

УДК 517.958

MSC2020 35Q20 +35Q60

© П. А. Ворновских<sup>1</sup>, И. В. Прохоров<sup>1</sup>

## Сравнительный анализ погрешности приближения однократного рассеяния при решении одной обратной задачи в двумерном и трехмерном случаях

Рассмотрена обратная задача для нестационарного уравнения переноса излучения, заключающаяся в нахождении коэффициента рассеяния при заданном временно-угловом распределении решения уравнения в некоторой точке. Для решения поставленной задачи использовано приближение однократного рассеяния в импульсном режиме зондирования. Проводится сравнительный анализ погрешности решения обратной задачи в приближении однократного рассеяния для двумерной и трехмерной моделей, описывающих процесс высокочастотного акустического зондирования во флуктуирующем океане. Показано, что в двумерном случае погрешность приближенного решения значительно превосходит ошибку в трехмерной модели.

**Ключевые слова:** уравнение переноса излучения, импульсное зондирование океана, коэффициент рассеяния, обратная задача, методы Монте-Карло.

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202113>

### Введение

В работе [1] была исследована задача нахождения коэффициента рассеяния в нестационарном уравнении переноса излучения для двумерной модели импульсного зондирования в рассеивающей среде. Проведен численный анализ погрешности решения обратной задачи в приближении однократного рассеяния при зондировании флуктуирующего океана на частотах порядка 100кГц. Показано, что на дальности зондирования порядка 400м приближение однократного рассеяния может быть использовано лишь для описания качественного поведения коэффициента рассеяния звука в неоднородной среде, так как относительная среднеквадратичная ошибка может достигать порядка 1000 процентов.

<sup>1</sup> Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.  
Электронная почта: [vornovskikh.polina@gmail.com](mailto:vornovskikh.polina@gmail.com) (П. А. Ворновских), [prokhorov@iam.dvo.ru](mailto:prokhorov@iam.dvo.ru) (И. В. Прохоров).

В данной работе обобщаются результаты [1] на трехмерный случай. Сформулирована задача нахождения коэффициента рассеяния для нестационарного уравнения переноса излучения по известному временно-угловому распределению решения в заданной точке пространства  $\mathbb{R}^3$ . Как и для двумерной модели, в приближении однократного рассеяния получено явное решение обратной задачи. Программно реализован метод Монте-Карло для решения уравнения переноса излучения с импульсным точечным источником излучения и проведен численный анализ погрешности приближенного решения обратной задачи на трехмерных фантомах, которые в некотором смысле аналогичны двумерному фантому из статьи [1]. В первом трехмерном фантоме вместо круговых включений двумерного фантома рассматриваются шаровые включения, а во втором — круговые включения заменены на цилиндрические. Строятся томограммы коэффициента рассеяния в некотором сечении и сравниваются численные значения относительной среднеквадратичной ошибки для двумерного и трехмерного случаев.

## 1. Постановка прямой и обратной задач для уравнения переноса излучения

Нестационарный процесс распространения высокочастотных акустических полей во флуктуирующем океане может быть описан интегро-дифференциальным уравнением переноса излучения [2–8]. В изотропно рассеивающей среде уравнение имеет вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + \mu I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{4\pi} \int_{\Omega} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}' + J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ ,  $t \in [0, T]$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  принадлежит единичной сфере  $\Omega = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{k}| = 1\}$ . Функция  $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$  интерпретируется как плотность потока энергии волны в момент времени  $t$  в точке  $\mathbf{r}$ , распространяющейся в направлении  $\mathbf{k}$  со скоростью  $c$ . Неотрицательные величины  $\mu$  и  $\sigma$  имеют смысл коэффициентов затухания и рассеяния, а функция  $J$  описывает источники звукового поля.

Добавим к уравнению (1) начальное условие

$$I^-(\mathbf{r}, \mathbf{k}, 0) = 0, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{k}) \in G \times \Omega \quad (2)$$

и будем предполагать, что функция  $J$  описывает точечный источник излучения, сосредоточенный в начале координат и излучающий в момент времени  $t=0$  импульс единичной мощности:

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t), \quad (3)$$

где  $\delta$  — дельта-функция Дирака и  $I^{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\mathbf{r} \pm \epsilon, \mathbf{k}, t \pm \epsilon)$ . Относительно функции  $\sigma(\mathbf{r})$  предполагается, что она ограниченная и кусочно-непрерывная в  $\mathbb{R}^3$ .

Сформулируем прямую и обратную задачи для нестационарного уравнения переноса излучения (1).

**Задача 1.** *Прямой задачей для уравнения переноса (1) называется задача определения функции  $I$  из уравнения (1) и начального условия (2) при всех заданных коэффициентах  $c, \mu, \sigma, J$ .*

**Задача 2.** Обратная задача заключается в нахождении функции  $\sigma$  из соотношений (1), (2), (3) и дополнительного условия

$$I^+(0, \mathbf{k}, t) = P(\mathbf{k}, t), \quad (4)$$

в которых величины  $s, \mu$  и функция  $P$  известны.

Решение обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений переноса в общем виде представляет собой достаточно сложную, порой неразрешимую математическую проблему [9, 10], и зачастую удается доказать единственность решения обратных задач только при ограничениях на исходные данные типа «малости» [11, 12]. Тем не менее теория обратных задач для уравнений переноса излучения постоянно привлекает внимание специалистов и ее развитие идет как по пути создания новых методов, так и по пути усложнения существующих моделей переноса излучения [6, 13–17]. При конструктивном решении обратных задач такого рода широкое применение получили методы, базирующиеся на приближении однократного рассеяния, которое существенно облегчает исследование обратных задач [18–20]. В то же время вопросы точности решения при применении приближения однократного рассеяния авторы стараются обходить стороной либо ограничиваются общими положениями.

В настоящей работе основное внимание будет уделено исследованию обратной Задачи 2, а прямая Задача 1 будет рассмотрена лишь с точки зрения построения метода Монте-Карло для анализа ошибки приближения однократного рассеяния при нахождении коэффициента рассеяния.

## 2. Задача Коши для уравнения переноса излучения

Задача Коши (1), (2) эквивалентна уравнению интегрального типа, которое в  $\mathbb{R}^3$  имеет следующий вид [21]:

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) \times \left( \frac{\sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k})}{4\pi} \int_{\Omega} I(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c}) d\mathbf{k}' + J(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c}) \right) d\tau. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) может быть найдено в виде ряда Неймана

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t), \quad (6)$$

где функции  $I_n$ ,  $n=0, 1, \dots$ , определяются рекуррентным образом

$$I_n(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) \frac{\sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k})}{4\pi} \int_{\Omega} I_{n-1}(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c}) d\mathbf{k}' d\tau, \quad (7)$$

$$I_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) \times J(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c}) d\tau. \quad (8)$$

Так как источник излучения имеет вид (3), то компонента  $I_0$  ряда Неймана (6) представляет собой сингулярную часть решения уравнения переноса излучения, а остальные члены ряда — регулярную часть.

Для вычисления компоненты ряда Неймана  $I_1$  подставим соотношение (8) в (7) при  $n = 1$

$$I_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) \sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}) \times \\ \times \int_{\Omega} \int_0^{ct-\tau} \exp(-\mu\tau') J(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k} - \tau'\mathbf{k}', \mathbf{k}', t - \frac{\tau + \tau'}{c}) d\tau' d\mathbf{k}' d\tau. \quad (9)$$

В правой части соотношения (9) сделаем замену переменных  $\mathbf{x} = \mathbf{r} - \tau'\mathbf{k}'$ . Так как якобиан перехода, определяемый системой неявных уравнений

$$F_i(\mathbf{x}, \mathbf{k}', t) = x_i - r_i + \tau' k'_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad F_4(\mathbf{k}') = |\mathbf{k}'| - 1 = 0,$$

имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial F_1}{\partial k'_1} & \frac{\partial F_2}{\partial k'_1} & \frac{\partial F_3}{\partial k'_1} & \frac{\partial F_4}{\partial k'_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial k'_2} & \frac{\partial F_2}{\partial k'_2} & \frac{\partial F_3}{\partial k'_2} & \frac{\partial F_4}{\partial k'_2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial k'_3} & \frac{\partial F_2}{\partial k'_3} & \frac{\partial F_3}{\partial k'_3} & \frac{\partial F_4}{\partial k'_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \tau'} & \frac{\partial F_2}{\partial \tau'} & \frac{\partial F_3}{\partial \tau'} & \frac{\partial F_4}{\partial \tau'} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} \tau' & 0 & 0 & k'_1 \\ 0 & \tau' & 0 & k'_2 \\ 0 & 0 & \tau' & k'_3 \\ k'_1 & k'_2 & k'_3 & 0 \end{array} \right\| = (\tau')^2 |\mathbf{k}'|^2 = |\mathbf{r} - \mathbf{x}|^2,$$

то из (9) находим

$$I_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) \sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}) \times \\ \times \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{ct-\tau}(|\mathbf{r} - \mathbf{x}|) \frac{\exp(-\mu|\mathbf{r} - \mathbf{x}|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^2} \delta(\mathbf{x} - \tau\mathbf{k}) \delta(t - \frac{\tau + |\mathbf{r} - \mathbf{x}|}{c}) d\mathbf{x} d\tau = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_0^{ct} \chi_{ct-\tau}(|\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|) \exp(-\mu\tau) \sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}) \frac{\exp(-\mu|\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|)}{|\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|^2} \delta(t - \frac{\tau + |\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|}{c}) d\tau = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \chi_{ct}(\tau) \chi_{ct-\tau}(|\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|) \frac{\exp(-\mu(\tau + |\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|))}{|\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|^2} \sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}) \delta(t - \frac{\tau + |\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|}{c}) d\tau, \quad (10)$$

где  $\chi_a(x)$  — характеристическая функция интервала  $[0, a]$ . После замены переменных

$$s = (\tau + |\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}|)/c = (\tau + \sqrt{(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{r} - \tau\mathbf{k})})/c = (\tau + \sqrt{|\mathbf{r}|^2 - 2\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + \tau^2})/c,$$

учитывая соотношения

$$\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, s) = \frac{1}{2} \frac{(cs)^2 - |\mathbf{r}|^2}{cs - (\mathbf{r}, \mathbf{k})}, \quad \frac{\partial \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, s)}{ds} = \frac{c((cs)^2 - 2cs(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + |\mathbf{r}|^2)}{2(cs - (\mathbf{r}, \mathbf{k}))^2} = \frac{c}{2} \frac{|\mathbf{r} - cs\mathbf{k}|^2}{(cs - (\mathbf{r}, \mathbf{k}))^2},$$

из (10) получаем

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \chi_{ct}(\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, s)) \chi_{ct-\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, s)}(cs - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, s)) \sigma(\mathbf{r} - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, s)\mathbf{k}) \times \\ &\times \frac{\exp(-\mu cs)}{|\mathbf{r} - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, s)\mathbf{k}|^2} \delta(t - s) \frac{\partial \tau}{ds} ds = \chi_{ct}(\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)) \chi_{ct-\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)}(ct - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)) \times \\ &\times \frac{\exp(-\mu ct)}{4\pi(ct - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t))^2} \frac{\partial \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)}{ds} \sigma(\mathbf{r} - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)\mathbf{k}) = \chi_{ct}(\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)) \frac{\exp(-\mu ct)}{4\pi} \times \\ &\times \frac{4(ct - (\mathbf{r}, \mathbf{k}))^2}{((ct)^2 - 2ct(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + |\mathbf{r}|^2)^2} \frac{c((ct)^2 - 2ct(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + |\mathbf{r}|^2)}{2(ct - (\mathbf{r}, \mathbf{k}))^2} \sigma(\mathbf{r} - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)\mathbf{k}) = \\ &= \chi_{ct}(\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)) \frac{2c \exp(-\mu ct)}{4\pi((ct)^2 - 2ct(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + |\mathbf{r}|^2)} \sigma(\mathbf{r} - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)\mathbf{k}) = \\ &= \frac{2c \exp(-\mu ct)}{4\pi|\mathbf{r} - ct\mathbf{k}|^2} \sigma(\mathbf{r} - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)\mathbf{k}) \chi_{ct}(\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)). \end{aligned} \quad (11)$$

Имея аналитическое выражение для функции  $I_1$ , можно найти следующий член ряда Неймана  $I_2$

$$\begin{aligned} I_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) &= \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau_1) \frac{\sigma(\mathbf{r} - \tau_1\mathbf{k})}{4\pi} \int_\Omega I_1(\mathbf{r} - \tau_1\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, t - \frac{\tau_1}{c}) d\mathbf{k}_1 d\tau_1 = \int_0^{ct} \int_\Omega \exp(-\mu\tau_1) \times \\ &\times \exp(-\mu(ct - \tau_1)) \sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_1 - \tau(\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1)\mathbf{k}_1) \frac{2c \chi_{ct_1}(\tau(\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1))}{(4\pi)^2 |\mathbf{r}_1 - ct_1\mathbf{k}_1|^2} d\mathbf{k}_1 d\tau_1 = \\ &= \frac{2c \exp(-\mu ct)}{(4\pi)^2} \int_0^{ct} \int_\Omega \chi_{ct_1}(\tau(\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1)) \frac{\sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\bar{\mathbf{r}}_1)}{|\mathbf{r}_1 - ct_1\mathbf{k}_1|^2} d\mathbf{k}_1 d\tau_1, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \tau_1\mathbf{k}$ ,  $\bar{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{r}_1 - \tau(\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1)$ ,  $t_1 = t - \tau_1/c$ . Непосредственно из определения функции  $\chi_{ct_1}(\tau(\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1))$  вытекает условие  $\tau(\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1) \geq 0$ , но тогда  $(ct_1)^2 - |\mathbf{r}_1|^2 \geq 0$ , и, следовательно,  $(ct)^2 - 2\tau_1(ct - (\mathbf{r}, \mathbf{k})) - |\mathbf{r}|^2 \geq 0$ . Вспоминая определение функции  $\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ , получаем ограничение на промежуток интегрирования переменной  $\tau_1$  в соотношении (12):  $0 \leq \tau_1 \leq \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ . Поэтому окончательное выражение для функции  $I_2$  принимает вид

$$I_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{2c \exp(-\mu ct)}{(4\pi)^2} \int_0^{\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)} \int_\Omega \frac{\sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\bar{\mathbf{r}}_1)}{|\mathbf{r}_1 - ct_1\mathbf{k}_1|^2} d\mathbf{k}_1 d\tau_1. \quad (13)$$

Из (13) находим выражение для функции  $I_3$

$$\begin{aligned} I_3(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) &= \int_0^{ct} \int_{\Omega} \exp(-\mu\tau_1) \sigma(\mathbf{r}_1) \int_{\Omega} I_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{k}_2, t_2) d\mathbf{k}_2 d\tau_2 d\mathbf{k}_1 d\tau_1 = \\ &= \frac{2c \exp(-\mu ct)}{(4\pi)^3} \int_0^{\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)} \int_{\Omega} \int_0^{\tau(\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1)} \int_{\Omega} \frac{\sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_2) \sigma(\bar{\mathbf{r}}_2)}{|\mathbf{r}_2 - ct_2 \mathbf{k}_2|^2} d\mathbf{k}_2 d\tau_2 d\mathbf{k}_1 d\tau_1, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \tau_2 \mathbf{k}_1$ ,  $\bar{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{r}_1 - \tau(\mathbf{r}_2, \mathbf{k}_2, t_2)$ ,  $t_2 = t_1 - \tau_2/c$ , а при произвольном  $n \geq 3$  для функции  $I_n$  получаем соотношение

$$\begin{aligned} I_n(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) &= \frac{2c \exp(-\mu ct)}{(4\pi)^n} \int_0^{\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0)} \int_{\Omega} \dots \int_0^{\tau(\mathbf{r}_{n-2}, \mathbf{k}_{n-2}, t_{n-2})} \int_{\Omega} \prod_{i=1}^{n-1} \sigma(\mathbf{r}_i) \times \\ &\times \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{|\mathbf{r}_{n-1} - ct_{n-1} \mathbf{k}_{n-1}|^2} d\mathbf{k}_{n-1} d\tau_{n-1} \dots d\mathbf{k}_1 d\tau_1, \end{aligned}$$

где  $\bar{\mathbf{r}}_{n-1} = \mathbf{r}_{n-1} - \tau(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1}) \mathbf{k}_{n-1}$  и  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \tau_i \mathbf{k}_{i-1}$ ,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$ ,  $t_i = t_{i-1} - \tau_i/c$ ,  $t_0 = t$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Таким образом, выражение для функции  $I$  в точке  $(0, \mathbf{k}, t)$  имеет вид

$$\begin{aligned} I^+(0, \mathbf{k}, t) &= I_1^+(0, \mathbf{k}, t) + \frac{c \exp(-\mu ct)}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0)} \int_{\Omega} \dots \int_0^{\tau(\mathbf{r}_{n-2}, \mathbf{k}_{n-2}, t_{n-2})} \int_{\Omega} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma(\mathbf{r}_i)}{4\pi} \times \\ &\times \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{|\mathbf{r}_{n-1} - ct_{n-1} \mathbf{k}_{n-1}|^2} d\mathbf{k}_{n-1} d\tau_{n-1} \dots d\mathbf{k}_1 d\tau_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Соотношение (14) отличается от аналогичного соотношения, приведенного в работе [1], только пониженной на единицу степенью выражения  $|\mathbf{r}_{n-1} - ct_{n-1} \mathbf{k}_{n-1}|^2$  и соответствующими множителями, характеризующими площадь сферы в  $\mathbb{R}^n$ .

### 3. Метод Монте-Карло для вычисления приближенного решения прямой задачи

В этом параграфе мы опишем численную схему метода Монте-Карло для нахождения выражения (14), которое нам потребуется для проведения анализа ошибки решения обратной задачи в приближении однократного рассеяния. Как уже отмечалось, плотность потока однократно рассеянного излучения в точке  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0) = (0, \mathbf{k}, t)$  находится явным образом

$$I_1^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0) = \frac{c \exp(-\mu ct_0)}{2\pi} \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_0)}{|\mathbf{r}_0 - ct_0 \mathbf{k}_0|^2}, \quad (15)$$

а остальные слагаемые в (14), согласно общей схеме метода Монте-Карло для вычисления интегралов [22–25], записываются через математическое ожидание некоторой

случайной величины

$$I_n^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0) = \frac{c \exp(-\mu c t_0)}{2\pi} \mathbb{E} \left[ \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{|\mathbf{r}_{n-1} - ct_{n-1} \mathbf{k}_{n-1}|^2} \prod_{i=1}^{n-1} \sigma(\mathbf{r}_i) \tau(\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{k}_{i-1}, t_{i-1}) \right]. \quad (16)$$

В (16) через  $\mathbb{E}[\theta]$  обозначено математическое ожидание случайной величины  $\theta$ , и траектория

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0), (\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1), \dots, (\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1}) \quad (17)$$

строится следующим образом

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \tau_i \mathbf{k}_{i-1}, \quad t_i = t_{i-1} - \tau_i/c, \quad i = 1 \dots n-1,$$

где  $\mathbf{k}_i$  — случайный вектор, равномерно распределённый на единичной сфере  $\Omega$ , а  $\tau_i$  — случайная величина, равномерно распределённая на отрезке  $[0, \tau(\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{k}_{i-1}, t_{i-1})]$ . После построения цепочки (17) вычисляется еще одна дополнительная точка  $\bar{\mathbf{r}}_{n-1} = \mathbf{r}_{n-1} - \tau(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1}) \mathbf{k}_{n-1}$ , используемая в выражении (16).

С учетом соотношений (15), (16) выражение для функции  $I^+(0, \mathbf{k}, t)$  принимает вид

$$\begin{aligned} I^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} I_n^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0) = \\ &= I_1^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0) + \frac{c \exp(-\mu c t_0)}{2\pi} \mathbb{E} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{|\mathbf{r}_{n-1} - ct_{n-1} \mathbf{k}_{n-1}|^2} \theta_{n-1} \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где случайные величины  $\theta_n$  определяются рекуррентным образом

$$\theta_n = \theta_{n-1} \sigma(\mathbf{r}_n) \tau(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1}), \quad \theta_0 = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если в сумме (18) ограничиться только  $N$  слагаемыми, то это соответствует учёту всех актов рассеяния в среде порядка не выше, чем  $N$ . Таким образом, алгоритм метода Монте-Карло для вычисления усеченной суммы ряда Неймана выглядит следующим образом. Строится траектория (17) и вычисляется случайная величина

$$\Theta_N = \frac{c \exp(-\mu c t_0)}{2\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{|\mathbf{r}_{n-1} - ct_{n-1} \mathbf{k}_{n-1}|^2} \theta_{n-1}. \quad (19)$$

Указанная процедура повторяется  $M$  раз, и полученная выборка случайной величины  $\Theta_N$  усредняется. Полученное значение дает оценку математического ожидания случайной величины  $\Theta_N$ , а это, в свою очередь, является оценкой для плотности потока излучения в приближении  $N$ -кратного рассеяния.

#### 4. Анализ ошибки приближенного решения обратной задачи, обусловленной многократным рассеянием

Получим формулу для определения коэффициента рассеяния в приближении однократного рассеяния. Так как в точке  $\mathbf{r}=0$  функция  $\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = ct/2$  и  $\chi_{ct}(ct/2) = 1$ , то из (11) вытекает

$$I_1^+(0, \mathbf{k}, t) = \frac{\exp(-\mu c t)}{2\pi c t^2} \sigma \left( -\frac{ct}{2} \mathbf{k} \right).$$

Полагая  $\mathbf{k} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$  и  $t = \frac{2|\mathbf{r}|}{c}$  из (22) находим функцию  $\sigma(\mathbf{r})$

$$\sigma(\mathbf{r}) = I_1^+ \left( 0, -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c} \right) \left( \frac{c \exp(-2\mu|\mathbf{r}|)}{8\pi|\mathbf{r}|^2} \right)^{-1}. \quad (20)$$

Формула (20) дает явное решение обратной задачи в приближении однократного рассеяния.

К сожалению, при постановке обратной задачи в условии (4) считается известным полный поток излучения  $P(\mathbf{k}, t) = I^+(0, \mathbf{k}, t)$  в точке  $\mathbf{r} = 0$ , а не каждая функция  $I_n^+(0, \mathbf{k}, t)$  в отдельности, поэтому нахождение функции  $\sigma(\mathbf{r})$  по формуле

$$\sigma(\mathbf{r}) = P \left( -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c} \right) \left( \frac{c \exp(-2\mu|\mathbf{r}|)}{8\pi|\mathbf{r}|^2} \right)^{-1} \quad (21)$$

приводит к естественной ошибке. Основная цель настоящего параграфа — это провести количественный и качественный анализ искажений при расчете функции  $\sigma$  по формуле (21) в зависимости от исходных данных задачи.

Для удобства описания численных результатов обозначим через  $\sigma_n$  коэффициент объемного рассеяния, вычисляемый по формуле

$$\sigma_n(\mathbf{r}) = P_n \left( -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c} \right) \left( \frac{c \exp(-2\mu|\mathbf{r}|)}{8\pi|\mathbf{r}|^2} \right)^{-1}, \quad (22)$$

где  $P_n(\mathbf{k}, t) = I_1(0, \mathbf{k}, t) + \dots + I_n(0, \mathbf{k}, t)$  — решение уравнения переноса излучения в точке  $\mathbf{r} = 0$  в приближении  $n$ -кратного рассеяния. Формула (22) дает точное решение только при  $n = 1$ , а при  $n \geq 2$  функции  $\sigma_n$  представляют собой лишь некоторые приближения коэффициента  $\sigma$ , ошибка в которых обусловлена наличием рассеяния в среде кратностью от двух до  $n$  включительно.

Тестирование будем проводить на фантоме из работы [1], что сделано намеренно, с тем чтобы провести сравнительный анализ погрешности в двумерном и трехмерном случаях. Рассмотрены два типа преобразования включений: в первом случае двумерные фигуры, ограниченные эллипсами, заменены на трехмерные фигуры, ограниченные эллипсоидами, а во втором случае — на фигуры, ограниченные поверхностью эллиптического цилиндра, не ограниченного вдоль оси симметрии.

Восстановление объектов проводилось в плоскости  $r_3 = 0$  и по осям  $r_1, r_2$ , область зондирования имела размеры  $160\text{м} \times 80\text{м}$ , ( $r_1 \in [-80, 80], r_2 \in [0, -80]$ ). Скорость звука и коэффициент затухания соответствуют реальным величинам, характерным для акустического зондирования на частотах порядка  $100\text{кГц}$ :  $c = 1500\text{м/с}$ ,  $\mu = 0.018\text{м}^{-1}$ . Отношение  $\sigma/\mu$  в основной водной среде составляло  $0.1$  [3], а во включениях уровень рассеяния менялся в диапазоне от  $0$  до  $1$ .

На рисунках 1, 2 представлены результаты восстановления функции  $\sigma_{10}$  для случая шаровых и цилиндрических включений соответственно. Справа размещена шкала изменения восстановленного коэффициента рассеяния. Реконструированные изображения визуально практически не отличаются друг от друга и от оригинала [1].



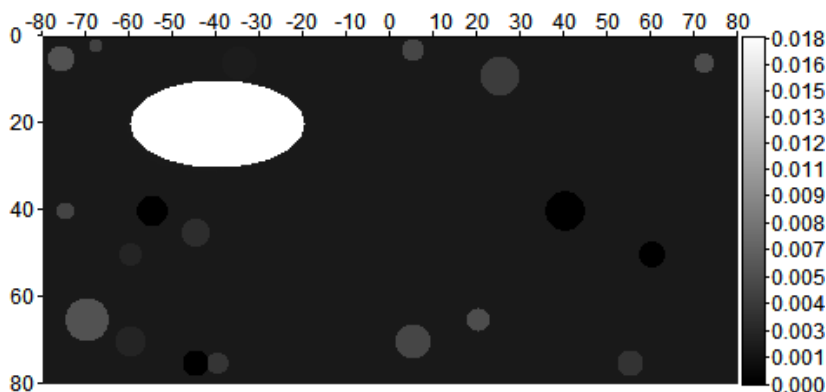


Рис. 1. Карта распределения функции  $\sigma_{10}(r_1, r_2, r_3)$  в плоскости  $r_3 = 0$  при облучении импульсным точечным источником, сосредоточенным в точке  $(0, 0, 0)$ , полученная при восстановлении коэффициента  $\sigma$  с учетом рассеяния до 10-ой кратности рассеяния включительно, в случае включений, ограниченных эллипсоидальными поверхностями в среде с коэффициентом ослабления  $\mu = 0.018\text{м}^{-1}$ .

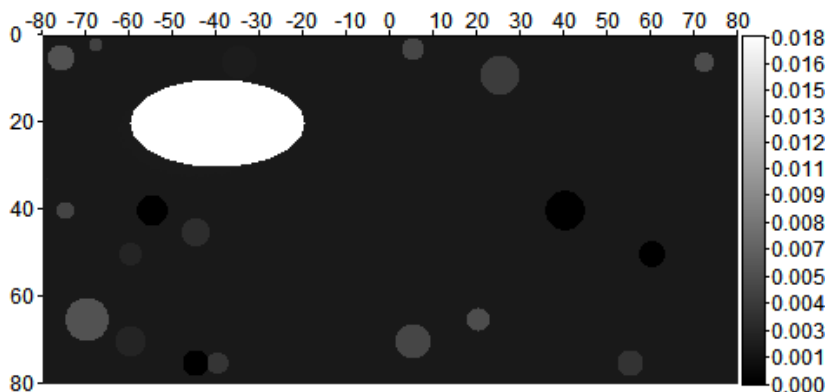


Рис. 2. Карта распределения функции  $\sigma_{10}(r_1, r_2, r_3)$  в плоскости  $r_3 = 0$ , полученная при восстановлении коэффициента  $\sigma$  с учетом 10-кратного рассеяния в среде с коэффициентом ослабления  $\mu = 0.018\text{м}^{-1}$ , содержащей цилиндрические включения.

Для количественного контроля качества изображений, как и в работе [1], выбрана нормированная среднеквадратичная ошибка в плоскости  $r_3 = 0$

$$\varepsilon_n = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (\sigma_n(r_{1,i}, r_{2,j}, 0) - \sigma(r_{1,i}, r_{2,j}, 0))^2}{\sum_i \sum_j \sigma^2(r_{1,i}, r_{2,j}, 0)}}.$$

Таблицы 1 и 2 содержат значения нормированных среднеквадратичных ошибок

$\varepsilon_n$  в зависимости от кратности рассеяния  $n$ , учитываемой при моделировании процесса зондирования. В таблице 1 размещены ошибки для включений, ограниченных эллипсоидами, а в таблице 2 — для включений, ограниченных поверхностями эллиптического цилиндра, бесконечного вдоль оси симметрии. В обоих случаях ошибка не превышает одного процента и достаточно быстро стабилизируется уже начиная с кратности рассеяния  $n = 5$ . Ошибка для цилиндрических рассеивающих неоднородностей приблизительно в полтора раза превосходит ошибку для шаровых рассеивающих включений, что обусловлено значительно большим рассеивающим объемом цилиндрических включений.

Таблица 1. Нормированная среднеквадратичная ошибка  $\varepsilon_n$  для  $n$ -ой кратности рассеяния для эллипсоидальных включений

$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_5$	$\varepsilon_6$	$\varepsilon_7$	$\varepsilon_8$
0	0.000983	0.001279	0.001349	0.001361	0.001363	0.001363	0.001363

Таблица 2. Нормированная среднеквадратичная ошибка  $\varepsilon_n$  для  $n$ -ой кратности рассеяния для цилиндрических включений

$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_5$	$\varepsilon_6$	$\varepsilon_7$	$\varepsilon_8$
0	0.001226	0.001787	0.00188	0.001903	0.001905	0.001906	0.001906

Как следует из результатов работы [1], в двумерном случае для рассматриваемого модельного эксперимента относительная среднеквадратичная ошибка превышает 0.5, что на два порядка больше аналогичной ошибки в сечении  $r_3$  в трехмерном случае (см. таблицу 3).

Таблица 3. Нормированная среднеквадратичная ошибка  $\varepsilon_n$  для  $n$ -ой кратности рассеяния в двумерном случае [1]

$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_5$
0	0.400	0.510	0.531	0.534

Во втором эксперименте рассмотрена та же самая модельная структура облучаемой среды, но коэффициенты  $\mu$  и  $\sigma$  пропорционально увеличены в пять раз относительно значений коэффициентов в первом эксперименте. С физической точки зрения такая замена эквивалентна рассмотрению процесса излучения с теми же параметрами  $\mu$  и  $\sigma$  в области, линейные размеры которой увеличены в 5 раз ( $r_1 \in [-400, 400]$ ,  $r_2 \in [0, -400]$ ).

На рисунках 3, 4 представлены результаты восстановления функций  $\sigma_{10}$  по формуле (22) при  $\mu = 0.09\text{м}^{-1}$  для эллипсоидальных и цилиндрических неоднородностей соответственно.

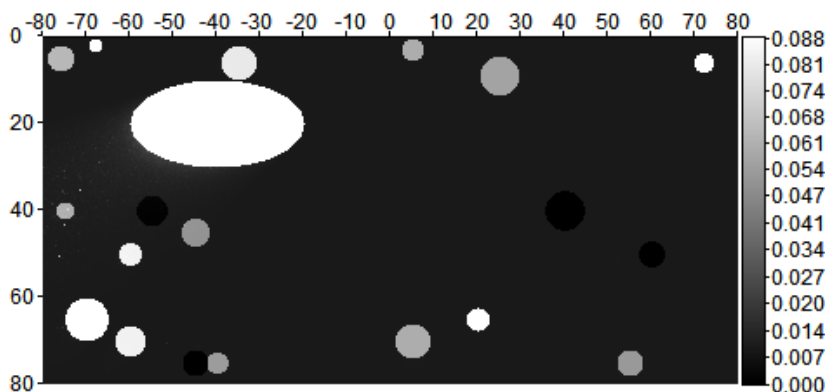


Рис. 3. Карта распределения функции  $\sigma_{10}(r_1, r_2, r_3)$  в плоскости  $r_3 = 0$  для эллипсоидальных включений в среде с коэффициентом ослабления  $\mu = 0.09\text{м}^{-1}$ .

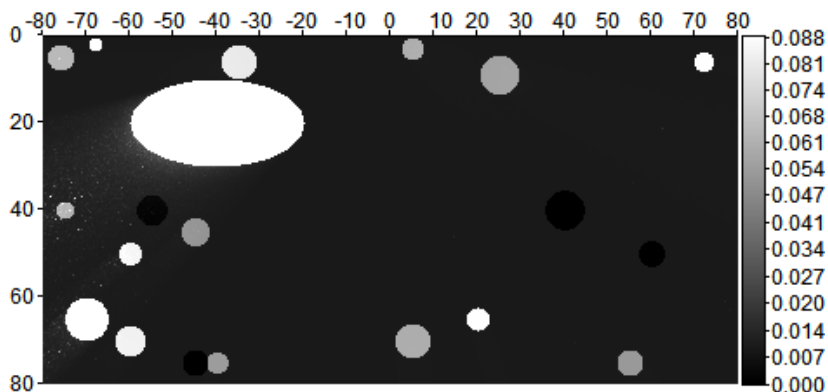


Рис. 4. Карта распределения функции  $\sigma_{10}(r_1, r_2, r_3)$  в плоскости  $r_3 = 0$  для цилиндрических включений в среде с коэффициентом ослабления  $\mu = 0.09\text{м}^{-1}$ .

Таблицы 4 и 5 содержат значения нормированных среднеквадратичных ошибок  $\varepsilon_n$  в зависимости от кратности рассеяния  $n$ . В таблице 4 размещены ошибки для включений, ограниченных эллипсоидами, а в таблице 5 — для включения, ограниченных поверхностями эллиптического цилиндра. По сравнению с первым экспериментом ошибка восстановления коэффициента рассеяния увеличилась больше чем на порядок, но не превышает 9 процентов. Как и в первом эксперименте, ошибка для цилиндрических рассеивающих неоднородностей приблизительно в полтора раза превосходит ошибку для шаровых рассеивающих включений.

Для сравнения в таблице 6 приведены вычисленные значения нормированных среднеквадратичных ошибок  $\varepsilon_n$  в зависимости от  $n$  для двумерного случая [1]. Так же, как и в первом эксперименте, в двумерном случае относительная среднеквад-

ратичная ошибка превышает на два порядка аналогичную ошибку в трехмерном случае (см. таблицу 6).

Таблица 4. Нормированная среднеквадратичная ошибка  $\varepsilon_n$  для эллипсоидальных включений в среде с коэффициентом ослабления  $\mu = 0.09\text{м}^{-1}$ .

$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_5$	$\varepsilon_6$	$\varepsilon_7$	$\varepsilon_8$	$\varepsilon_9$	$\varepsilon_{10}$
0	0.0382	0.0396	0.0428	0.0475	0.0508	0.0530	0.0541	0.0553	0.0562

Таблица 5. Нормированная среднеквадратичная ошибка  $\varepsilon_n$  для цилиндрических включений (см. таблицу 2) в случае, когда область зондирования увеличена в пять раз

$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_5$	$\varepsilon_6$	$\varepsilon_7$	$\varepsilon_8$	$\varepsilon_9$	$\varepsilon_{10}$
0	0.0385	0.0416	0.0489	0.0585	0.0672	0.0732	0.0779	0.0803	0.0813

Таблица 6. Нормированная среднеквадратичная ошибка  $\varepsilon_n$  в двумерном случае для области зондирования, увеличенной в пять раз [1]

$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_5$	$\varepsilon_6$	$\varepsilon_7$	$\varepsilon_8$	$\varepsilon_9$	$\varepsilon_{10}$
0	2.421	5.198	8.656	11.68	13.81	14.76	15.22	15.44	15.49

## Заключение

Таким образом, при определении коэффициента рассеяния звука по формуле (21) влияние многократного рассеяния значительно сильнее выражено в двумерном случае. В отличие от двумерного случая, приближение однократного рассеяния при импульсном зондировании трехмерной среды на дальности до 400м можно использовать не только для получения хороших качественных результатов, но и для нахождения приемлемых количественных оценок коэффициента рассеяния. Отметим, что кажущаяся нестыковка результатов, полученных для  $\mathbb{R}^2$  и в случае цилиндрических включений в  $\mathbb{R}^3$ , обусловлена тем, что источник излучения сосредоточен в точке  $(0,0,0)$ , а не распределен вдоль всей оси  $r_3$ .

## Список литературы

- [1] П. А. Ворновских, А. Ким, И. В. Прохоров, “Применимость приближения однократного рассеяния при импульсном зондировании неоднородной среды”, *Компьютерные исследования и моделирование*, **12**:5 (2020), 1063–1079.
- [2] А. Исимару, *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах*, Мир, М., 1981.

- [3] В. И. Мендус, Г. А. Постнов, “Об угловом распределении высокочастотных динамических шумов океана”, *Акустический журнал*, **39:6** (1993), 1107–1116.
- [4] И. Б. Андреева, А. В. Белоусов, “О допустимости использования приближения однократного рассеяния акустических волн в задачах о скоплениях гидробионтов”, *Акустический журнал*, **42:4** (1996), 560–562.
- [5] G. Bal, “Kinetics of scalar wave fields in random media”, *Wave Motion*, **43** (2005), 132–157.
- [6] G. Bal, “Inverse transport theory and applications”, *Inverse Problems*, **25:5** (2009), 025019.
- [7] И. В. Прохоров, В. В. Золотарев, И. Б. Агафонов, “Задача акустического зондирования во флуктуирующем океане”, *Дальневосточный математический журнал*, **11:1** (2011), 76–87.
- [8] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “Исследование задачи акустического зондирования морского дна методами теории переноса излучения”, *Акустический журнал*, **61:3** (2015), 400–408.
- [9] Д. С. Аниконов, А. Е. Ковтанюк, И. В. Прохоров, *Использование уравнения переноса в томографии*, Логос, М., 2000.
- [10] D. S. Anikonov, V. G. Nazarov, I. V. Prokhorov, *Poorly visible media in X-ray tomography*, Inverse and Ill-Posed Problems Series, **38**, VSP, Boston-Utrecht, 2002.
- [11] А. В. Прилепко, А. Л. Иванков, “Обратные задачи определения коэффициента, индикатрисы рассеяния и правой части нестационарного многоскоростного уравнения переноса”, *Дифференциальные уравнения*, **21:5** (1985), 870–885.
- [12] В. Г. Романов, “Оценка устойчивости в задаче об определении коэффициента ослабления и индикатрисы рассеяния для уравнения переноса”, *Сиб. матем. журн.*, **37:2** (1996), 361–377.
- [13] S. Acosta, “Time reversal for radiative transport with applications to inverse and control problems”, *Inverse Problems*, **29** (2013), 085014.
- [14] C. Wang, T. Zhou, “A hybrid reconstruction approach for absorption coefficient by fluorescence photoacoustic tomography”, *Inverse Problems*, **35** (2018), 025005.
- [15] M. Bellassoued, Y. Boughanja, “An inverse problem for the linear Boltzmann equation with a time-dependent coefficient”, *Inverse Problems*, **35** (2019), 085003.
- [16] W. Dahmen, F. Gruber, O. Mula, “An adaptive nested source term iteration for radiative transfer equations”, *Math. Comp.*, **89** (2020), 1605–1646.
- [17] Q. Li, W. Sun, “Applications of kinetic tools to inverse transport problems”, *Inverse Problems*, **36** (2020), 035011.
- [18] L. Florescu, V. A. Markel, J. C. Schotland, “Single-scattering optical tomography: simultaneous reconstruction of scattering and absorption”, *Phys. Rev. E.*, **81** (2010), 016602.
- [19] A. Kleinboehl, J. T. Schofield, W. A. Abdou, P. G. J. Irwin, de R. J. Kok, “A single-scattering approximation for infrared radiative transfer in limb geometry in the Martian atmosphere”, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **112:10** (2011), 1568–1580.
- [20] S. Moon, Y. Hristova, B. Kwon, “Single scattering tomography with curved detectors”, *Journal Biomedical Physics and Engineering Express*, **4** (2018), 045040.
- [21] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “Задача Коши для уравнения переноса излучения в неограниченной среде”, *Дальневост. матем. журн.*, **18:1** (2018), 101–111.
- [22] Г. И. Марчук, Г. А. Михайлов, М. А. Назаралиев и др., *Метод Монте-Карло в атмосферной оптике*, Наука, Новосибирск, 1976.
- [23] Г. А. Михайлов, И. Н. Медведев, *Оптимизация весовых алгоритмов статистического моделирования*, Омега Принт, Новосибирск, 2011.

- [24] С. М. Пригарин, “Статистическое моделирование эффектов, связанных с многократным рассеянием импульсов наземных и космических лидаров в облачной атмосфере”, *Оптика атмосферы и океана*, **29**:9 (2016), 747–751.
- [25] А. Ким, И. В. Прохоров, “Теоретический и численный анализ начально-краевой задачи для уравнения переноса излучения с френелевскими условиями сопряжения”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **58**:5 (2018), 762–777.

Поступила в редакцию  
12 октября 2021 г.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 075-01095-20-00 при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00173).

*Vornovskikh P. A.*<sup>1</sup>, *Prokhorov I. V.*<sup>1</sup> Comparative analysis of the error of the single scattering approximation when solving one inverse problem in two-dimensional and three-dimensional cases. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2021. V. 21. No 2. P. 151–165.

<sup>1</sup>Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

#### ABSTRACT

The inverse problem for the nonstationary radiative transfer equation is considered, which consists in finding the scattering coefficient for a given time-angular distribution of the solution to the equation at a certain point. To solve this problem, the single scattering approximation in the pulsed sounding mode is used. A comparative analysis of the error in solving the inverse problem in the single scattering approximation for two-dimensional and three-dimensional models describing the process of high-frequency acoustic sounding in a fluctuating ocean is carried out. It is shown that in the two-dimensional case the error of the approximate solution significantly exceeds the error in the three-dimensional model.

Key words: *radiative transfer equation, pulsed ocean sounding, scattering coefficient, inverse problem, Monte Carlo methods*

#### References

- [1] P. A. Vornovskikh, A. Kim, I. V. Prokhorov, “Primenimost’ priblizheniia odnokratnogo rasseianiia pri impul’snom zondirovanii neodnorodnoi sredy”, *Komp’yuternye issledovaniia i modelirovanie*, **12**:5 (2020), 1063–1079.
- [2] A. Isimaru, *Rasprostranenie i rasseianie voln v sluchaino-neodnorodnykh sredakh*, Mir, M., 1981.
- [3] V. I. Mendus, G. A. Postnov, “Ob uglovom raspredelenii vysokochastotnykh dinamicheskikh шумов океана”, *Akusticheskii zhurnal*, **39**:6 (1993), 1107–1116.
- [4] I. B. Andreeva, A. V. Belousov, “O dopustimosti ispol’zovaniia priblizheniia odnokratnogo rasseianiia akusticheskikh voln v zadachakh o skopleniiakh gidrobiontov”, *Akusticheskii zhurnal*, **42**:4 (1996), 560–562.
- [5] G. Bal, “Kinetics of scalar wave fields in random media”, *Wave Motion*, **43** (2005), 132–157.

- [6] G. Bal, “Inverse transport theory and applications”, *Inverse Problems*, **25**:5 (2009), 025019.
- [7] I. V. Prokhorov, V. V. Zolotarev, I. B. Agafonov, “Zadacha akusticheskogo zondirovaniia vo fluktuiruiushchem okeane”, *Dal’nevostochnyi matematicheskii zhurnal*, **11**:1 (2011), 76–87.
- [8] I. V. Prokhorov, A. A. Sushchenko, “Issledovanie zadachi akusticheskogo zondirovaniia morskogo dna metodami teorii perenosa izlucheniia”, *Akusticheskii zhurnal*, **61**:3 (2015), 400–408.
- [9] D. S. Anikonov, A. E. Kovtaniuk, I. V. Prokhorov, *Ispol’zovanie uravneniia perenosa v tomografii*, Logos, M., 2000.
- [10] D. S. Anikonov, V. G. Nazarov, I. V. Prokhorov, *Poorly visible media in X-ray tomography*, Inverse and Ill-Posed Problems Series, **38**, VSP, Boston-Utrecht, 2002.
- [11] A. B. Prilepko, A. L. Ivankov, “Obratnye zadachi opredeleniia koeffitsienta, indikatsy rasseyaniia i pravoii chasti nestatsionarnogo mnogoskorostnogo uravneniia perenosa”, *Differentsial’nye uravneniia*, **21**:5 (1985), 870–885.
- [12] V. G. Romanov, “Otsenka ustoiichivosti v zadache ob opredelenii koeffitsienta oslableniia i indikatsy rasseianiia dlia uravneniia perenosa”, *Sib. matem. zhurn.*, **37**:2 (1996), 361–377.
- [13] S. Acosta, “Time reversal for radiative transport with applications to inverse and control problems”, *Inverse Problems*, **29** (2013), 085014.
- [14] C. Wang, T. Zhou, “A hybrid reconstruction approach for absorption coefficient by fluorescence photoacoustic tomography”, *Inverse Problems*, **35** (2018), 025005.
- [15] M. Bellassoued, Y. Boughanja, “An inverse problem for the linear Boltzmann equation with a time-dependent coefficient”, *Inverse Problems*, **35** (2019), 085003.
- [16] W. Dahmen, F. Gruber, O. Mula, “An adaptive nested source term iteration for radiative transfer equations”, *Math. Comp.*, **89** (2020), 1605–1646.
- [17] Q. Li, W. Sun, “Applications of kinetic tools to inverse transport problems”, *Inverse Problems*, **36** (2020), 035011.
- [18] L. Florescu, V. A. Markel, J. C. Schotland, “Single-scattering optical tomography: simultaneous reconstruction of scattering and absorption”, *Phys. Rev. E.*, **81** (2010), 016602.
- [19] A. Kleinboehl, J. T. Schofield, W. A. Abdou, P. G. J. Irwin, de R. J. Kok, “A single-scattering approximation for infrared radiative transfer in limb geometry in the Martian atmosphere”, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **112**:10 (2011), 1568–1580.
- [20] S. Moon, Y. Hristova B. Kwon, “Single scattering tomography with curved detectors”, *Journal Biomedical Physics and Engineering Express*, **4** (2018), 045040.
- [21] I. V. Prokhorov, A. A. Sushchenko, “Zadacha Koshi dlia uravneniia perenosa izlucheniia v neogranichennoi srede”, *Dal’nevost. matem. zhurn.*, **18**:1 (2018), 101–111.
- [22] G. I. Marchuk, G. A. Mikhailov, M. A. Nazaraliev i dr., *Metod Monte-Karlo v atmosfernoi optike*, Nauka, Novosibirsk, 1976.
- [23] G. A. Mikhailov, I. N. Medvedev, *Optimizatsiia vesovykh algoritmov statisticheskogo modelirovaniia*, Omega Print, Novosibirsk, 2011.
- [24] S. M. Prigarin, “Statisticheskoe modelirovanie effektov, sviazannykh s mnogokratnym rasseyaniem impul’sov nazemnykh i kosmicheskikh lidarov v oblachnoi atmosfere”, *Optika atmosfery i okeana*, **29**:9 (2016), 747–751.
- [25] A. Kim, I. V. Prokhorov, “Teoreticheskii i chislennyi analiz nachal’no-kraevoi zadachi dlia uravneniia perenosa izlucheniia s frenelevskimi usloviiami sopriazheniia”, *Zhurnal vychislitel’noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, **58**:5 (2018), 762–777.