Дальневосточный математический журнал. 2021. Т. 21. № 2. С. 166–179

УДК УДК 531.01
MSC2020 70H05

© А. И. Гудименко[1]

Ковариантный формализм гидродинамики гамильтоновых систем

Теория гидродинамической редукции неавтономной гамильтоновой механики (В. Козлов, 1983) представлена в геометрическом формализме расслоений над осью времени $\mathbb{R}$. В этом формализме время является одной из координат, а не параметром, связности описывают системы отсчета и поля скоростей механической системы. Уравнения теории представлены в форме, инвариантной по отношению к зависящим от времени координатным преобразованиям и выбору систем отсчета.

Ключевые слова: *ковариантный формализм, гамильтонова неавтономная механика, многомерная гидродинамика.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202114

Введение

В конце прошлого века В. Козловым была построена теория гидродинамической редукции гамильтоновых механических систем [1, 2], открывшая возможность использования идей и методов гидродинамики в конечномерной механике. Теория была изложена в формализме, в котором ряд понятий теории (например поле импульсов, форма завихренности) не сохраняли свой вид при координатных преобразованиях, зависящих от времени. Кроме того, отсутствовала в явной форме зависимость представления основных величин (например форм Гамильтона – Картана и Бернулли, или в терминологии В. Козлова — форм энергии-импульса) от выбора системы отсчета.

В этот же период Г. Сарданашвили, основываясь на полисимплектическом гамильтоновом формализме теории поля [3], разработал ковариантный формализм неавтономной гамильтоновой механики, то есть такой формализм, в котором понятия и законы механики выражаются в форме, инвариантной относительно зависящих от времени преобразований координат и выбора системы отсчета [4,5]. Отметим, что полисимплектический гамильтонов формализм является одним из вариантов конечномерного ковариантного описания гамильтоновых систем классической теории

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `gudimenko@iam.dvo.ru`

поля наряду с мультисимплектическим и некоторыми другими формализмами (см., например, обзорные статьи [6, 7]).

В настоящей статье основные результаты работ В. Козлова [1, 2], относящиеся к гидродинамике гамильтоновых систем, записываются в ковариантном формализме Г. Сарданашвили неавтономной гамильтоновой механики. Мы рассматриваем нашу работу как подготовительную для последующего обобщения гидродинамических идей В. Козлова на классическую гамильтонову теорию поля.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 фиксируются обозначения и терминология, которые нам показалось уместно привести в начале статьи, хотя по своему характеру статья большей частью состоит из обозначений и терминов. В разделах 2 и 3 мы напоминаем основные элементы геометрических формализмов лагранжевой и гамильтоновой неавтономной механик, которые далее используются в основной части статьи, включающей разделы 4–6.

В разделе 4 мы придаем ковариантную форму гидродинамическому формализму В. Козлова, в разделе 6 — аналогичную форму гидродинамической редукции гамильтоновой неавтономной механики. Раздел 5 является подготовительным для раздела 6. В нем обсуждаются геометрические понятия (поля импульсов и связности на композиционном фазовом расслоении), которые устанавливают связь формализмов разделов 3 и 4.

Так как в работе описываются формализмы, часть статьи написана в форме глоссария, для того чтобы более четко выделить основные структурные элементы формализмов и их связи.

1. Об обозначениях и терминологии

Используемый в работе аппарат дифференциальной геометрии, включая большую часть обозначений и терминологии, изложен в учебниках [8–10]. Мы отметим лишь следующие моменты.

Если $\phi\colon X \to Y$ — морфизм многообразий, то, как обычно, ϕ^* обозначает индуцированное отображение форм на Y в формы на X. Мы называем ϕ^* pullback-отображением форм, индуцированным морфизмом ϕ. Для производной Ли вдоль векторного поля v мы используем обозначение ∂_v.

Символ «$\cdot$» используется в качестве заменителя скобок в сложных выражениях, включающих операции и операнды. В этих выражениях набор (композиция) операций слева от точки и набор операндов справа рассматриваются каждый как целое. Например, обозначение $f\circ \mathrm{g}\cdot(x,y)$ означает $(f\circ \mathrm{g})(x,y)$.

В работе используется понятие композиционного расслоения. Стандартный пример — касательное расслоение $\tau_Y : TY \to Y$ расслоения $\pi : Y \to X$. Для такого расслоения проекции τ_Y и π составляют композицию

$$\pi \circ \tau_Y : TY \to Y \to X,$$

откуда и название. Характеризующим свойством композиционного расслоения является (в обозначениях рассматриваемого примера) независимость при координатных преобразованиях вертикальных координат расслоения π от вертикальных координат расслоения τ_Y.

2. Геометрический формализм лагранжевой механики

Напомним основные элементы формализма лагранжевой механики первого порядка на расслоении джетов [8, 11–13].

Конфигурационное расслоение — произвольное расслоение $\pi\colon X \to \mathbb{R}$.

Предполагается, что на $\mathbb{R}$ фиксирована декартова координата t и в качестве координатных преобразований допускаются только сдвиги. Такой выбор координат означает, что участием касательного $T\mathbb{R}$ и кокасательного $T^*\mathbb{R}$ расслоений можно пренебречь [12]. Мы следуем этому правилу, оставляя, где это уместно, за геометрическими объектами исходные названия.

Адаптированные координаты на конфигурационном пространстве X обозначаются (t, x^i).

Как расслоение над стягиваемой базой, конфигурационное расслоение тривиально [14]. Его тривиализации различаются фибрацией пространства X в типичный слой [13].

Фазовое расслоение — аффинное расслоение 1-джетов $\pi^{1,0}\colon J^1X \to X$ расслоения π. Это композиционное расслоение

$$\pi^1 = \pi \circ \pi^{1,0}\colon J^1X \to X \to \mathbb{R},$$

где $\pi^1\colon J^1X \to \mathbb{R}$ — расслоение 1-джетов π. Многообразие джетов J^1X (лагранжево фазовое пространство) снабжено натуральными адаптированными координатами (t, x^i, x^i_t), где x^i_t определяется соотношением

$$x^i_t(j^1_t s) = \partial_t s^i$$

для любого 1-джета $j^1_t s \in J^1X$ локального сечения $s\colon \mathbb{R} \to X$ расслоения π.

Форма Пуанкаре – Картана — каноническая 1-форма на J^1X

$$L := \partial^t_i \mathcal{L}(dx^i - x^i_t dt) + \mathcal{L}dt,$$

где $\mathcal{L}\colon J^1X \to \mathbb{R}$ — функция, называемая лагранжевой плотностью. Выражение в скобках называется контактной формой.

Горизонтальная форма $\lambda := \mathcal{L}dt$ на π^1 называется лагранжианом. Пара (J^1X, L) называется лагранжевой системой.

Экстремаль лагранжевой системы (J^1X, L) — это сечение $s\colon \mathbb{R} \to X$ расслоения π, такое, что для любого векторного поля Υ на J^1Y

$$(j^1 s)^* \cdot \Upsilon \rfloor dL = 0,$$

где $j^1 s$ — джет-продолжение сечения s.

Данное определение (см. [15, Definition 2.1]) эквивалентно классическому определению экстремали интегрального функционала вариационной задачи первого порядка [6].

Форма Эйлера – Лагранжа — 2-форма на расслоении 2-джетов J^2X расслоения π

$$E := (\partial_i \mathcal{L} - d_t \partial_i^t \mathcal{L})(dx^i - x_t^i dt) \wedge dt,$$

где

$$d_t := \partial_t + x_t^i \partial_i + x_{tt}^i \partial_i^t$$

— полная производная по t. Форма Эйлера – Лагранжа — это 1-контактная часть формы dL [11].

Уравнения Эйлера – Лагранжа — система уравнений

$$\partial_i \mathcal{L} - d_t \partial_i^t \mathcal{L} = 0.$$

Справедливо утверждение: сечение $s\colon \mathbb{R} \to X$ является экстремалью лагранжевой системы (J^1X, L) тогда и только тогда, когда s — решение уравнений Эйлера – Лагранжа

3. Ковариантный формализм гамильтоновой неавтономной механики

Напомним некоторые ключевые понятия гамильтоновой неавтономной механики в подходе Г. Сарданашвили [4, 12, 13].

Конфигурационное расслоение — то же, что и в формализме лагранжевой механики: произвольное расслоение $\pi\colon X \to \mathbb{R}$.

Система отсчета — связность

$$o\colon X \to TX, \quad o = \partial_t + o^i \partial_i$$

на конфигурационном расслоении π.

Система отсчета (мы называем ее также отсчетной связностью) в ковариантной гамильтоновой механике играет двоякую роль. С одной стороны, она рассматривается как поле наблюдателей. В этом случае ее ковариантный дифференциал

$$\nabla^o\colon J^1X \to VX, \quad \nabla^o := (\dot{x}^i - o^i)\partial_i,$$

представляет относительную скорость. С другой стороны, она определяет относительный гамильтониан механической системы, ибо в ковариантной гамильтоновой механике гамильтониан как функция на фазовом пространстве не имеет абсолютного смысла.

Альтернативное определение системы отсчета основывается на том, что связность o на расслоении π плоская и, как таковая, определяет на нем атлас локально постоянных тривиализаций. В ассоциированных с этим атласом координатах $o = \partial_t$. Такие атласы также называют системами отсчета. Оба определения системы отсчета эквивалентны.

Фазовое расслоение — вертикальное кокасательное расслоение $\pi_X : V^*X \to X$. Его сечения $u\colon X \to V^*X$ суть вертикальные ковекторные поля на π. Они интерпретируются как поля импульсов механической системы.

Фазовое расслоение является композиционным расслоением

$$\pi_{\mathbb{R}} := \pi \circ \pi_X \colon V^*X \to X \to \mathbb{R}$$

с адаптированными координатами (t, x^i, p_i). Мы называем $\pi_{\mathbb{R}}$ композиционным фазовым расслоением. Сечения $s\colon \mathbb{R} \to V^*X$ расслоения $\pi_{\mathbb{R}}$ называются фазовыми сечениями, а их образы — фазовыми траекториями.

Фазовое пространство V^*X снабжено каноническими формами

$$\Theta := p_i dx^i \wedge dt,$$
$$\Omega := d\Theta = dp_i \wedge dx^i \wedge dt.$$

Форма Гамильтона – Картана — каноническая 1-форма

$$H := p_i(dx^i - o^i dt) - \mathcal{H} dt$$

на V^*X. Она определяется отсчетной связностью o на π и $\pi_{\mathbb{R}}$-горизонтальной функцией $\mathcal{H}$, называемой гамильтоновой функцией относительно системы отсчета o. Величина $\mathcal{H} dt$ называется гамильтонианом относительно o. Пара (V^*X, H) называется гамильтоновой системой.

Гамильтонова связность — связность

$$\Gamma\colon V^*X \to TV^*X, \quad \Gamma = \partial_t + \Gamma^i \partial_i + \Gamma_i \partial^i$$

на $\pi_{\mathbb{R}}$, подчиненная уравнению

$$\Gamma \rfloor \Omega = dH \tag{1}$$

для некоторой формы Гамильтона – Картана H. Связность, удовлетворяющая (1), обозначается Γ_H. Гамильтонова связность интерпретируется в гамильтоновой механике как поле скоростей гамильтоновой системы.

Так как $dH \wedge dt = \Omega$, то (1) эквивалентно уравнению

$$\Gamma \rfloor dH = 0.$$

В координатах уравнение (1) имеет вид

$$\Gamma^i = \partial^i (p_i o^i + \mathcal{H}), \quad \Gamma_i = -\,\partial_i (p_i o^i + \mathcal{H}). \tag{2}$$

Уравнения Гамильтона — это уравнения

$$x^i_t = \partial^i (p_i o^i + \mathcal{H}), \quad p_{it} = -\,\partial_i (p_i o^i + \mathcal{H}) \tag{3}$$

(см. пояснение к следующему термину).

Характеристическая лагранжева система для гамильтоновой системы (V^*X, H) — это лагранжева система (J^1V^*X, L_H), в которой

$$L_H := (\pi_{\mathbb{R}}^{1,0})^* H.$$

Так как
$$\begin{aligned} L_H &= \partial_i^t \mathcal{L}_H(dx^i - x_t^i dt) + \partial^{it}\mathcal{L}_H(dp_i - p_{it}dt) + \mathcal{L}_H dt = \\ &= p_i(dx^i - x_t^i dt) + p_i(x_t^i - o^i)dt - \mathcal{H}dt = \\ &= p_i(dx^i - o^i dt) - \mathcal{H}dt = (\pi_{\mathbb{R}}^{1,0})^* H, \end{aligned}$$

то лагранжева плотность $\mathcal{L}_H$ имеет вид

$$\mathcal{L}_H = p_i(x_t^i - o^i) - \mathcal{H}.$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа для L_H совпадают с уравнениями (3) и, таким образом, могут служить определением уравнений Гамильтона.

4. Ковариантный гидродинамический формализм

Изложим вариант ковариантного формализма многомерной идеальной баротропной гидродинамики, полученный переписыванием формализма работ [1,2] сообразно выбранному нами геометрическому подходу, когда формализм теории строится на расслоениях над $\mathbb{R}$.

Конфигурационное расслоение и **системы отсчета** определяются аналогично тому, как они определяются в формализме ковариантной гамильтоновой механики.

Форма Бернулли — 1-форма

$$h := u_i(dx^i - o^i dt) - \hbar dt$$

на X. Она определяется заданием вертикального ковекторного поля $u\colon X \to V^*X$ на X, отсчетной связности $o\colon X \to TX$ и функции $\hbar\colon X \to \mathbb{R}$. Последняя называется функцией Бернулли [2, стр. 84]. Пару (X, h) мы называем гидродинамической системой.

Форма завихренности — 3-форма

$$\omega := du_i \wedge dx^i \wedge dt = d(u_i dx^i \wedge dt) = d\theta.$$

Уравнение Ламба — уравнение

$$\gamma \rfloor \omega = dh, \tag{4}$$

связывающее форму Бернулли h со связностью

$$\gamma = \gamma_h\colon X \to TX, \quad \gamma = \partial_t + \gamma^i \partial_i,$$

на π. Последнюю мы называем (по аналогии с гамильтоновой связностью) связностью Бернулли, отвечающей форме Бернулли h.

Уравнение (4) эквивалентно уравнению

$$\gamma \rfloor dh = 0$$

и в координатах имеет вид

$$\partial_t u_i + \gamma^j (\partial_j u_i - \partial_i u_j) = -\, \partial_i (u_i o^i + \hbar). \tag{5}$$

Связность γ может быть выражена относительно произвольной отсчетной связности: $\gamma = \gamma' + v$. Например, при лагранжевом описании движения $\gamma = \gamma'$. Координаты, адаптированные к γ', определяются условием $\partial_\gamma x^{i'} = 0$, то есть $\gamma^{i'} = 0$. В этих координатах (5) принимает вид

$$\partial_t u_i = -\, \partial_i (u_i o^i + \hbar).$$

Таким образом, в ковариантном гидродинамическом формализме относительное движение определяется парой отсчетных связностей — γ' и o.

Вихревое поле — вертикальное векторное поле $\varsigma\colon X \to VX$ на π, удовлетворяющее уравнению

$$\varsigma \rfloor \omega = 0.$$

Уравнение завихренности — уравнение

$$\partial_\gamma \omega = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) — прямое следствие уравнения Ламба. Оно означает, что форма завихренности инвариантна относительно потока связности Бернулли, то есть значение формы на тройке векторов в данной точке совпадает со значением этой формы на тройке векторов, полученной из исходной тройки переносом вдоль потока.

Еще одним следствием уравнения (6) является соотношение

$$\partial_\gamma (\varsigma \rfloor \omega) \equiv \varsigma \rfloor \partial_\gamma \omega + (\partial_\gamma \varsigma) \rfloor \omega = (\partial_\gamma \varsigma) \rfloor \omega,$$

из которого следует, в частности, инвариантность вихревых полей.

Лагранжевы инварианты — геометрические величины, инвариантные относительно потока связности Бернулли.

Рассмотрим, например, формы

$$h \wedge dh \wedge \cdots \wedge dh, \quad h \wedge dh \wedge \cdots \wedge dh \wedge \omega.$$

Согласно уравнению Ламба производная Ли любой из этих форм вдоль связности Бернулли является точной формой. Поэтому каждая из этих форм порождает относительный интегральный инвариант в смысле определения Картана (см. добавление к книге [16]). Так получаются, в частности, аналоги известных лагранжевых инвариантов. Например, классическому интегральному инварианту Томсона отвечает инвариант, порожденный формой h, а используемому в геофизической гидродинамике инварианту спиральности — инвариант, порожденный формой $h \wedge dh$ (подробности см. в [2]).

Характеристическая лагранжева система для гидродинамической системы (X, h) — это лагранжева система (J^1X, L_h), где

$$L_h := (\pi^{1,0})^* h.$$

Так как

$$\begin{aligned} L_h &= \partial_i^t \mathcal{L}_h(dx^i - x_t^i dt) + \mathcal{L}_h dt = \\ &= u_i(dx^i - x_t^i dt) + u_i(x_t^i - o^i)dt - \hbar dt = \\ &= u_i(dx^i - o^i dt) - \hbar dt = (\pi^{1,0})^* h, \end{aligned}$$

то для лагранжевой плотности $\mathcal{L}_h$ имеем

$$\mathcal{L}_h = u_i(x_t^i - o^i) - \hbar.$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа для L_h совпадают с уравнениями интегральных сечений связности γ_h:

$$\partial_t u_i + x_t^j(\partial_j u_i - \partial_i u_j) = -\,\partial_i(u_j o^j + \hbar).$$

Ассоциированная гамильтонова система для гидродинамической системы (X, h) — произвольная гамильтонова система (V^*X, H), подчиненная условиям (см. раздел 5)

$$Tu \circ \gamma = \Gamma \circ u, \quad u^* H = h.$$

Интересный пример (см. [2, стр. 100]) гамильтоновой системы, ассоциированной с гидродинамической системой (X, h), дает система (V^*X, H), где

$$H := (p_i - u_i)(dx^i - \gamma^i dt) + h.$$

Эта система характеризуется совпадением гамильтоновой функции с функцией Бернулли, взятыми относительно отсчетной связности $\gamma = \gamma_h$:

$$p_i(o^i - \gamma^i) + \mathcal{H} = u_i(o^i - \gamma^i) + \hbar.$$

Заметим, что такая характеризация имеет место только в рамках ковариантного формализма.

5. Связности на композиционном расслоении

В общем виде связности на композиционном расслоении рассматриваются, например, в [5, 12]. В настоящем разделе мы изучаем связности на композиционном расслоении $\pi_{\mathbb{R}} = \pi \circ \pi_X : V^*X \to X \to \mathbb{R}$ гамильтоновой неавтономной механики в контексте их связи с вертикальными ковекторными полями на π — полями импульсов. Материал этого раздела служит связующим звеном между ковариантной гамильтоновой механикой и ковариантной гидродинамикой.

Пусть на композиционное расслоение $\pi_{\mathbb{R}} = \pi \circ \pi_X$ задана связность

$$\Gamma\colon V^*X \to TV^*X, \quad \Gamma = \partial_t + \Gamma^i \partial_i + \Gamma_i \partial^i, \tag{7}$$

а на его компоненте π_X — сечение $u\colon X \to V^*X$, то есть вертикальное ковекторное поле.

Определение 1. Связность на π

$$\gamma := T\pi_X \circ \Gamma \circ u\colon X \to TX, \quad \gamma = \partial_t + \Gamma \circ u\, \partial_i, \tag{8}$$

назовем ограничением связности Γ на расслоение π относительно сечения u.

Замечание 1. Если Γ — проектируемая связность, то есть ее компоненты Γ^i не зависят от координат p_i, то ограничение Γ на π относительно u совпадает с проекцией этой связности на π.

Определение 2. Отображение

$$\begin{gathered}\nabla^\Gamma u := (\mathrm{id} - \Gamma \circ \tau_{V^*X}) \circ Tu \circ \gamma\colon X \to VV^*X, \\ \nabla^\Gamma u = (\partial_t u_i + \Gamma^j \circ u\, \partial_j u_i - \Gamma_i \circ u)\partial^i,\end{gathered} \tag{9}$$

назовем ковариантным дифференциалом сечения u относительно связности Γ.

Будем говорить, что сечение u инвариантно относительно связности Γ, если $\nabla^\Gamma u = 0$, то есть

$$\partial_t u_i + \Gamma^j \circ u\, \partial_j u_i = \Gamma_i \circ u. \tag{10}$$

Замечание 2. (a) Координатное соотношение (10) может быть записано также в форме

$$\partial_\Gamma (p_i - u_i(x))|_{p_i = u_i(x)} = 0,$$

выражающей условие инвариантности u относительно Γ в терминах производной Ли. Именно в такой форме это условие вводится и используется в [1, 2].

(b) Не следует путать определение 2 с обычным определением ковариантного дифференциала сечения (см., например, [10, стр. 56]). Последнее дается для сечения того же расслоения, что и расслоение, на котором определена связность. В нашем случае связность определена на расслоении $\pi_\mathbb{R}$, а сечение — на расслоении π_X.

Определение 2 является естественным следствием определения ковариантного дифференциала морфизма [17, стр. 157]

Дадим несколько эквивалентных характеризаций условия инвариантности u относительно Γ.

Обозначим HV^*X и HX — горизонтальные расслоения, ассоциированные с Γ и γ соответственно. В формализме расслоений над $\mathbb{R}$ это просто образы отображений γ и Γ.

Предложение 1. *Следующие условия эквивалентны.*

(a) *u инвариантно относительно Γ.*

(b) *векторные поля γ и Γ u-связаны: $Tu \circ \gamma = \Gamma \circ u$.*

(c) $Tu \cdot HX = HV^*X|_{u(X)}$.

(d) $T(u \circ \pi_X) \cdot HV^*X|_{u(X)} = HV^*X|_{u(X)}$.

(e) *Многообразие $u(X)$ всюду касается HV^*X.*

Доказательство. Для наглядности приведем диаграмму с изображением используемых морфизмов. На этой диаграмме τ_X и τ_{V^*X} обозначают проекции касательных расслоений. Условие (b) означает коммутативность ее внешнего квадрата.

$$\begin{tikzcd}
TX \arrow[r, shift left, "Tu"] \arrow[d, shift left, "\tau_X"] & TV^*X \arrow[l, shift left, "T\pi_X"] \arrow[d, shift right, "\tau_{V^*X}"'] \\
X \arrow[u, shift left, "\gamma"] \arrow[r, shift right, "u"'] & V^*X \arrow[l, shift right, "\pi_X"'] \arrow[u, shift right, "\Gamma"']
\end{tikzcd}$$

Эквивалентность (a) $\Leftrightarrow$ (b) сразу следует из (9):

$$\nabla^\Gamma u = Tu \circ \gamma - \Gamma \circ \tau_{V^*X} \circ Tu \circ \gamma = \\ = Tu \circ \gamma - \Gamma \circ u \circ \tau_X \circ \gamma = Tu \circ \gamma - \Gamma \circ u.$$

Для доказательства эквивалентности (b) $\Leftrightarrow$ (c) достаточно заметить, что (c) — это прямая интерпретация условия (b) в терминах образов. Аналогичное замечание касается эквивалентности (b) $\Leftrightarrow$ (d). Однако в этом случае (b) нужно представить в виде

$$T(u \circ \pi_X) \circ \Gamma \circ u = \Gamma \circ u,$$

используя подстановку (8). Наконец, эквивалентность (d) $\Leftrightarrow$ (e) следует из того, что образ отображения $T(u \circ \pi_X)$ касателен к образу u. □

В заключение раздела рассмотрим вопрос о восстановлении связности Γ по семейству инвариантных относительно Γ сечений расслоения π_X.

Будем предполагать, что связность Γ на $\pi_{\mathbb{R}}$ проектируема (см. замечание 1), и обозначим

$$\gamma\colon X \to TX, \quad \gamma = \partial_t + \Gamma^i \partial_i,$$

ее проекцию на π.

На расслоении π_X зададим связность

$$\Sigma\colon V^*X \to T^*X \otimes_{V^*X} TV^*X, \\ \Sigma = dt \otimes (\partial_t + \Sigma_i \partial^i) + dx^i \otimes (\partial_i + \Sigma_{ij}\partial^j),$$

которую будем считать плоской. Такая связность определяет на π_X горизонтальное слоение $\mathcal{U}$, трансверсальное слоям π_X [10]. Будем считать, что $\mathcal{U}$ состоит из сечений расслоения π_X. При этом, конечно, эти сечения — в точности интегральные сечения связности Σ.

Связности γ и Σ определяют на $\pi_{\mathbb{R}}$ композиционную связность

$$\gamma \rfloor \Sigma = \partial_t + \Gamma^i \partial_i + (\Sigma_i + \Gamma^j \Sigma_{ji})\partial^i. \tag{11}$$

Предложение 2. *Следующие условия эквивалентны.*

(a) $\gamma \rfloor \Sigma = \Gamma$.

(b) *Листы слоения $\mathcal{U}$ — инвариантные относительно Γ сечения.*

Доказательство. Пусть выполнено (a). Тогда из (7) и (11) следует

$$\Gamma_i = \Sigma_i + \Gamma^j \Sigma_{ji} \tag{12}$$

и тем более

$$\Gamma_i \circ u = \Sigma_i \circ u + \Gamma^j \Sigma_{ji} \circ u. \tag{13}$$

Если $u \in \mathcal{U}$, то u — интегральное сечение связности Σ, и поэтому

$$\Sigma_i \circ u = \partial_t u_i, \quad \Sigma_{ji} \circ u = \partial_j u_i. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13), получаем (10), то есть u — инвариантное относительно Γ сечение и, следовательно, выполнено (b).

Обратное докажем от противного. Пусть выполнено (b), но при этом $\gamma \rfloor \Sigma \neq \Gamma$. Тогда для некоторой точки расслоения π_X нарушается условие (12) и, следовательно, для сечения $u \in \mathcal{U}$, проходящего через эту точку, — условие (13). С учетом (14) это влечет за собой нарушение условия (10). Противоречие. □

6. Гидродинамика гамильтоновых систем

Рассмотрим на конфигурационном расслоении $\pi\colon X \to \mathbb{R}$ гамильтоновой системы (V^*X, H) вертикальное ковекторное поле $u\colon X \to V^*X$. Как сечение, u индуцирует на X канонические формы

$$\begin{gathered}\theta := u^*\Theta = u_i dx^i \wedge dt,\\ \omega := u^*\Omega = d\theta = du_i \wedge dx^i \wedge dt,\\ h := u^*H = u_i(dx^i - o^i dt) - \hbar dt, \quad \hbar := \mathcal{H} \circ u dt,\end{gathered}$$

где u^* — pullback-отображение форм. Положим $\Gamma = \Gamma_H$ и обозначим γ ограничение Γ на π относительно u.

Теорема 1 (Козлов [1]). *Следующие условия эквивалентны.*

(a) *u инвариантно относительно Γ.*

(b) *u удовлетворяет уравнению Ламба $\gamma \rfloor \omega = dh$.*

В доказательстве теоремы используется следующее простое свойство «невырожденности» формы Ω.

Лемма 1. *Пусть Υ — вертикальное векторное поле на π_X. Тогда для любого сечения u расслоения π_X условие*

$$u^*(\Upsilon \rfloor \Omega) = 0 \tag{15}$$

влечет

$$\Upsilon \circ u = 0. \tag{16}$$

Доказательство. В координатах

$$u^*(\Upsilon \rfloor \Omega) = u^*(\Upsilon_i \partial^i \rfloor dp_i \wedge dx^i \wedge dt) = u^*(\Upsilon_i dx^i \wedge dt) = \Upsilon_i \circ u \, dx^i \wedge dt,$$

то есть равенство нулю формы (15) означает равенство нулю коэффициентов поля (16) и, следовательно, самого поля. □

Доказательство теоремы. Следующая цепочка равенств повторяет стандартную выкладку, используемую при доказательстве известного свойства внутреннего умножения по отношению к морфизму касательных расслоений (см., например, [18, Proposition 7.4.10]):

$$\begin{gathered}(\gamma\rfloor\omega - dh)(v_1,v_2) = \gamma\rfloor\omega\cdot(v_1,v_2) - u^*\Gamma\rfloor\Omega\cdot(v_1,v_2) =\\ = u^*\Omega\cdot(\gamma,v_1,v_2) - (\Gamma\rfloor\Omega)\circ u\cdot(Tu\circ v_1, Tu\circ v_2) =\\ = \Omega\circ u\cdot(Tu\circ\gamma, Tu\circ v_1, Tu\circ v_2) - \Omega\circ u\cdot(\Gamma\circ u, Tu\circ v_1, Tu\circ v_2) =\\ = \Omega\circ u\cdot(Tu\circ\gamma - \Gamma\circ u, Tu\circ v_1, Tu\circ v_2) =\\ = u^*(Tu\circ T\pi_X\circ\Gamma - \Gamma)\rfloor\Omega\cdot(v_1,v_2).\end{gathered}$$

Теперь, с учетом предложения 1, импликация (a)⇒(b) следует из того, что поля γ и Γ u-связаны, а импликация (b)⇒(a) — из того, что векторное поле $Tu\circ T\pi_X\circ\Gamma-\Gamma$ на π_X вертикально,

$$T\pi_X\circ(Tu\circ T\pi_X\circ\Gamma - \Gamma) = 0,$$

и леммы 1. □

Для гамильтоновой системы условие инвариантности u относительно Γ_H означает (см. (2), (3) и (10)), что

$$\dot{x}^i = \Gamma^i(t,x^i,u_i(t,x^i)) = \partial^i(p_i o^i + \mathcal{H})\circ u, \quad p_i = u_i(t,x^i). \tag{17}$$

Таким образом, по теореме 1, если u удовлетворяет уравнению Ламба этой гамильтоновой системы, то ее движение на подмногообразии $u\in V^*X$ находится как решение системы уравнений (17).

Если же $\mathcal{U}$ — слоение π_X, целиком состоящее из решений уравнения Ламба гамильтоновой системы, то в соответствии с предложением 2 решение системы уравнений (17) определяет движение гамильтоновой системы на всем фазовом пространстве.

Список литературы

[1] В. В. Козлов, “Гидродинамика гамильтоновых систем”, *Вестник Моск. Ун-та. Сер. Матем., Механ.*, 1983, № 6, 10–22.

[2] В. В. Козлов, *Общая теория вихрей*, Институт компьютерных исследований, М., Ижевск, 2013, Первое издание книги вышло в 1998.

[3] G. Sardanashvily, *Generalized Hamiltonian Formalism for Field Theory. Constraint Systems*, World Scientific, Singapore, 1995.

[4] G. Sardanashvily, “Hamiltonian time-dependent mechanics”, *J. Math. Phys.*, **39**:5 (1998), 2714–2729.

[5] G. Giachetta, L. Mangiarotti, and G. Sardanashvily, *New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory*, World Scientific, Singapore, 1997.

[6] N. Román-Roy, "Multisymplectic Lagrangian and Hamiltonian Formalisms of Classical Field Theories", *SIGMA*, **5** (2009), 100.

[7] J. Berra-Montiel *et al*, "A review on geometric formulations for classical field theory: the Bonzom–Livine model for gravity", *Class. Quantum Grav.*, **38**:135012 (2021).

[8] D. Saunders, *The Geometry of Jet Bundles*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[9] I. Kolár, P. Michor, and J. Slovák, *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

[10] G. Sardanashvily, *Advanced Differential Geometry for Theoreticians*, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013.

[11] D. Krupka, *Introduction to Global Variational Geometry*, Atlantis Press, 2015.

[12] G. Giachetta, L. Mangiarotti, and G. Sardanashvily, *Geometric Formulation of Classical and Quantum Mechanics*, World Scientific, Singapore, 2011.

[13] G. Sardanashvily, *Noether's Theorems. Applications in Mechanics and Field Theory*, Atlantis Press, 2016.

[14] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1951.

[15] M. de León, J. Marín-Solano, and J. C. Marrero, "A geometrical approach to classical field theories: a constraint algorithm for singular theories", *New Developments in Differential Geometry*, eds. L. Tamassi and J. Szenthe, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.

[16] Э. Картан, *Интегральные инварианты*, УРСС, М., 1998.

[17] L. Mangiarotti and M. Modugno, "Fibered spaces, jet spaces and connections for field theories", *Proc. Int. Meeting on Geometry and Physics (Florence, 1982)*, eds. M. Modugno, Pitagora Editrice, Bologna, 1983, 135–165.

[18] J. E. Marsden, T. Ratiu, and R. Abraham, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Springer, 2007.

Поступила в редакцию
2 ноября 2021 г.

Gudimenko A. I.[1] Covariant hydrodynamics of Hamiltonian systems. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2021. V. 21. No 2. P. 166–179.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

The theory of hydrodynamic reduction of non-autonomous Hamiltonian mechanics (V. Kozlov, 1983) is presented in the geometric formalism of bundles over the time axis R. In this formalism, time is one of the coordinates, not a parameter; the connections describe reference frames and velocity fields of mechanical systems. The equations of the theory are presented in a form that is invariant with respect to time-dependent coordinate transformations and the choice of reference frames.

Key words: *covariant formalism, time-dependent Hamiltonian mechanics, multidimensional hydrodynamics.*

References

[1] V. V. Kozlov, “Gidrodinamika gamil’tonovykh sistem”, *Vestnik Mosk. Un-ta. Ser. Matem., Mekhan.*, 1983, No 6, 10–22.

[2] V. V. Kozlov, *Obshchaia teoriia vikhrei*, Institut komp’iuternykh issledovanii, M., Izhevsk, 2013.

[3] G. Sardanashvily, *Generalized Hamiltonian Formalism for Field Theory. Constraint Systems*, World Scientific, Singapore, 1995.

[4] G. Sardanashvily, “Hamiltonian time-dependent mechanics”, *J. Math. Phys.*, **39**:5 (1998), 2714–2729.

[5] G. Giachetta, L. Mangiarotti, and G. Sardanashvily, *New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory*, World Scientific, Singapore, 1997.

[6] N. Román-Roy, “Multisymplectic Lagrangian and Hamiltonian Formalisms of Classical Field Theories”, *SIGMA*, **5** (2009), 100.

[7] J. Berra-Montiel *et al*, “A review on geometric formulations for classical field theory: the Bonzom–Livine model for gravity”, *Class. Quantum Grav.*, **38**:135012 (2021).

[8] D. Saunders, *The Geometry of Jet Bundles*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[9] I. Kolár, P. Michor, and J. Slovák, *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

[10] G. Sardanashvily, *Advanced Differential Geometry for Theoreticians*, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013.

[11] D. Krupka, *Introduction to Global Variational Geometry*, Atlantis Press, 2015.

[12] G. Giachetta, L. Mangiarotti, and G. Sardanashvily, *Geometric Formulation of Classical and Quantum Mechanics*, World Scientific, Singapore, 2011.

[13] G. Sardanashvily, *Noether’s Theorems. Applications in Mechanics and Field Theory*, Atlantis Press, 2016.

[14] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1951.

[15] M. de León, J. Marín-Solano, and J. C. Marrero, “A geometrical approach to classical field theories: a constraint algorithm for singular theories”, *New Developments in Differential Geometry*, eds. L. Tamassi and J. Szenthe, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.

[16] E. Kartan, *Integral’nye invarianty*, URSS, M., 1998.

[17] L. Mangiarotti and M. Modugno, “Fibered spaces, jet spaces and connections for field theories”, *Proc. Int. Meeting on Geometry and Physics (Florence, 1982)*, eds. M. Modugno, Pitagora Editrice, Bologna, 1983, 135–165.

[18] J. E. Marsden, T. Ratiu, and R. Abraham, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Springer, 2007.