*Дальневосточный математический журнал.* 2021. Т. 21. № 2. С. 231–233

УДК 517.583 + 512.742.72
MSC2020 14T90

© М. Д. Монина[1]

# Периодическое ультрадискретное преобразование плоскости с периодом 12

В. А. Быковским было построено новое периодическое ультрадискретное преобразование плоскости с периодом 12. В его работе была предложена лишь идея доказательства этой периодичности. Мы приводим полное и подробное доказательство этого утверждения.

**Ключевые слова:** *нелинейные рекуррентные последовательности, тропические последовательности, нелинейные периодические преобразования.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202119

В последние годы, в связи с многочисленными применениями в вычислительной математике и математической физике, большое внимание уделяется изучению нелинейных рекуррентных последовательностей полиномиального типа. В работе [1] была изучена тропическая последовательность, ассоциированная с рекуррентной последовательностью

$$u(n+1)u^3(n)u(n-1) = \alpha u^2(n) + \beta. \tag{1}$$

Она однозначно определяется рекуррентным соотношением и любыми двумя соседними значениями.

Чтобы избежать неприятностей, связанных с делением на ноль, удобно считать начальные значения $u(0)=x$ и $u(1)=y$, а также коэффициенты $\alpha$ и $\beta$ — независимыми переменными. Поэтому для любого целого $n$, $u(n)$ — рациональные функции от переменных $\alpha, \beta, x, y$, и при этом

$$u(n) = x^{p(n)} y^{q(n)} \frac{R_n(\alpha, \beta, x, y)}{Q_n(\alpha, \beta, x, y)},$$

где $p(n)$ и $q(n)$ — последовательности целых чисел, а $R_n$ и $Q_n$ — взаимно простые полиномы с неотрицательными целыми коэффициентами, которые не делятся на переменные $\alpha, \beta, x, y$. Из соотношения (1) следует, что элементы последовательности $p(n)$ удовлетворяют рекуррентному равенству

$$p(n+1) + 3p(n) + p(n-1) = \min\{2p(n), 0\}.$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 34. Электронная почта: `monina@iam.dvo.ru`

Вычитая из обеих частей $3p(n)+p(n-1)$, получим равенство

$$p(n+1) = \min\{-p(n) - p(n-1), -3p(n) - p(n-1)\}. \tag{2}$$

Переход от (1) к (2) носит название процедуры ультрадискретизации (см. [2–4]). Последовательности такого типа называют тропическими (см. [5]).

Точки на плоскости с координатами (1,0) и (0,1) соединяются отрезком, который параметрически можно задать в виде $[1-t,t]$ с $0\leqslant t\leqslant 1$. Последовательно применяя преобразование

$$T(x,y) = (y,z) \quad \text{с} \quad z = \min\{-x-y, -x-3y\},$$

получаем последовательность отрезков

$$[1-t,t], [t,-1-2t], [-1-2t, 1+t], [1+t,-2-t], [-2-t,1], [1,-1+t],$$

$$[-1+t,-t], [-t,1], [1,t-3], [t-3,2-t], [2-t,-3+2t], [-3+2t,1-t].$$

Каждый последующий получается из предыдущего с помощью преобразования $T$. Последний, двенадцатый отрезок, преобразуется в первый.Объединение этих отрезков представляет собой невыпуклый двенадцатиугольник, внутри которого находится точка (0,0) — начало координат. Эта конструкция наглядно представлена на рисунке 1.

Нумерация отрезков соответствует итерации $T$, в результате которой этот отрезок получается из начального. Стрелки соответствуют параметризации отрезка, когда $t$ изменяется от 0 до 1.

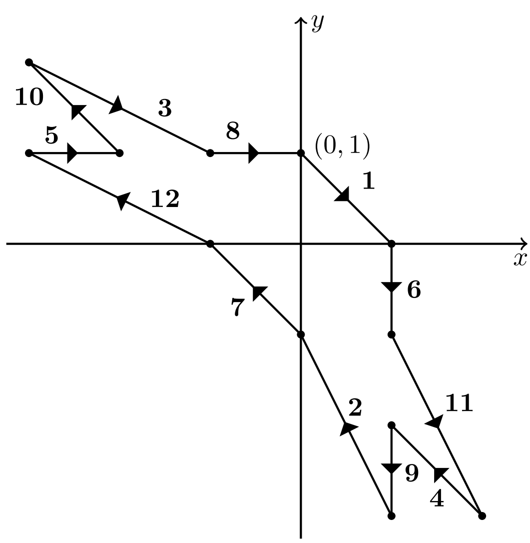


Рис. 1.

Так как для любого $r \geqslant 0$ последовательность $rp(n)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению для $p(n)$, а точка (0,0) лежит внутри двенадцатиугольника, то утверждение о периодичности для преобразования $T$ справедливо при любом выборе начальной точки.

Автор благодарит Быковского В. А. за постановку задачи.

## Список литературы


[1] В. А. Быковский, "Периодические ультрадисперсные преобразования плоскости", *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*, **500** (2021), 53–55.

[2] A. Nobe, "Ultradiscrete QRT maps and tropical elliptic curves", *J. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **41**:12 (2008), 12 pp.

[3] D. Takahashi, J. Satsuma, "A Soliton Cellular Automaton", *Journal of the Physical Society of Japan*, **59**:10 (1990), 3514–3519.

[4] J. Matsukidaira, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro, M. Torii, "Toda-type cellular automaton and its N-soliton solution", *Physics Letters A*, **225**:4–6 (1997), 287–295.

[5] Chris Ormerod, *An ultradiscrete QRT mapping from tropical elliptic curves*, arXiv:math-ph/0609060v1, 22 Sep 2006.


Поступила в редакцию
8 октября 2021 г.

---

*Monina M. D.*[1] Periodic ultradiscrete plane transformation with a period of 12. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2021. V. 21. No 2. P. 231–233.

[1] Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

V.A. Bykovskii constructed a new periodic ultradiscrete plane transformation with a period of 12. In his work only the idea of proving this periodicity was proposed. We provide a complete and detailed proof of this statement.

Key words: *nonlinear recurrent sequences, tropical sequences, nonlinear periodic transformations.*

## References


[1] V. A. Bykovskii, "Periodic ultradiscrete plane tranformations", *Doklady Mathematics*, **500** (2021), 53–55.

[2] A. Nobe, "Ultradiscrete QRT maps and tropical elliptic curves", *J. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **41**:12 (2008), 12 pp.

[3] D. Takahashi, J. Satsuma, "A Soliton Cellular Automaton", *Journal of the Physical Society of Japan*, **59**:10 (1990), 3514-3519.

[4] J. Matsukidaira, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro, M. Torii, "Toda-type cellular automaton and its N-soliton solution", *Physics Letters A*, **225**:4-6 (1997), 287-295.

[5] Chris Ormerod, *An ultradiscrete QRT mapping from tropical elliptic curves*, arXiv:math-ph/0609060v1, 22 Sep 2006.