие два варианта: либо

$$z^4 + \overline{q}z^3 + bz^2 + qz + 1 = (z-\nu_k)^2(z-\mu_k)^2,$$

либо

$$z^4 + \overline{q}z^3 + bz^2 + qz + 1 = P_0 + P_1(z-\nu_k) + \ldots .$$

Пусть, например, $f(\nu_k) = -\dfrac{1}{q}$, $k=1,2$, и ν_1 — корень правой части уравнения (3). Тогда равенство

$$A_0(z-\nu_1)^{\frac{3m-2p}{p}} + A_1(z-\nu_1)^{\frac{3m-2p+1}{p}} + \ldots = (z-\nu_1)^2(z-\mu_k)^2$$

справедливо при $\dfrac{m}{p} = \dfrac{4}{3}$, а равенство

$$A_0(z-\nu_2)^{\frac{3m-2p}{p}} + A_1(z-\nu_2)^{\frac{3m-2p+1}{p}} + \ldots = P_0 + P_1(z-\nu_2) + \ldots$$

(ν_2 не может быть в этом случае корнем правой части уравнения) справедливо при $\dfrac{m}{p} = \dfrac{2}{3}$. Перебирая все другие возможные разложения уравнения (3) в рассматриваемом случае, придем к следующей лемме.

Лемма 9. *Качественный анализ не исключает, что граница $\Gamma_f = \partial f(\mathbb{D})$, где f — граничное отображение функционала (5), может состоять из двух аналитических дуг, соединяющихся в точке $-\dfrac{1}{q}$ под углом $\dfrac{2\pi}{3}$.*

Остается случай, когда у границы $\Gamma_f = \partial f(\mathbb{D})$, где f — граничное отображение, два конечных конца. Пусть μ_k, $k=1,2$, — их прообразы и $f(\mu_k) \neq -\dfrac{1}{q}$. В этом случае граница либо может быть одной кривой, проходящей через бесконечность, либо может состоять из трех аналитических дуг, соединяющихся в одной точке.

Покажем, что первый вариант для исследуемого функционала не реализуется. В уравнении $\dfrac{z^4}{f^4(z)}(qf(z)+1)f'^2(z) = (z-\mu_1)^2(z-\mu_2)^2$ сделаем замену $f = \dfrac{1}{\mathrm{g}}$:

$$\frac{z^4}{\mathrm{g}(z)}\big(q + \mathrm{g}(z)\big)\mathrm{g}'^2(z) = (z-\mu_1)^2(z-\mu_2)^2.$$

Имеем $\mathrm{g}(0)=\infty$, $\mathrm{g}(\zeta_k)=0 \neq q$, $k=1,2$. Если ζ_k есть точка ветвления порядка p отображения g, то разложение последнего уравнения в $U(\zeta_k)$ запишется в виде

$$B_0(z-\zeta_k)^{\frac{m-2p}{p}} + \ldots = P_0 + \ldots, \quad P_0 \neq 0.$$

Тогда $\dfrac{m}{p} = 2$, но так как поведение отображения g в обеих точках ξ_k, $k=1,2$, одинаковое, рассматриваемый случай невозможен.

Во втором варианте поведение граничного отображения во всех трех алгебраических точках ветвления ν_k, $k=1,2,3$, одинаково и изучено выше.

Лемма 10. *Качественный анализ не исключает, что граница $\Gamma_f = \partial f(\mathbb{D})$, где f — граничное отображение функционала (5), может состоять из трех аналитических дуг, соединяющихся в точке $-\dfrac{1}{q}$ под равными углами $\dfrac{2\pi}{3}$.*

Объединим результаты, полученные в леммах, в одну теорему.

Теорема 3. *Множеством значений граничного отображения для функционала (5) является плоскость с разрезом по не более чем трем аналитическим дугам, одна из которых оканчивается в бесконечности. При этом вид границы множества значений граничного отображения ограничен следующими вариантами:*

1) *одна аналитическая кривая; при этом правая часть уравнения (3) имеет вид $(z-\mu)^2(z-\zeta)\left(z-\dfrac{1}{\zeta}\right)$, где μ — прообраз конечного конца, $|\zeta|<1$, $f(\zeta) = -\dfrac{1}{q}$;*

2) *две аналитические дуги, соединяющиеся в точке $-\dfrac{1}{q}$ под углом $\dfrac{2\pi}{3}$; при этом правая часть уравнения (3) имеет вид $(z-\mu)^2(z-\nu)^2$, где μ — прообраз конечного конца, ν — прообраз точки соединения аналитических дуг, $f(\nu) = -\dfrac{1}{q}$;*

3) *три аналитические дуги, соединяющиеся в точке $-\dfrac{1}{q}$ под равными углами; при этом правая часть уравнения (3) имеет вид $(z-\mu_1)^2(z-\mu_2)^2$, где μ_k,*

$k = 1, 2,$ — прообразы конечных концов, ν — прообраз точки соединения аналитических дуг, $f(\nu) = -\dfrac{1}{q}$.

4. Решение задачи Фекете и Сеге при вещественном параметре

Продолжим исследование функционала $I\colon S\to\mathbb{R}$, $I(f)=\operatorname{Re}(c_3-\gamma c_2^2)$, при $\gamma\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Граничное отображение удовлетворяет функционально-дифференциальному уравнению (3), которое запишем в виде

$$z^4\big(1+qf(z)\big)f'^2(z) = f^4(z)\big(1+qz+bz^2+\overline{q}z^3+z^4\big), \tag{6}$$

где $q=2(1-\gamma)c_2$, $b=2I(f)=2\operatorname{Re}\big(c_3-\gamma c_2^2\big)$.

Лемма 11. *Коэффициенты $c_4, c_5, \dots$ граничного отображения $f(z) = c_1z+c_2z^2+ + \dots$, $c_1 = 1$, рассматриваемого функционала находятся по формулам*

$$4c_4 = \overline{q} + 4c_2b - 3qc_3 - 2qc_2^2 + 4c_2^3,$$

$$2(n-1)c_{n+1} = \sum_{j=2}^{n}\big(2-j(n+2-j)\big)c_jc_{n+2-j} -$$

$$- q\sum_{j=1}^{n}c_j\sum_{j=1}^{n-j+1}j(n+2-2j)c_jc_{n+2-2j} + \sum_{j=1}^{n-3}d_jd_{n-2-j} + \overline{q}\sum_{j=1}^{n-2}d_jd_{n-1-j} +$$

$$+b\sum_{j=1}^{n-1}d_jd_{n-j} + q\sum_{j=1}^{n}d_jd_{n+1-j} + \sum_{j=2}^{n}d_jd_{n+2-j}, \quad n = 5, 6, \dots,$$

где $d_k = \sum\limits_{j=1}^{k}c_jc_{k+1-j}$. Кроме того, $c_3-\gamma c_2^2\in\mathbb{R}$.

Для доказательства нужно подставить разложение $f(z)=c_1z+c_2z^2+\dots$ в дифференциальное уравнение (6) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях.

Заметим, что эта система справедлива и при $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Рассмотрим случай, когда полином $1+qz+bz^2+\overline{q}z^3+z^4$, согласно теореме 3, имеет два кратных корня ω_1 и ω_2, $|\omega_1|=|\omega_2|=1$:

$$1+qz+bz^2+\overline{q}z^3+z^4 = \big(z-\omega_1\big)^2\big(z-\omega_2\big)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, находим

$$\omega_1^2\omega_2^2 = 1, \quad q = -2\omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2), \quad b = (\omega_1+\omega_2)^2 + 2\omega_1\omega_2, \quad \overline{q} = -2(\omega_1+\omega_2).$$

Пусть $\omega_1\omega_2=1$, тогда $q=\overline{q}=-2(\omega_1+\omega_2)$, $b=(\omega_1+\omega_2)^2+2$, а уравнение (6) запишется в виде

$$\frac{\sqrt{1+qf(z)}}{f^2(z)}f'(z) = \frac{(z-\omega_1)(z-\omega_2)}{z^2}. \tag{7}$$

Сделав замену $u(z)=\sqrt{1+qf(z)}$, получим уравнение

$$\frac{2qu^2(z)}{\big(u^2(z)-1\big)^2}u'(z)=\frac{(z-\omega_1)(z-\omega_2)}{z^2}.$$

Найдем общий интеграл

$$\frac{q}{2}\left(\ln\frac{u(z)-1}{u(z)+1}-\frac{2u(z)}{u^2(z)-1}\right)=z-(\omega_1+\omega_2)\ln z-\omega_1\omega_2\frac{1}{z}+C,$$

где $C=\dfrac{q}{2}\left(\ln\dfrac{q}{4}+\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\right)$ при начальном условии $u(0)=1$.

Записывая полученное решение в точке z_0, в которой $u(z_0)=0$ $\left(f(z_0)=-\dfrac{1}{q}\right)$, получим

$$\ln(-1)-\ln z_0+\frac{2}{q}\left(\frac{1}{z_0}-z_0\right)=\ln\frac{q}{4}+\frac{\gamma}{1-\gamma}. \tag{8}$$

Так как $|z_0|=1$, то левая часть этого равенства есть мнимое число, а правая — вещественное число. Таким образом, левая и правая части равенства должны равняться нулю.

Приравняв к нулю правую часть $\ln\dfrac{q}{4}+\dfrac{\gamma}{1-\gamma}=0$, находим $c_2=\dfrac{2}{1-\gamma}e^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ и, с учетом леммы 11, $c_3=1+2\dfrac{1+\gamma^2}{(1-\gamma)^2}e^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$.

Используя найденные коэффициенты c_2 и c_3 граничного отображения, получаем, что $\max\limits_{f\in S}I(f)=\mathrm{Re}\big(c_3-\gamma c_2^2\big)=1+2e^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$.

Так как в классе S имеем неравенство $|c_3|\leqslant 3$, справедливое только при $\gamma\in(0,1)$, то полученная оценка функционала верна только при этих γ.

В силу того, что $c_2\in\mathbb{R}$, из леммы 11 следует, что $c_n\in\mathbb{R}$, $n\geqslant 1$, поэтому множество значений граничного отображения обладает симметрией относительно вещественной оси, что соответствует третьему случаю в теореме 3.

Пусть $\omega_1\omega_2=-1$. Тогда граничное отображение удовлетворяет уравнению

$$\frac{\sqrt{1+qf(z)}}{f^2(z)}f'(z)=-\frac{(z-\omega_1)(z-\omega_2)}{z^2},$$

которое можно привести к виду (7) с помощью замены $z(\zeta)=i\zeta$:

$$\frac{\sqrt{1+\widetilde{q}\mathrm{g}(\zeta)}}{\mathrm{g}^2(\zeta)}\mathrm{g}'(\zeta)=\frac{(\zeta-\widetilde{\omega}_1)(\zeta-\widetilde{\omega}_2)}{\zeta^2},$$

где $\widetilde{q}=iq$, $\widetilde{\omega}_k=-i\omega_k$, $k=1,2$, $\mathrm{g}(\zeta)=-if\big(z(\zeta)\big)$. Получающееся граничное отображение доставляет минимум функционалу $\min\limits_{f\in S}I(f)=\mathrm{Re}\big(c_3-\gamma c_2^2\big)=-1-2e^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$, множество значений этого граничного отображения обладает симметрией относительно мнимой оси, что снова соответствует третьему случаю в теореме 3.

Заметим, что исключить второй случай теоремы 3 можно по-другому. Подставив $z_0 = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$, в равенство (8), получим уравнение $e^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \sin t = -t \pm \pi$, которое имеет три корня, то есть три точки ν_k, $k = 1, 2, 3$, в которых $f(\nu_k) = \dfrac{1}{4} e^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$.

Теперь приступим к рассмотрению случая, когда дифференциальное уравнение для граничного отображения имеет вид

$$\frac{qf(z)+1}{f^4(z)} f'^2(z) = \frac{(z-\mu)^2 (z-\zeta) \left(z - \frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}{z^4}. \tag{9}$$

Приравняем коэффициенты полинома в числителе правой части к коэффициентам исходного полинома, обозначим $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, тогда получим

$$\begin{cases} \mu = \pm e^{-i\varphi}, \\ q = -e^{-i\varphi} \left(\rho + \dfrac{1}{\rho}\right) - 2\mu e^{2i\varphi}. \end{cases}$$

Введем обозначения: $u = \sqrt{1 + qf}$,

$$e^{i\varphi} h(z) = e^{i\varphi} h(z, q, \varphi) = e^{i\varphi} \sqrt{1 + z\big(q + 2\mu e^{2i\varphi}\big) + e^{-2i\varphi} z^2} = \sqrt{(z-\zeta)\left(z - \frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}.$$

Тогда уравнение (9) эквивалентно двум уравнениям:

$$2q \frac{u^2(z)}{\big(u^2(z) - 1\big)^2} u'(z) = \pm \frac{z-\mu}{z^2} e^{i\varphi} h(z). \tag{10}$$

Случай I. Проинтегрируем уравнение (10), взяв правую часть со знаком "+". Получим

$$\begin{aligned} &\frac{q}{2}\left(\ln \frac{u-1}{u+1} - \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) = \\ &= \left(\frac{\mu}{z} + 1\right) e^{i\varphi} h - \frac{q}{2} \mu e^{i\varphi} \ln z + \frac{q}{2} \mu e^{i\varphi} \ln\left(1 + z\left(\frac{q}{2} + \mu e^{2i\varphi}\right) + h\right) + \\ &+ \left(\mu\big(e^{4i\varphi} - 1\big) + \frac{q}{2} e^{2i\varphi}\right) \ln\left(z + e^{2i\varphi}\left(\frac{q}{2} + \mu e^{2i\varphi}\right) + e^{i\varphi} h\right) + C. \end{aligned}$$

Используя условие $u(0) = 1$ ($f(0) = 0$) находим, что $\mu = -e^{-i\varphi}$ и

$$C = \frac{q}{2} \ln \frac{q}{2} + c_2 - 2e^{i\varphi} - e^{i\varphi}\left(e^{i\varphi} - 1 - \frac{q}{2} e^{3i\varphi}\right) \ln\left(e^{i\varphi} - e^{3i\varphi} + \frac{q}{2} e^{2i\varphi}\right).$$

Из условия $u(\zeta) = 0$ $\left(f(\zeta) = -\dfrac{1}{q}\right)$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma - 1} = \ln \frac{1 - 2e^{i\psi}\rho + \rho^2}{1 - \rho^2} + \frac{1 + \rho^2 - 2\rho e^{-i\psi}}{2\rho - e^{-i\psi}(1+\rho^2)} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} - \\ - \frac{4\rho}{2\rho - e^{-i\psi}(1+\rho^2)} =: \mathrm{g}(\rho, \psi), \end{aligned} \tag{11}$$

где $\psi=2\varphi$. Так как γ вещественна, то $\mathrm{g}(\rho,\psi)\in\mathbb{R}$. Найдем, при каких значениях ρ и ψ будет $\mathrm{Im}\,\mathrm{g}(\rho,\psi)=0$.

Заметим, что $\mathrm{Im}\,\mathrm{g}(\rho,0)=\mathrm{Im}\,\mathrm{g}(\rho,\pi)=\mathrm{Im}\,\mathrm{g}(\rho,2\pi)=\mathrm{Im}\,\mathrm{g}(\rho,3\pi)=0$. Оценим

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{g}(\rho,\psi) = \sin\psi\frac{4\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)+\left(\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)^2-4\right)\ln\dfrac{1+\rho}{1-\rho}}{\left(2-\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)\cos\psi\right)^2+\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)^2\sin^2\psi}-\mathrm{arctg}\,\frac{2\rho\sin\psi}{1+\rho^2-2\rho\sin\psi}$$

при $\psi\in(0,\pi)$. Используя оценки $\mathrm{arctg}\,t<t$ и $\ln\dfrac{1+\rho}{1-\rho}>2\rho$, получим

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{g}(\rho,\psi) > 2\rho\sin\psi\frac{\left(1-\rho^2\right)^2\left(1+(1-\rho)^2+2\rho\sin^2\dfrac{\psi}{2}\right)}{\left((1-\rho)^2+4\rho\sin^2\dfrac{\psi}{2}\right)\left((1-\rho)^4+8\rho\left(1+\rho^2\right)\sin^2\dfrac{\psi}{2}\right)}>0.$$

Аналогично можно показать, что $\mathrm{Im}\,\mathrm{g}(\rho,\psi)>0$ при $\psi\in(2\pi,3\pi)$ и $\mathrm{Im}\,\mathrm{g}(\rho,\psi)<0$ при $\psi\in(\pi,2\pi)\bigcup(3\pi,4\pi)$. Следовательно, $\mathrm{Im}\,\mathrm{g}(\rho,\psi)=0$ при $\psi\in\{0,\pi,2\pi,3\pi\}$, то есть при $\varphi\in\left\{0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

Рассмотрим $\mathrm{g}(\rho,\psi)$ при $\psi\in\{0,\pi,2\pi,3\pi\}$. Очевидно, что $\mathrm{g}(\rho,0)=\mathrm{g}(\rho,2\pi)$ и $\mathrm{g}(\rho,\pi)=\mathrm{g}(\rho,3\pi)$. Заметим, что $\lim\limits_{\rho\to0+}\mathrm{g}(\rho,0)=0$ и $\lim\limits_{\rho\to0+}\mathrm{g}(\rho,\pi)=0$. Так как

$$\mathrm{g}'_\rho(\rho,0)=\frac{16\rho}{(1+\rho)(1-\rho)^3}>0 \quad \text{и} \quad \mathrm{g}'_\rho(\rho,\pi)=\frac{16\rho}{(1-\rho)(1+\rho)^3}>0,$$

то есть $\mathrm{g}(\rho,0)$ и $\mathrm{g}(\rho,\pi)$ — монотонно возрастающие на интервале $(0,1)$ функции. Тогда $\mathrm{g}(\rho,0)\geqslant0$ и $\mathrm{g}(\rho,\pi)\geqslant0$. Следовательно, $\dfrac{1}{\gamma-1}\geqslant0$ или $\gamma>1$. Случай при $\gamma=1$ рассмотрен выше в пункте 2.

Рассмотрим первый случай при $\varphi=0$. Тогда $\mu=-1$, $\xi=\rho$, $\overline{q}=q=2-\rho-\dfrac{1}{\rho}$, $b=2\left(1+\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)$, следовательно, с помощью леммы 11 и равенств $q=2(1-\gamma)c_2$, $b=2\,\mathrm{Re}\left(c_3-\gamma c_2^2\right)$ получаем, что c_n, $n\in\mathbb{N}$, вещественные. Таким образом, множество значений граничного отображения симметрично относительно вещественной оси. Согласно теореме 3 множество значений граничного отображения является плоскостью с разрезом по лучу, то есть граничное отображение — отображение, принадлежащее семейству Кебе.

В первом случае при $\varphi=\pi$ аналогично получаем, что граничное отображение принадлежит семейству отображений Кебе.

Рассмотрим первый случай при $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. Тогда $\mu=i$, $\xi=i\rho$, $-iq=2+\rho+\dfrac{1}{\rho}$, $b=-2\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}+1\right)$, то есть $iq,b\in\mathbb{R}$. Следовательно, для граничного отображения

$c_{2n-1}\in\mathbb{R}$, $ic_{2n}\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда множество значений граничного отображения симметрично относительно мнимой оси. Согласно теореме 3 множество значений граничного отображения является плоскостью с разрезом по лучу, то есть граничное отображение — отображение, принадлежащее семейству Кебе.

Случай II. Проинтегрируем уравнение (10), взяв правую часть со знаком минус. Получим

$$\frac{q}{2}\left(\ln\frac{u-1}{u+1}-\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)=$$
$$=-\left(\frac{\mu}{z}+1\right)e^{i\varphi}h+\frac{q}{2}\mu e^{i\varphi}\ln z-\frac{q}{2}\mu e^{i\varphi}\ln\left(1+z\left(\frac{q}{2}+\mu e^{2i\varphi}\right)+h\right)-$$
$$-\left(\mu\big(e^{4i\varphi}-1\big)+\frac{q}{2}e^{2i\varphi}\right)\ln\left(z+e^{2i\varphi}\left(\frac{q}{2}+\mu e^{2i\varphi}\right)+e^{i\varphi}h\right)+C.$$

Из условия $f(0)=0$ находим $\mu=e^{-i\varphi}$ и

$$C=\frac{q}{2}\ln\frac{q}{2}+c_2+2e^{i\varphi}+\left(e^{3i\varphi}-e^{-i\varphi}+\frac{q}{2}e^{2i\varphi}\right)\ln\left(e^{i\varphi}+e^{3i\varphi}+\frac{q}{2}e^{2i\varphi}\right).$$

Из условия $f(\zeta)=-\dfrac{1}{q}$ получим

$$\frac{1}{\gamma-1}=\ln\frac{1+2e^{i\psi}\rho+\rho^2}{1-\rho^2}-\frac{2e^{-i\psi}+\left(\frac{1}{\rho}+\rho\right)}{2+e^{-i\psi}\left(\frac{1}{\rho}+\rho\right)}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}-\frac{4}{2+e^{-i\psi}\left(\frac{1}{\rho}+\rho\right)},$$

где $\psi=2\varphi$. Выполнив замену $\psi=\theta+\pi$, получим равенство (11). Следовательно, в этом случае $\varphi\in\left\{0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right\}$. Аналогично предыдущему случаю получаем $\gamma\leqslant 0$. Проведем такие же рассуждения, как и в случае I. Получим, что при $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ граничное отображение принадлежит семейству Кебе и $c_n\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. При $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ и $\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$ граничное отображение принадлежит семейству Кебе, но $c_{2n-1}\in\mathbb{R}$, $ic_{2n}\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$.

Обозначим через f_1 отображение из семейства Кебе с вещественными коэффициентами в разложении, f_2 — с коэффициентами вида $c_{2n-1}\in\mathbb{R}$, $ic_{2n}\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. Вычислим значения функционала при отображениях f_1 и f_2:

$$I(f_1)=3-4\gamma,\quad I(f_2)=-3+4\gamma.$$

Теорема 4. *Для функционала $I:S\to\mathbb{R}$, $I(f)=\mathrm{Re}\big(c_3-\gamma c_2^2\big)$, при $\gamma\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$*

$$\max_{f\in S}I(f)=\begin{cases}3-4\gamma, & \text{при } \gamma\leqslant 0,\\ 1+2e^{-\frac{2\gamma}{1-\gamma}}, & \text{при } \gamma\in(0,1),\\ -3+4\gamma, & \text{при } \gamma\geqslant 1.\end{cases}$$

При $\gamma\leqslant 0$ граничными отображениями являются отображения Кебе $\dfrac{z}{(1\pm z)^2}$.

При $\gamma \in (0,1)$ *граничными отображениями являются* $f(z)$ *и* $-\ f(-\ z)$, *где* f *имеет вещественные коэффициенты, неявно задается в виде*

$$2e^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}} \ln \frac{1+\sqrt{1-4e^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}} f}}{1-\sqrt{1-4e^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}} f}} - \frac{\sqrt{1-4e^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}} f}}{f} = -\ \frac{1}{z} + z - 2e^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}} \ln z$$

и переводит единичный круг на плоскость с разрезами по трем аналитическим дугам, соединяющимся в точке $\dfrac{1}{4} e^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ *под равными углами, одна из которых уходит на бесконечность по вещественной оси.*

При $\gamma = 1$ *граничными отображениями являются отображения типа отображения Кебе* $\dfrac{-\ z}{z^2 + iBz - 1}$, *где* $B \in [-\ 2, 2]$.

При $\gamma > 1$ *граничными отображениями являются отображения Кебе* $\dfrac{z}{(1 \pm iz)^2}$.

Список литературы

[1] M. Fekete, G. Szegö, "Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen", *J.London Math. Soc.*, **8**:2 (1933), 85–89.

[2] P. L. Duren, *Univalent functions*, Springer-Verlag, 1983.

[3] Г. М. Голузин, "Некоторые вопросы теории однолистных функций", *Тр. МИАН СССР*, **27** (1949), 3–110.

[4] J. A. Jenkins, "On certain coefficients of univalent functions", *Analytic Functions. Princeton University Press*, 1960, 159–194.

[5] A. Pfluger, "The Fekete-Szegö inequality for complex parameters", *Complex Variables*, **7** (1986), 149–160.

[6] И. А. Александров, "Экстремальные свойства класса $S(w_0)$", *Тр. Томского ун-та.*, **169** (1963), 24–58.

[7] A. Pfluger, "The Fekete-Szegö inequality by a variational method", *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A.I. Math.*, **10** (1985), 447–454.

[8] A. Pfluger, "On the Functional $a_3 - \lambda a_2^2$ in the Class S", *Complex Variables*, **10** (1988), 83–95.

[9] H. Siejka, O. Tammi, "On maximizing a homogeneous functional in the class of bounded univalent functions", *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math.*, **6** (1981), 273–288.

[10] J. A. Hummel, "Extremal problems in the class of starlike functions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11**:5 (1960), 741–749.

[11] R. R. London, "Fekete-Szegö inequalities for close-to-convex functions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **117** (1993), 947–950.

[12] B. S. Mehrok, Singh H., "A Coefficient Inequality for a Certain Class of Analytic Functions", *Int. Journal of Math. Analysis*, **5**:7 (2011), 311–318.

[13] B. Bhowmik, S. Ponnusamy, K.-J. Wirths, "On the Fekete–Szegö problem for concave univalent functions", *J Math. Anal. Appl.*, **373** (2011), 432–438.

[14] Q. Xu, T. Liu, X. Liu, "Fekete and Szegö problem in one and higher dimensions", *Sci. China Math.*, **61** (2018), 1775–1788.

[15] Н. А. Лебедев, *Об областях значений функционалов, заданных на классах аналитических функций*, Докторская диссертация, Ленинградский университет, 1955.

[16] Я. В. Борисова, И. А. Колесников, С. А. Копанев, “О малых вариационных формулах”, *Вестн. Томск. гос. ун–та. Матем. и мех.*, 2017, № 49, 5–15.

[17] И. А. Александров, И. А. Колесников, С. А. Копанев, Л. С. Копанева, *Метод внутренних вариаций в теории однолистных отображений*, Изд-во Том. ун-та, Томск, 2017.

[18] Б. А. Фукс, В. И. Левин, *Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. Специальные главы.*, Изд-во технико-теоретической лит-ры, Москва, 1951.

Поступила в редакцию
13 июня 2021 г.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект Регионального научно-образовательного математического цента Томского государственного университета).

Borisova Y. V.[1], *Kolesnikov I.A.*[1], *Kopanev S.A.*[1], *Sadritdinova G.D.*[1] The Fekete-Szegö problem by a variational method. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2021. V. 21. No 2. P. 133–150.

[1] Tomsk State University, Russia

ABSTRACT

The article is devoted to the well-known Fekete and Szegö problem. The paper investigate the problem in sufficient detail using some new observations by the classical method of internal variations, developed at the Tomsk School of Complex Analysis. One particular case is considered. We carried out complete qualitative analysis of the functional-differential equation relative boundary mapping. We completely solved the problem for the real parameter.

Key words: *extremal problem, variational method, Fekete and Szegö problem, functional.*

References

[1] M. Fekete, G. Szegö, “Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen”, *J.London Math. Soc.*, **8**:2 (1933), 85–89.

[2] P. L. Duren, *Univalent functions*, Springer-Verlag, 1983.

[3] G. M. Goluzin, “Nekotorye voprosy teorii odnolistnykh funktsii”, *Tr. MIAN SSSR*, **27** (1949), 3–110.

[4] J. A. Jenkins, “On certain coefficients of univalent functions”, *Analytic Functions. Princeton University Press*, 1960, 159–194.

[5] A. Pfluger, “The Fekete-Szegö inequality for complex parameters”, *Complex Variables*, **7** (1986), 149–160.

[6] I. A. Aleksandrov, “Ekstremal’nye svoistva klassa $S(w_0)$”, *Tr. Tomskogo un-ta.*, **169** (1963), 24–58.

[7] A. Pfluger, “The Fekete-Szegö inequality by a variational method”, *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A.I. Math.*, **10** (1985), 447–454.

[8] A. Pfluger, “On the Functional $a_3 - \lambda a_2^2$ in the Class S”, *Complex Variables*, **10** (1988), 83–95.

[9] H. Siejka, O. Tammi, “On maximizing a homogeneous functional in the class of bounded univalent functions”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math.*, **6** (1981), 273–288.

[10] J. A. Hummel, “Extremal problems in the class of starlike functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11**:5 (1960), 741–749.

[11] R. R. London, “Fekete-Szegö inequalities for close-to-convex functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **117** (1993), 947–950.

[12] B. S. Mehrok, Singh H., “A Coefficient Inequality for a Certain Class of Analytic Functions”, *Int. Journal of Math. Analysis*, **5**:7 (2011), 311–318.

[13] B. Bhowmik, S. Ponnusamy, K.-J. Wirths, “On the Fekete–Szegö problem for concave univalent functions”, *J Math. Anal. Appl.*, **373** (2011), 432–438.

[14] Q. Xu, T. Liu, X. Liu, “Fekete and Szegö problem in one and higher dimensions”, *Sci. China Math.*, **61** (2018), 1775–1788.

[15] N. A. Lebedev, *Ob oblastiakh znachenii funktsionalov, zadannykh na klassakh analiticheskikh funktsii*, Doktorskaia dissertatsiia, Leningradskii universitet, 1955.

[16] Ia. V. Borisova, I. A. Kolesnikov, S. A. Kopanev, “O malykh variatsionnykh formulakh”, *Vestn. Tomsk. gos. un–ta. Matem. i mekh.*, 2017, № 49, 5–15.

[17] I. A. Aleksandrov, I. A. Kolesnikov, S. A. Kopanev, L. S. Kopaneva, *Metod vnutrennikh variatsii v teorii odnolistnykh otobrazhenii*, Izd-vo Tom. un-ta, Tomsk, 2017.

[18] B. A. Fuks, V. I. Levin, *Funktsii kompleksnogo peremennogo i nekotorye ikh prilozheniia. Spetsial’nye glavy.*, Izd-vo tekhniko-teoreticheskoi lit-ry, Moskva, 1951.