Дальневосточный математический журнал. 2021. Т. 21. № 2. С. 215–230

УДК 517.51
MSC2020 46E30 + 47B38

© Е. Н. Ломакина[1,2], М. С. Сарычев[1,2]

Оценки норм Шаттена – Неймана одного класса интегральных операторов

В статье рассматривается интегральный оператор, действующий из пространств Лебега в пространства Лоренца. Найдены условия, при которых компактный оператор принадлежит классам Шаттена-Неймана.

Ключевые слова: *пространства Лебега, пространства Лоренца, интегральный оператор, аппроксимативные числа, нормы Шаттена – Неймана.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202118

Введение

Пусть T — линейный оператор, действующий из банахова пространства E в банахово пространство F. $a_n(T)$ — n-е *аппроксимативное число оператора* T (см. монографию [1, §12]) определяется формулой

$$a_n(T) = \inf\{\|T - L\|_{E\to F}: \quad L: E\to F, \ \ \operatorname{rank} L < n\}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Множество всех компактных операторов $T\colon E\to F$, удовлетворяющих условию

$$\|T\|_{\mathbb{S}_\alpha^{(a)}} = \Big\|\{a_k(T)\}\Big\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha(T)\right)^{1/\alpha}, \quad 0<\alpha<\infty,$$

образуют классы Шаттена – Неймана (см. [2, 3]).

В данной работе найдены условия, при которых интегральный оператор $T\colon L_v^r(\mathbb{R}^+)\to L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ в области $1<p<r\leqslant q<\infty$ вида

$$Tf(x) = \int_0^x f(\tau)v(\tau)\,d\tau, \quad x>0, \tag{1}$$

[1] Вычислительный центр ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65.
[2] Дальневосточный государственный университет путей сообщения, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.
Электронная почта: enlomakina@mail.ru (Е. Н. Ломакина), ms.sarychev@gmail.com (М. С. Сарычев).

с весовой функцией $v\in L^1(0,x)$, $x>0$, принадлежит классу Шаттена–Неймана. В случае, когда $q=r$ и $1<s<\infty$ получена эквивалентность нормы Шаттена–Неймана интегральному выражению, зависящему от весовых функций

$$\|T\|_{\mathbb{S}_\alpha^{(a)}} = \left(\sum_n a_n^s(T)\right)^{\frac{1}{s}} \approx \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x v(t)\,dt\right)^{\frac{s}{r'}} \left(\int_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}-1} \omega(x)\,dx\right)^{\frac{1}{s}},$$

что дополняет результаты исследований [4–6].

Пусть (X,μ) — измеримое пространство с положительной σ-аддитивной мерой μ. Функция распределения измеримой функции f относительно меры μ определяется формулой

$$f_*(\tau) = \mu\{x\in X: |f(x)|>\tau\} = \int\limits_{\{x\in X:|f(x)|>\tau\}} d\mu, \quad \tau>0.$$

Невозрастающей перестановкой f^* функции f отностительно меры μ называется (см. монографию [7])

$$f^*(t) = \inf\{\tau>0\colon f_*(\tau)\leqslant t\}.$$

Положим $X=(0,\infty)$, $d\mu(x)=\omega(x)dx$, где $\omega(x)$ — измеримая положительная функция, конечная почти всюду на $\mathbb{R}^+=(0,\infty)$.

Для $1\leqslant p,q<\infty$ весовое пространство Лоренца $L^{p,q}_\omega\equiv L^{p,q}_\omega(\mathbb{R}^+)$ состоит из всех μ-измеримых функций f, для которых

$$\|f\|_{L^{p,q}_\omega} = \left(\int_0^\infty \frac{q}{p}\left(t^{\frac{q}{p}-1} f^*_\omega(t)^q\right)dt\right)^{1/q} < \infty.$$

Пространство Лоренца в случае $p=q$ является пространством Лебега с нормой

$$\|f\|_{L^{p,p}_\omega} = \|f\|_{L^p_\omega} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p\omega(x)\,dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Неравенство треугольника в пространствах Лоренца имеет вид [8, стр. 5572]

$$\Big\|\sum_{k=1}^N f_k\Big\|_{p,q} \leqslant c_{pq}\sum_{k=1}^N \|f_k\|_{p,q},$$

где наилучшая константа

$$c_{pq} = \begin{cases} 1, & 1<q\leqslant p<\infty,\\ \left(\frac{p}{q}\right)^{1/q}\left(\frac{p'}{q'}\right)^{1/q'}, & 1<p<q<\infty. \end{cases} \tag{2}$$

Если функции $f\in L^{p,q}_\omega$, $\mathrm{g}\in L^{p',q'}_\omega$ при $1<p<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, то выполняется неравенство Гёльдера

$$\left|\int_0^\infty f(x)\mathrm{g}(x)\omega(x)\,dx\right| \leqslant \|f\|_{L^{p,q}_\omega}\|\mathrm{g}\|_{L^{p',q'}_\omega},$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$ (см. [7, стр. 220]).

Для $L^{p,q}_\omega$ двойственное пространство определяется формулой

$$L^{p',q'}_\omega = \left\{ \mathrm{g} : \left|\int_0^\infty f(x)\mathrm{g}(x)\omega(x)dx\right| < \infty, \text{ для всех } f\in L^{p,q}_\omega \right\}$$

с нормой

$$\|\mathrm{g}\|_{L^{p',q'}_\omega} = \sup_{\|f\|_{L^{p,q}_\omega}\leqslant 1}\left|\int_0^\infty f(x)\mathrm{g}(x)\omega(x)dx\right|.$$

Заметим также, что $\|f\|_{L^{p,q}_\omega} = \left(\int\limits_0^\infty q f_*(t)^{\frac{q}{p}} t^{q-1}\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$ и $\|\chi_{(0,t)}\|_{L^{p,q}_\omega} = \left(\int\limits_0^t \omega(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$.

Критерий компактности рассматриваемого оператора T содержится в следующей теореме.

Теорема 1. [9, 10]. *Пусть* $1<p<r\leqslant q<\infty$, *оператор* $T : L^r_v(R^+) \to L^{pq}_\omega(R^+)$ *вида* (1) *компактен тогда и только тогда, когда*

$$A = \sup_{t>0} A(t) = \sup_{t>0}\left(\int\limits_t^\infty \omega(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^t v(x)\,dx\right)^{1/r'} < \infty.$$

и

$$\lim_{a\to 0+}\sup_{0<t<a}\left(\int\limits_t^a \omega(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^t v(x)\,dx\right)^{1/r'} = 0,$$

$$\lim_{b\to +\infty}\sup_{b<t<\infty}\left(\int\limits_t^{+\infty} \omega(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\int\limits_b^t v(x)\,dx\right)^{1/r'} = 0.$$

Далее зададим малое ε: $0<\varepsilon<\|T\|$ и выберем точки c_0, c_N разбиения

$$0 = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_{N-1} < c_N < c_{N+1} = \infty$$

таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\sup_{0<t<c_1} A(t) = \sup_{c_N<t<\infty} A(t) = \varepsilon. \tag{3}$$

На конечном интервале $I=[c_1,c_N]$ рассмотрим оператор

$$\mathcal{T}_I f(x) = \chi_I(x)(F(x)-F_I), \tag{4}$$

где

$$F(x) = \int\limits_{c_1}^x f(\tau)\,d\tau, \quad x\in I; \quad F_I = \frac{1}{\mu(I)}\int\limits_I F(x)\mathrm{g}(x)\omega(x)\,dx.$$

Согласно теореме 3 [12] и лемме 1 [11] норма оператора $\mathcal{T}_I$ вида (4) непрерывно зависит от интервала I, поэтому можно выбирать интервалы $I_k=[c_k,c_{k+1}]$, $k=$ $=1,\ldots,N-1$, так, что

$$\|\mathcal{T}_{I_k}\|=\varepsilon,\ k=1,\ldots,N-2,\quad \|\mathcal{T}_{I_{N-1}}\|\leqslant\varepsilon. \tag{5}$$

Оценки поведения аппроксимативных чисел интегрального оператора (1) доказаны в следующей теореме.

Теорема 2. *[11] Пусть* $1<p<r\leqslant q<\infty$, *оператор* $T: L_v^r\to L_\omega^{pq}$ *вида* (1) *компактен. Зададим* $0<\varepsilon<\|T\|$, *интервалы* $I_k=[c_k,c_{k+1}], k=0,1,\ldots N$ *выбраны так, что выполнены условия* (3), (5). *Тогда*

$$\frac{1}{2c_{pq}}\varepsilon\,(N+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\leqslant a_{N+1}(T),\quad a_N(T)\leqslant\varepsilon.$$

1. Предварительные оценки

Пусть $\{\xi_n\}$, $n\in\mathbf{Z}$, определяется формулой

$$V(\xi_n)=\int\limits_0^{\xi_n}v(t)\,dt=2^{n+1},\quad J_n=(\xi_{n-1},\xi_n).$$

Зададим последовательность

$$\sigma_n=\left(\int\limits_{\xi_{n-1}}^{\xi_n}v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{r'}}\left(\int\limits_{\xi_n}^{\xi_{n+1}}\omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Заметим, что

$$\sigma_n=2^{\frac{n}{r'}}\left(\int\limits_{\xi_n}^{\xi_{n+1}}\omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\quad\text{и}\quad\int\limits_{\xi_n}^{\xi_{n+1}}\omega(t)\,dt=\frac{\sigma_n^p}{2^{\frac{np}{r'}}}. \tag{6}$$

Оценка

$$\sigma_n\leqslant\left(\int\limits_0^{\xi_n}v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{r'}}\left(\int\limits_{\xi_n}^{\xi_{n+1}}\omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}=2^{\frac{n+1}{r'}}\left(\int\limits_{\xi_n}^{\xi_{n+1}}\omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

влечет за собой неравенство

$$2^{\frac{np}{r'}}\left(\int\limits_{\xi_n}^{\xi_{n+1}}\omega(t)\,dt\right)=\sigma_n^p\leqslant 2^{\frac{(n+1)p}{r'}}\left(\int\limits_{\xi_n}^{\xi_{n+1}}\omega(t)\,dt\right).$$

Лемма 1. *Пусть номера* $n_1 < n_2 < n_3$, *точки* c_0 *и* c_1 *разбиения* $I_k = (c_k, c_{k+1})$ *принадлежат интервалам* $c_0 \in J_{n_1}$, $x_0 \in J_{n_2}$, $c_1 \in J_{n_3}$. *Тогда*

$$\left(\int\limits_{c_0}^{x_0} v(t)\,dt\right)^{1/r'} \left(\int\limits_{x_0}^{c_1} \omega(t)\,dt\right)^{1/p} \leqslant 2^{\frac{2}{r'}+\frac{1}{p}} \max_{n_2-1\leqslant n\leqslant n_3-1} \sigma_n.$$

Доказательство. Используя неравенства выше, получаем

$$\left(\int\limits_{c_0}^{x_0} v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{r'}} \left(\int\limits_{x_0}^{c_1} \omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int\limits_{\xi_{n_1-1}}^{\xi_{n_2}} v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{r'}} \left(\int\limits_{\xi_{n_2-1}}^{\xi_{n_3}} \omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \Big[V(\xi_{n_2})\Big]^{\frac{1}{r'}} \left(\int\limits_{\xi_{n_2-1}}^{\xi_{n_3-1}} \omega(t)\,dt + \int\limits_{\xi_{n_3-1}}^{\xi_{n_3}} \omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{(n_2+1)}{r'}} \left(\frac{\sigma^p_{n_2-1}}{2^{\frac{(n_2-1)p}{r'}}} + \frac{\sigma^p_{n_3-1}}{2^{\frac{(n_3-1)p}{r'}}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant 2^{\frac{n_2+1}{r'}} \max_{n_2-1\leqslant n\leqslant n_3-1} \sigma_n \left(\frac{2}{2^{\frac{n_2-1}{p'}}}\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{2}{r'}+\frac{1}{p}} \max_{n_2-1\leqslant n\leqslant n_3-1} \sigma_n.$$

□

Лемма 2. *Пусть* $\gamma = \dfrac{r'p}{r'+p}$, $I_k = (c_k, c_{k+1})$, $x_k \in I_k$ *и* $\xi_{n_3-1} < c_1 < c_2 < \ldots < c_l < < \xi_{n_3}$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{l} \left(\int\limits_{c_k}^{x_k} v(t)\,dt\right)^{\frac{\gamma}{r'}} \left(\int\limits_{x_k}^{c_{k+1}} \omega(t)\,dt\right)^{\frac{\gamma}{p}} \leqslant 2^{\frac{\gamma}{r'}} \sigma^{\gamma}_{n_3-1}.$$

Доказательство. Применяя неравенство Гельдера с показателями $\frac{r'+p}{p}$ и $\frac{r'+p}{r'}$, получаем

$$\sum_{k=1}^{l} \left(\int\limits_{c_k}^{x_k} v(t)\,dt\right)^{\frac{\gamma}{r'}} \left(\int\limits_{x_k}^{c_{k+1}} \omega(t)\,dt\right)^{\frac{\gamma}{p}} \leqslant \sum_{k=1}^{l} \left(\int\limits_{I_k} v(t)\,dt\right)^{\frac{p}{r'+p}} \left(\int\limits_{I_k} \omega(t)\,dt\right)^{\frac{r'}{p+r'}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{l} \int\limits_{I_k} v(t)\,dt\right)^{\frac{p}{r'+p}} \left(\sum_{k=1}^{l} \int\limits_{I_k} \omega(t)\,dt\right)^{\frac{r'}{p+r'}} \leqslant \left(\int\limits_{\xi_{n_3-1}}^{\xi_{n_3}} v(t)\,dt\right)^{\frac{\gamma}{r'}} \left(\int\limits_{\xi_{n_3-1}}^{\xi_{n_3}} \omega(t)\,dt\right)^{\frac{\gamma}{p}} =$$

$$= \Big[V(\xi_{n_3}) - V(\xi_{n_3-1})\Big]^{\frac{\gamma}{r'}} \left(\frac{\sigma^p_{n_3-1}}{2^{\frac{(n_3-1)p}{r'}}}\right)^{\frac{\gamma}{p}} = \frac{\big[2^{n_3+1} - 2^{n_3}\big]^{\frac{\gamma}{r'}}}{2^{(n_3-1)\gamma/r'}} \sigma^{\gamma}_{n_3-1} = 2^{\frac{\gamma}{r'}} \sigma^{\gamma}_{n_3-1}.$$

□

Лемма 3. *Пусть* $I=(a,b)$, $I\subset\mathbf{R}^+$ *и*

$$A(I)=\sup_{a<x<b}\left(\int\limits_x^b v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{r'}}\left(\int\limits_a^x \omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\qquad B(I)=\sup_{a<x<b}\left(\int\limits_a^x v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{r'}}\left(\int\limits_x^b \omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда

$$A(\overline{J_n}\bigcup\overline{J_{n+1}})\geqslant 4^{\frac{1}{r'}}\sigma_{n-1},\qquad B(\overline{J_n}\bigcup\overline{J_{n+1}})\geqslant \sigma_n.$$

Доказательство. Используя формулы (1) и (6) находим

$$A(\overline{J_n}\bigcup\overline{J_{n+1}})=\sup_{\xi_{n-1}<x<\xi_{n+1}}\left(\int\limits_x^{\xi_{n+1}} v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{r'}}\left(\int\limits_{\xi_{n-1}}^x \omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant$$

$$\geqslant\left(\int\limits_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{r'}}\left(\int\limits_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} \omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}=\Big[V(\xi_{n+1})-V(\xi_n)\Big]^{1/r'}\left(\frac{\sigma_{n-1}^p}{2^{(n-1)p/r'}}\right)^{1/p}=$$

$$=\frac{\left[2^{n+2}-2^{n+1}\right]^{1/r'}}{2^{\frac{n-1}{r'}}}\,\sigma_{n-1}=4^{\frac{1}{r'}}\sigma_{n-1}.$$

Проводя аналогичные рассуждения как для оценки выше, получаем

$$B(\overline{J_n}\bigcup\overline{J_{n+1}})=\sup_{\xi_{n-1}<x<\xi_{n+1}}\left(\int\limits_{\xi_{n-1}}^x v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{r'}}\left(\int\limits_x^{\xi_{n+1}} \omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant$$

$$\geqslant\left(\int\limits_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{r'}}\left(\int\limits_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}=\sigma_n.$$

□

Лемма 4. *Пусть* $0<a<b<\infty$, $I=(a,b)\subset\mathbf{R}^+$, *точка* $c\in I$ *выбрана так, что*

$$\|\mathcal{T}_I\|\approx\max(A(a,c),B(c,b)),$$

где

$$A(a,c)=\sup_{a<s<c}\left(\int\limits_s^c v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{r'}}\left(\int\limits_a^s \omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\quad B(c,b)=\sup_{c<s<b}\left(\int\limits_c^s v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{r'}}\left(\int\limits_s^b \omega(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Положим $D(I)=\max\Big(A(a,c),B(c,b)\Big)$, $0<\varepsilon<\|T\|$ *и определим множество*

$$S_I(\varepsilon)=\{n\in\mathbf{Z}:\ \ \overline{J_{n+1}}\subset I,\ \ \sigma_n>\varepsilon\}\ \ c\ \ card S_I(\varepsilon)\geqslant 4.$$

Тогда $\|\mathcal{T}_I\|>\varepsilon$.

Доказательство. Обозначим $n_1 = \min\{n:\ n \in S_I(\varepsilon)\}$, а $n_2 = \max\{n:\ n \in S_I(\varepsilon)\}$. Тогда $\overline{J_{n_1}} \bigcup \overline{J_{n_1+1}} \subset (a, c)$, и по лемме 3 заключаем, что

$$A(a, c) \geqslant A\Big(\overline{J_{n_1}} \bigcup \overline{J_{n_1+1}}\Big) \geqslant 4^{\frac{1}{p'}} \sigma_{n_1} > 4^{\frac{1}{p'}} \varepsilon > \varepsilon.$$

Рассуждая аналогично, как в предыдущей оценке, получаем, что $\overline{J_{n_2-1}} \bigcup \overline{J_{n_2}} \subset (c, b)$ и

$$B(c, b) \geqslant B\Big(\overline{J_{n_2-1}} \bigcup \overline{J_{n_2}}\Big) \geqslant \sigma_{n_2-1} > \varepsilon.$$

Следовательно,

$$D(I) = \max\Big(A(a, c), B(c, b)\Big) > \varepsilon.$$

Используя результаты теоремы 3 [12], где $\|\mathcal{T}_I\| \approx D(I)$ находим $\|\mathcal{T}_I\| > \varepsilon$. □

Лемма 5. *Пусть* $0 < \varepsilon < \|T\|$ *и номер* $N = N(\varepsilon)$ *определен согласно формулам* (3), (5). *Тогда*

$$card\{k \in \mathbf{Z}\ : \sigma_k > \varepsilon\} \leqslant 6N(\varepsilon).$$

Доказательство. Мы имеем

$$card\{k \in \mathbf{Z}\ : c_i \in \overline{J_k} \ \text{ for some } i,\ 1 \leqslant i \leqslant N\} \leqslant 2N. \tag{7}$$

Для номеров $k \in \mathbf{Z}$, не входящих во множество (7), таких, что интервалы $\overline{J_k} \subset I_i = (c_i, c_{i+1})$ для $1 \leqslant i \leqslant N$, мы получаем в силу выбора норм $\|\mathcal{T}_{I_k}\|$ по лемме 4, что

$$card\{k \in \mathbf{Z}\ :\ \overline{J_k} \subset I_i, \sigma_k > \varepsilon\} \leqslant 3.$$

Следовательно,

$$card\{k \in \mathbf{Z}\ :\ \sigma_k > \varepsilon\} = \sum_{i\,=\,0}^{N} card\{k \in \mathbf{Z}\ :\ \overline{J_k} \subset I_i, \sigma_k > \varepsilon\} + 2N \leqslant$$
$$\leqslant 3(N + 1) + 2N \leqslant 6N.$$

□

Лемма 6. *Пусть* $1 < p < r \leqslant q < \infty$, *оператор* $T : L^r_v \to L^{pq}_\omega$ *вида* (1) *компактен. Зададим* $0 < \varepsilon < \|T\|$, *интервалы* $I_k = [c_k, c_{k+1}], k = 0, 1, \ldots, N$, *выбраны так, что выполнены условия* (3), (5). *Тогда для* $t > 0$ *выполняется неравенство*

$$card\{k \in \mathbf{Z}\ : \sigma_k > t\} \leqslant 6\, card\Big\{k \in \mathbf{N}\ : a_k(T) k^{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}} \geqslant \frac{t}{2c_{pq}}\Big\}.$$

Доказательство. В силу условий теоремы 2 мы видим, что

$$card\left\{k \in \mathbf{N}\ : a_k(T) k^{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}} \geqslant \frac{1}{2c_{pq}} \varepsilon\right\} \geqslant N(\varepsilon).$$

Тогда по лемме 5 находим

$$card\big\{k \in \mathbf{Z}\ : \sigma_k > t\big\} \leqslant 6N(t) \leqslant 6\, card\left\{k \in \mathbf{N}\ : a_k(T) k^{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}} \geqslant \frac{t}{2c_{pq}}\right\},$$

где константа c_{pq} определена в (2). □

2. Оценки норм Шаттена – Неймана интегрального оператора

Теорема 3. *Для $s \in (0, \infty)$ справедливо неравенство*

$$\Big\|\{\sigma_k\}\Big\|_{\ell^s(\mathbf{Z})} \leqslant 26^{\frac{1}{s}} c_{pq} \Big\|\Big\{a_k(T)k^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\Big\}\Big\|_{\ell^s(\mathbf{N})}.$$

Доказательство. Действительно, применяя лемму 6 нетрудно увидеть, что

$$\Big\|\{\sigma_k\}\Big\|^s_{\ell^s(\mathbf{Z})} = s\int\limits_0^\infty t^{s-1} card\{k \in \mathbf{Z}\ : \sigma_k > t\}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 6s\int\limits_0^\infty t^{s-1} card\left\{k \in \mathbf{N} : a_k(T)k^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \geqslant \frac{t}{2c_{pq}}\right\} dt = 6 \cdot (2c_{pq})^s \Big\|\Big\{a_k(T)k^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\Big\}\Big\|^s_{\ell^s(\mathbf{N})}.$$

□

Теорема 4. *Пусть $1 < p < r \leqslant q < \infty,\ \gamma = \dfrac{pr'}{p+r'}$, $s > \gamma$ и $T : L^r_v(R^+) \to L^{pq}_\omega(R^+)$ — компактный оператор вида (1). Тогда*

$$\|T\|_{\mathbb{S}^{(a)}_s} = \Big\|\{a_k(T)\}\Big\|_{\ell^s(\mathbf{N})} \leqslant C\Big\|\{\sigma_k\}\Big\|_{\ell^s(\mathbf{Z})}, \tag{8}$$

константа $C = C(p, r')\beta^{\frac{1}{s}}(s/\gamma)$.

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < \|T\|$, $N = N(\varepsilon)$ заданы формулами (3), (5). Тогда для некоторого c_k существует номер j_k такой, что $c_k \subset \overline{J}_{j_k}$. Рассмотрим два случая:

(1) $j_{k_0} < j_{k_0+1}$;

(2) $j_k = j_{k+1} = ... = j_{k+m_k}$, $I_i \subset J_{j_k}$, $k \leqslant i \leqslant k + m_k$, $m_k > 1$.

Используя результаты теоремы 3 [12] и леммы 1, получаем

$$(1)\quad \varepsilon = \|\mathcal{T}_{I_{k_0}}\| \leqslant C_1 D(I_{k_0}) \leqslant C_1\Big(A(I_{k_0}) + B(I_{k_0})\Big) \leqslant C \sup_{j_{k_0} \leqslant j \leqslant j_{k_0+1}} \sigma_j \equiv C\sigma_{j_k}$$

для $j_k \in [j_{k_0}, j_{k_0+1}]$. Используя результаты леммы 2 мы получаем оценку

$$(2)\quad \varepsilon^\gamma m_k = \sum_{i\,=\,k}^{k+m_k} \|\mathcal{T}_{I_i}\|^\gamma \leqslant C^\gamma \sigma^\gamma_{j_k}, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{pr'}{p+r'}.$$

Тогда

$$\sum_{n\,=\,1}^\infty card\Big\{k :\ \sigma_k \geqslant \frac{n^{1/\gamma}\varepsilon}{C}\Big\}.$$

В силу оценок аппроксимативных чисел, полученных в теореме 2, мы видим, что

$$card\{k \in \mathbf{N}\ : a_k > \varepsilon\} \leqslant 2N(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\Big\|\{a_k(T)\}\Big\|^s_{\ell^s(\mathbf{N})} = s\int\limits_0^\infty t^{s-1} card\{k\in\mathbf{N}\ : a_k(T)>t\}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant s\int\limits_0^\infty t^{s-1}2N(t)\,dt \leqslant 2s\int\limits_0^\infty \sum_{n\,=\,1}^\infty t^{s-1} card\left\{k\in\mathbf{Z}:\ \sigma_k \geqslant \frac{n^{1/\gamma}t}{C}\right\}dt =$$

$$= 2sC^s\int\limits_0^\infty \sum_{n\,=\,1}^\infty \frac{1}{n^{s/\gamma}}\left(\frac{tn^{s/\gamma}}{C}\right)^{s-1} card\left\{k:\ \sigma_k\geqslant \frac{n^{1/\gamma}t}{C}\right\} d\left(\frac{n^{s/\gamma}t}{C}\right) =$$

$$= 2C^s\left(\sum_{n\,=\,1}^\infty \frac{1}{n^{s/\gamma}}\right)\Big\|\{\sigma_k\}\Big\|^s_{\ell^s(\mathbf{Z})} \equiv C^s(p,q)\beta(s/\gamma)\Big\|\{\sigma_k\}\Big\|^s_{\ell^s(\mathbf{Z})}.$$

$\square$

Определим последовательность $\{\eta_k\}$, $k\in\mathbf{Z}$, по формуле

$$W(\eta_k) = \int\limits_{\eta_k}^\infty \omega(t)\,dt = 2^{-k+1}.$$

Положим

$$\delta_k = \left(\int\limits_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} v(t)\,dt\right)^{1/r'}\left(\int\limits_{\eta_k}^{\eta_{k+1}}\omega(t)\,dt\right)^{1/p} = 2^{-k/p}\left(\int\limits_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} v(t)\,dt\right)^{1/r'}.$$

Введем следующие обозначения:

$$J_s = \left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^x v(t)\,dt\right)^{s/r'}\left(\int\limits_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}-1}\omega(x)\,dx\right)^{1/s},$$

$$J'_s = \left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^x v(t)\,dt\right)^{\frac{s}{r'}-1}\left(\int\limits_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{s/p} v(x)\,dx\right)^{1/s}.$$

Лемма 7. *Пусть* $0<s<\infty$, $1<p<r\leqslant q<\infty$ *и* $J_s<\infty$ $(J'_s<\infty)$. *Тогда* $J'_s<\infty$ $(J_s<\infty)$ *и*

$$J_s = \left(\frac{p}{r'}\right)^{1/s} J'_s.$$

Доказательство. Так как $0\leqslant J_s<\infty$, то

$$\lim_{t\to\infty}\left(\int\limits_t^\infty\left(\int\limits_0^x v(t)\,dt\right)^{s/r'}\left(\int\limits_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}-1}\omega(x)\,dx\right)^{1/s} = 0$$

и
$$\lim_{t\to\infty}\left(\int_0^t v(t)\,dt\right)^{s/r'}\left(\int_t^\infty \omega(t)\,dt\right)^{s/p}=0.$$

Интегрируя по частям, получаем
$$\infty > J_s^s=\frac{p}{s}\int_0^\infty\left(\int_0^x v(t)\,dt\right)^{s/r'}\frac{s}{p}\left(\int_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}-1}\omega(x)\,dx=$$
$$=\frac{p}{s}\int_0^\infty\left(\int_0^x v(t)\,dt\right)^{s/r'}d\left(-\int_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{s/p}\geqslant\frac{p}{s}\int_0^\infty\left(\int_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{s/p}d\left(\int_0^x v(t)\,dt\right)^{s/r'}=$$
$$=\frac{p}{r'}\int_0^\infty\left(\int_0^x v(t)\,dt\right)^{\frac{s}{r'}-1}\left(\int_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{s/p}v(x)\,dx=\frac{p}{r'}{J'_s}^s.$$

Таким образом, $J_s\geqslant\left(\dfrac{p}{r'}\right)^{\frac{1}{s}}J'_s$, и следовательно, $J'_s<\infty$.

Докажем обратное неравенство. Пусть $J'_s<\infty$. Тогда
$$\lim_{t\to 0}\left(\int_0^t v(t)\,dt\right)^{s/r'}\left(\int_t^\infty \omega(t)\,dt\right)^{s/p}=0.$$

Проводя аналогичные рассуждения как выше, заключаем, что $J'_s\geqslant\left(\frac{r'}{p}\right)^{\frac{1}{s}}J_s$, и это неравенство влечет $J_s<\infty$. $\square$

Введем следующие обозначения:
$$A_s=\left(\sum_k\sigma_k^s\right)^{1/s},\qquad B_s=\left(\sum_k\delta_k^s\right)^{1/s}.$$

Теорема 5. *Пусть* $1<p<r\leqslant q<\infty$ *и* $0<s<\infty$. *Тогда*
$$A_s\approx B_s\approx J_s\approx J'_s.$$

Доказательство. По лемме 7 мы имеем $J_s\approx J'_s$. Пусть $0<s<\infty$, тогда
$$A_s^s=\sum_k\sigma_k^s=\sum_k 2^{ks/r'}\left(\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}}\omega(t)\,dt\right)^{s/p}\leqslant\sum_k 2^{ks/r'}\left(\int_{\xi_k}^\infty\omega(t)\,dt\right)^{s/p}.$$

Положим
$$\sum_k 2^{ks/r'}\left(\int_{\xi_k}^\infty\omega(t)\,dt\right)^{s/p}\equiv\mathcal{A}_s^s.$$

Легко увидеть, что

$$J_s^s=\sum_k\int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k+1}}\left(\int\limits_0^x v(t)\,dt\right)^{s/r'}\left(\int\limits_x^\infty \omega\,dt(t)\right)^{\frac{s}{p}-1}\omega(x)\,dx\geqslant$$

$$\geqslant\sum_k\int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k+1}}\left(\int\limits_0^{\xi_k} v(t)\,dt\right)^{s/r'}\left(\int\limits_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}-1}\omega(x)dx=2^{s/r'}\frac{p}{s}\sum_k 2^{ks/r'}\int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k+1}}d\left[-\left(\int\limits_x^\infty\omega(t)\,dt\right)^{s/p}\right]=$$

$$=\frac{p}{s}2^{s/r'}\sum_k 2^{ks/r'}\left[\left(\int\limits_{\xi_k}^\infty\omega(t)\,dt\right)^{s/p}-\left(\int\limits_{\xi_{k+1}}^\infty\omega(t)\,dt\right)^{s/p}\right]=$$

$$=\frac{p}{s}2^{s/r'}\left[\mathcal{A}_s^s-2^{-s/r'}\sum_k 2^{s/r'}2^{ks/r'}\left(\int\limits_{\xi_{k+1}}^\infty\omega(t)\,dt\right)^{s/p}\right]=$$

$$=\frac{p}{s}2^{s/r'}\left[\mathcal{A}_s^s-2^{-s/r'}\mathcal{A}_s^s\right]=\frac{p}{s}\left[2^{s/r'}-1\right]\mathcal{A}_s^s\geqslant\frac{p}{s}\left[2^{s/r'}-1\right]A_s^s.$$

Следовательно,

$$A_s=\left(\sum_k\sigma_k^s\right)^{1/s}\leqslant\left[\frac{p}{s}\left(2^{s/r'}-1\right)\right]^{-1/s}J_s,\quad 0<s<\infty.$$

Для доказательства обратного неравенства предположим, что $0<s<\infty$ и $s\leqslant p$. Тогда $\dfrac{s}{p}-1\leqslant 0$, и если $\int\limits_x^{\xi_{k+1}}\omega(t)\,dt\leqslant\int\limits_x^\infty\omega(t)\,dt$, то

$$\left(\int\limits_x^\infty\omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}-1}\leqslant\left(\int\limits_x^{\xi_{k+1}}\omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}-1}.$$

Так как

$$\left(\int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k+1}}\omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}}\geqslant\frac{s}{p}\int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k+1}}\left(\int\limits_x^\infty\omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}-1}\omega(x)\,dx,$$

мы оцениваем

$$\sum_k 2^{ks/r'}\left(\int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k+1}}\omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}}\geqslant\frac{s}{p}\sum_k 2^{ks/r'}\int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k+1}}\left(\int\limits_x^\infty\omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}-1}\omega(x)\,dx.$$

Заметим, что

$$2^{(k+2)s/r'}=\left(\int\limits_0^{\xi_{k+1}}v(t)\,dt\right)^{s/r'}\geqslant\left(\int\limits_0^x v(t)\,dt\right)^{s/r'},$$

если $\xi_k \leqslant x \leqslant \xi_{k+1}$. Итак,

$$A_s^s \geqslant \frac{s}{p}\sum_k \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} 2^{ks/r'}2^{2s/r'}2^{-2s/r'} \left(\int_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}-1} \omega(x)\,dx =$$

$$= \frac{s}{p}\sum_k 2^{-2s/r'} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} 2^{(k+2)s/r'} \left(\int_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}-1} \omega(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{s}{p}2^{-2s/r'}\sum_k \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left(\int_0^x v(t)\,dt\right)^{s/r'} \left(\int_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}-1} \omega(x)\,dx =$$

$$= \frac{s}{p}2^{-2s/r'} \int_0^\infty \left(\int_0^x v(t)\,dt\right)^{s/r'} \left(\int_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}-1} \omega(x)\,dx = \frac{s}{p}2^{-2s/r'}J_s^s.$$

Окончательно мы получаем, что

$$2^{-2/r'}\left(\frac{s}{p}\right)^{1/s} J_s \leqslant \left(\sum_k \sigma_k^s\right)^{1/s}, \quad \text{если} \quad 0 < s < \infty \quad \text{и} \quad s \leqslant p.$$

Рассмотрим случай, когда $1 < p < s < \infty$. Легко увидеть, что

$$J_s^s \leqslant \sum_k \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left(\int_0^{\xi_{k+1}} v(t)\,dt\right)^{s/r'} \left(\int_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}-1} \omega(x)\,dx =$$

$$= \frac{p}{s}\,2^{2s/r'}\sum_k 2^{ks/r'}\left[\left(\int_{\xi_k}^\infty \omega(t)\,dt\right)^{s/p} - \left(\int_{\xi_{k+1}}^\infty \omega(t)\,dt\right)^{s/p}\right] \leqslant \frac{p}{s}\,2^{2s/r'}\sum_k 2^{ks/r'}\left(\int_{\xi_k}^\infty \omega(t)\,dt\right)^{s/p}.$$

Обозначим $\alpha = \dfrac{p}{2r'}$. Применяя неравенство Гельдера с показателями $\dfrac{s}{p}$ и $\dfrac{s}{s-p}$ получаем оценку

$$\int_{\xi_k}^\infty \omega(t)\,dt = \sum_{m\geqslant k} \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \omega(t)\,dt = \sum_{m\geqslant k}\left[2^{\alpha m}\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \omega(t)\,dt\right]2^{-\alpha m} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{m\geqslant k} 2^{\frac{\alpha m s}{p}}\left(\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}}\right]^{\frac{p}{s}} \left[\sum_{m\geqslant k} 2^{-\alpha m(\frac{s}{s-p})}\right]^{1-\frac{p}{s}} =$$

$$= C_1 2^{-k\alpha}\left[\sum_{m\geqslant k} 2^{\frac{\alpha m s}{p}}\left(\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \omega(t)\,dt\right)^{s/p}\right]^{p/s},$$

где $C_1 = 2^{\alpha}\left(2^{\frac{\alpha s}{s-p}} - 1\right)^{-\frac{s-p}{s}}$.

В результате заключаем, что

$$J_s^s \leqslant C_2 \sum_k 2^{\frac{ks}{2r'}} \sum_{m \geqslant k} 2^{\frac{ms}{2r'}} \left(\int\limits_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \omega(t)\,dt \right)^{s/p},$$

где константа

$$C_2 = \frac{p}{s} \cdot \frac{2^{5s/2r'}}{\left(2^{\frac{ps}{2r'(s-p)}} - 1\right)^{\frac{s}{p}-1}}.$$

Легко проверить выполнение равенства

$$C_2 \sum_k 2^{\frac{ks}{2r'}} \sum_{m \geqslant k} 2^{\frac{ms}{2r'}} \left(\int\limits_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \omega(t)\,dt \right)^{s/p} = C_2 \sum_m 2^{\frac{ms}{2r'}} \left(\int\limits_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \omega(t)\,dt \right)^{s/p} \sum_{k \leqslant m} 2^{\frac{ks}{2r'}}.$$

Так как

$$\sum_{k \leqslant m} 2^{\frac{ks}{2r'}} = \sum_{k=0}^{m} \left(2^{\frac{s}{2r'}}\right)^k = \frac{2^{\frac{ms}{2r'}} \cdot 2^{\frac{s}{2r'}} - 1}{2^{\frac{s}{2r'}} - 1},$$

то можно оценить

$$C_2 \sum_m 2^{\frac{ms}{2r'}} \frac{\left(2^{\frac{ms}{2p'}} \cdot 2^{\frac{s}{2p'}} - 1\right)}{\left(2^{\frac{s}{2r'}} - 1\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p}{s} \cdot \frac{2^{3s/2r'}}{\left(2^{\frac{ps}{2r'(s-p)}} - 1\right)^{\frac{s}{p}-1} \left(2^{\frac{s}{2r'}} - 1\right)} \sum_m 2^{\frac{ms}{r'}} \left(\int\limits_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \omega(t)\,dt \right)^{s/p} \equiv C_3 A_s^s,$$

где константа

$$C_3 = \frac{p}{s} \cdot \frac{2^{3s/2r'}}{\left(2^{\frac{ps}{2r'(s-p)}} - 1\right)^{\frac{s}{p}-1} \left(2^{\frac{s}{2r'}} - 1\right)}.$$

В результате получили, что

$$J_s \leqslant C_3^{1/s} A_s \quad \text{при} \quad 1 < p < s < \infty,$$

и, таким образом, доказали эквивалентность

$$\left(\sum_k \sigma_k^s \right)^{1/s} \approx \left(\int\limits_0^{\infty} \left(\int\limits_0^{x} v(t)\,dt \right)^{s/r'} \left(\int\limits_x^{\infty} \omega(t)\,dt \right)^{\frac{s}{p}-1} \omega(x)\,dx \right)^{1/s}$$

для всех $0<s<\infty$. Аналогично доказывается, что

$$\left(\sum_k \delta_k^s\right)^{1/s} \leqslant \left[\frac{r'}{s}\left[2^{s/p}-1\right]\right]^{-1/s} J'_s, \quad \text{для всех} \quad 0<s<\infty;$$

$$\left(\frac{s}{r'}\right)^{1/s} 2^{-2/p} J'_s \leqslant \left(\sum_k \delta_k^s\right)^{1/s}, \quad \text{для} \quad 0<s<\infty \quad \text{и} \quad s\leqslant r';$$

$$\left(\frac{s}{r'}\right)^{1/s} \frac{\left(2^{\frac{r's}{2p(s-r')}}-1\right)^{\frac{s-r'}{sr'}}\left(2^{\frac{s}{2p}}-1\right)^{1/s}}{2^{2p}} J'_s \leqslant \left(\sum_k \delta_k^s\right)^{1/s}, \quad \text{при} \quad 1<r'<s<\infty.$$

Окончательно заключаем, что при $0<s<\infty$ выполняется эквивалентность

$$\left(\sum_k \delta_k^s\right)^{1/s} \approx \left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^x v(t)\,dt\right)^{\frac{s}{r'}-1} \left(\int\limits_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}} \omega(x)\,dx\right)^{1/s}.$$

□

Основным результатом данной статьи, вытекающим из теорем (3)–(5), является следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть* $1<p<r\leqslant q<\infty$, $\gamma=\frac{pr'}{p+r'}$, *оператор* $T: L_v^r(R^+)\to L_\omega^{pq}(R^+)$ — *компактный оператор вида* (1) *и* $\gamma<s<\infty$. *Тогда оператор* T *принадлежит классу Шаттена–Неймана* $\mathbb{S}_s^{(a)}$ *и*

$$\|T\|_{\mathbb{S}_s^{(a)}} = \left(\sum_{n=1}^\infty a_n^s(T)\right)^{1/s} \leqslant C\left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^x v(t)\,dt\right)^{s/r'} \left(\int\limits_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}-1} \omega(x)\,dx\right)^{1/s},$$

где константа

$$C=\left(\frac{s}{p}\right)^{1/s} \frac{\left(2^{\frac{ps}{2r'(s-p)}}-1\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}}\left(2^{\frac{s}{2r'}}-1\right)^{1/s}\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{s/\gamma}}}{2^{\frac{3}{2r'}}}.$$

Следствие. *Пусть* $1<p<r<\infty$, $1<s<\infty$ *и* $T: L_v^r(R^+)\to L_\omega^{pr}(R^+)$ — *компактный оператор вида* (1). *Тогда оператор* T *принадлежит классу Шаттена–Неймана* $\mathbb{S}_s^{(a)}$ *и имеет место эквивалентность*

$$\|T\|_{\mathbb{S}_s^{(a)}} = \left(\sum_n a_n^s(T)\right)^{1/s} \approx \left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^x v(t)\,dt\right)^{s/r'} \left(\int\limits_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{\frac{s}{p}-1} \omega(x)\,dx\right)^{1/s},$$

с константами, зависящими только от p, r, s.

Список литературы

[1] А. Пич, *Операторные идеалы*, Мир, М., 1982.

[2] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.

[3] H. König, *Eigenvalue distribution of compact operators.* V. 16, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.

[4] E. Lomakina, V. Stepanov, "On asymptotic behaviour of the approximation numbers and estimates of Schatten von Neumann norms of the Hardy–type integral operators", *Function spaces and application*, 2000, 153–187.

[5] E. Lomakina, V. Stepanov, "On the compactness and approximation numbers of Hardy type integral operators in Lorentz spases", *J. London Math. Soc.* (2), **53** (1996), 369–382.

[6] Е. Н. Ломакина, "Об оценках норм оператора Харди, действующего в пространствах Лоренца", *Дальневосточ. матем. журн.*, **20**:2 (2020), 191–211.

[7] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators.* V. 129, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, Boston, 1988.

[8] S. Barza, V. Kolyada V., J. Soria, "Sharp constants related to the triangle inequality in Lorentz spaces", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **361**:10 (2009), 5555–5574.

[9] E. T. Sawyer, "Weighted Lebesgue and Lorentz norm inequalities for the Hardy operator", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **281** (1984), 329–337.

[10] D. E. Edmunds, P. Gurka, L. Pick, "Compactness of Hardy-type integral operators in weighted Banach function spaces", *Studia Math.*, **109** (1994), 73–90.

[11] Е. Н. Ломакина, М. С. Сарычев, "Оценки s-чисел интегрального оператора, действующие из пространств Лебега в пространства Лоренца", *Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления. Материалы VI международной научно-практической конференции*, Хабаровск, 14-16 сентября 2021, 55–63.

[12] Е. Н. Ломакина, М. Г. Насырова, В. В. Насыров, "О некоторых числах оператора Харди в пространствах Лоренца", *Дальневосточ. матем. журн.*, **21**:1 (2021), 56–78.

Поступила в редакцию
10 октября 2021 г.

Lomakina E. N.[1,2], *Sarychev M. S.*[1,2] The estimates of the Schatten-Neumann norms of one class of integral operators. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2021. V. 21. No 2. P. 215–230.

[1] Computer Centre of Far Eastern Branch RAS, Russia
[2] Far Eastern State Transport University, Russia

ABSTRACT

The article considers an integral operator acting from Lebesque spaces to Lorentz spaces. The conditions are found under which the compact operator belongs to the Shatten-Neumann classes.

Key words: *Lebesque spaces, Lorentz spaces, integral operator, approximation numbers, Shatten-Neumann norms.*

References

[1] A. Pich, *Operatornye idealy*, Mir, M., 1982.

[2] I. Ts. Gokhberg, M. G. Krein, *Vvedenie v teoriiu lineinykh nesamosopriazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve*, Nauka, M., 1965.

[3] H. König, *Eigenvalue distribution of compact operators.* V. 16, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.

[4] E. Lomakina, V. Stepanov, "On asymptotic behaviour of the approximation numbers and estimates of Schatten von Neumann norms of the Hardy–type integral operators", *Function spaces and application*, 2000, 153–187.

[5] E. Lomakina, V. Stepanov, "On the compactness and approximation numbers of Hardy type integral operators in Lorentz spases", *J. London Math. Soc.* (2), **53** (1996), 369–382.

[6] E. N. Lomakina, "Ob otsenkakh norm operatora Khardi, deistvuiushchego v prostranstvakh Lorentsa", *Dal'nevostoch. matem. zhurn.*, **20**:2 (2020), 191–211.

[7] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators.* V. 129, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, Boston, 1988.

[8] S. Barza, V. Kolyada V., J. Soria, "Sharp constants related to the triangle inequality in Lorentz spaces", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **361**:10 (2009), 5555–5574.

[9] E. T. Sawyer, "Weighted Lebesgue and Lorentz norm inequalities for the Hardy operator", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **281** (1984), 329–337.

[10] D. E. Edmunds, P. Gurka, L. Pick, "Compactness of Hardy-type integral operators in weighted Banach function spaces", *Studia Math.*, **109** (1994), 73–90.

[11] E. N. Lomakina, M. S. Sarychev, "Otsenki s-chisel integral'nogo operatora, deistvuiushchie iz prostranstv Lebega v prostranstva Lorentsa", *Informatsionnye tekhnologii i vysokoproizvoditel'nye vychisleniia. Materialy VI mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii*, Khabarovsk, 14-16 sentiabria 2021, 55–63.

[12] E. N. Lomakina, M. G. Nasyrova, V. V. Nasyrov, "O nekotorykh chislakh operatora Khardi v prostranstvakh Lorentsa", *Dal'nevostoch. matem. zhurn.*, **21**:1 (2021), 56–78.