УДК 517.927.2, 531
MSC2020 34A25, 34A30, 70B99

© М. А. Гузев[1], А. А. Дмитриев[1]

Вычисление теплового потока для гармонической модели одномерного кристалла

Рассматривается одномерная бездиссипативная гармоническая цепочка частиц, расположенная между двумя тепловыми резервуарами. Используя фундаментальное решение для одномерной гармонической модели, получено аналитическое выражение для дискретного локального потока тепла. Выполнено усреднение по времени, что позволяет рассмотреть стационарные характеристики процесса переноса тепла. Показано, что усредненный тепловой поток включает в себя две физически различных компоненты. Первая из них пропорциональна разности температур резервуаров и характеризует перенос тепла вдоль цепочки. Вторая определяет начальное значение потока при равенстве температур резервуаров.

Ключевые слова: *гармоническая цепочка, фундаментальное решение, усреднение, тепловой поток.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202202

1. Введение

В [1] был предложен метод описания движения броуновской частицы, основанный на использовании стохастических дифференциальных уравнений. Авторы использовали уравнение Ланжевена для скорости частицы и построили решение одномерной модели, на основе которого были проанализированы условия применимости формулы Эйнштейна для среднего значения квадрата смещения частицы. В дальнейшем модель Ланжевена использовалась исследователями при описании переноса тепла в цепочке из частиц (частицы Орнштейна – Уленбека), расположенных между двумя тепловыми резервуарами (см., например, [2–4]). Однако при анализе поведения локального теплового потока авторы не использовали динамическое решение модели, а статистические характеристики были получены с применением гармонического анализа.

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690043, г. Владивосток, ул. Радио, 7.
Электронная почта: `guzev@iam.dvo.ru` (М. А. Гузев), `dmitriev@iam.dvo.ru` (А. А. Дмитриев).

В работе [5] этот пробел восполнен. Для одномерной цепочки частиц Орнштейна – Уленбека было построено динамическое решение и получено аналитическое представление для стационарного потока тепла. Представленный результат показывает, что поток включает две компоненты. Первая из них пропорциональна разности температур и не зависит от размера цепочки, что соответствует результатам [2–4]. Вторая компонента существует в условиях теплового равновесия, т.е. при равенстве температур, и пропорциональна средней температуре резервуаров.

Следует указать на некоторые тонкости, связанные с использованием динамической модели. В частности, при описании движения броуновской частицы в [6] показано, что амплитуда случайной силы должна быть согласована с параметром затухания и температурой. Это позволяет в пределе малого затухания получить формулу Эйнштейна для среднего значения квадрата смещения частицы. Ограничением для выбора случайной силы при исследовании системы уравнений в [2–4] является выполнимость предположения, что в случае одного резервуара с заданной температурой стационарное распределение по скоростям и координатам для частиц должно совпадать с распределением Гиббса [7].

Чтобы обойти указанные модельные ограничения, другие авторы [8] используют корреляционный анализ и длинноволновое приближение. Это позволяет получить уравнение, связывающее тепловой поток и температуру и отличающееся от закона Фурье.

Таким образом, возникает естественная задача — сравнить результаты применения различных моделей при описании переноса тепла в однородной цепочке из частиц. Опорными являются результаты, полученные в [5], но, в отличие от [5], мы рассмотрим бездиссипативную модель. Будет показано, что вычисленный для нее тепловой поток совпадает по структуре с тепловым потоком, полученным в [5].

2. Основные соотношения

Полагая $\beta = 0$ в соотношении (8) работы [5], получаем уравнения для смещения частиц u_j из положения равновесия в безразмерных переменных для бездиссипативной модели:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 &= u_2 - 2u_1 + \eta_1, \\ \ddot{u}_j &= u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} \qquad \text{для } j = 2, \dots, n-1, \\ \ddot{u}_n &= u_{n-1} - 2u_n + \eta_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Функции $\eta_1(t)$, $\eta_1(t)$ предполагаются гауссовым белым шумом с нулевым средним и корреляция между значениями $\eta_1(t)$, $\eta_n(t)$ в моменты времени t_1, t_2 равна:

$$\begin{gathered} \langle \eta_1(t), \eta_1(t) \rangle = 2\sigma^2 T_1 \delta(t_1 - t_2), \quad \langle \eta_n(t), \eta_n(t) \rangle = 2\sigma^2 T_n \delta(t_1 - t_2), \\ \langle \eta_1(t), \eta_n(t) \rangle = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Параметры T_1, T_n задают температуру левого и правого тепловых резервуаров, между которыми расположена система, а безразмерная величина σ^2 характеризует интенсивность флуктуаций. Частицы цепочки взаимодействуют со своими резервуарами с помощью случайной силы, при этом резервуары задают температуру для граничных атомов и выступают в качестве источника теплового потока.

Решение системы уравнений (1) было построено в работе [9] и записывается в виде

$$u_j(t) = \int\limits_0^t [K_{j,1}(t-\tau)\eta_1(\tau) + K_{j,n}(t-\tau)\eta_n(\tau)]d\tau,$$

где

$$K_{j,1}(t) = \frac{2}{n+1}\sum_{k\,=\,1}^{n} \sin jk\vartheta \cos k\vartheta_2 \sin(2t\sin k\vartheta_2),$$
$$K_{j,n}(t) = \frac{2}{n+1}\sum_{k\,=\,1}^{n} (-\,1)^{k+1} \sin jk\vartheta \cos k\vartheta_2 \sin(2t\sin k\vartheta_2),$$
$$\vartheta = \frac{\pi}{n{+}1}, \qquad \vartheta_2 = \frac{\vartheta}{2}.$$

Отметим, что

$$K_{j,n}(t) = K_{n+1-j,1}(t). \tag{3}$$

Соотношение для локального теплового потока дается формулой (9) в [5]:

$$J_{j+1,j} = (v_{j+1} + v_j)(u_{j+1} - u_j), \tag{4}$$

где $v_j \equiv \dot{u}_j$.

Интересующая нас величина — среднее значение теплового потока $\langle J_{j+1,j}\rangle_\eta$, где скобки $\langle\ \rangle_\eta$ обозначают усреднение по всем реализациям случайных процессов $\eta_1(t)$, $\eta_n(t)$.

Предварительный анализ показывает, что объект $\langle J_{j+1,j}\rangle_\eta$ содержит осциллирующие вклады при $t \to \infty$. Временной масштаб их изменения определяется характеристиками модели (1) и лежит в интервале $(1,\, n)$. Поскольку нас интересует среднее значение $\langle J_{j+1,j}\rangle_\eta$ для времен, больших по сравнению с внутренними масштабами, то выделить регулярный вклад можно, выполнив дополнительное усреднение по времени:

$$\overline{\langle J_{j+1,j}\rangle_\eta} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \langle J_{j+1,j}\rangle_\eta dt. \tag{5}$$

Формулу (5) мы применим в настоящей работе для определения среднего значения теплового потока $\langle J_{j+1,j}\rangle_\eta$.

3. Аналитические вычисления

3.1. Среднее значение теплового потока

Для локального теплового потока (4) справедливо равенство

$$J_{j+1,j}(t) =$$

$$= \int_0^t \Big\{[K'_{j+1,1}(t-\tau_1) + K'_{j,1}(t-\tau_1)]\eta_1(\tau_1) + [K'_{j+1,n}(t-\tau_1) + K'_{j,n}(t-\tau_1)]\eta_n(\tau_1)\Big\}d\tau_1 \times$$

$$\times \int_0^t \Big\{[K_{j+1,1}(t-\tau_2) - K_{j,1}(t-\tau_2)]\eta_1(\tau_2) + [K_{j+1,n}(t-\tau_2) - K_{j,n}(t-\tau_2)]\eta_n(\tau_2)\Big\}d\tau_2 =$$

$$= \int_0^t \int_0^t \Big\{[K'_{j+1,1}(t-\tau_1) + K'_{j,1}(t-\tau_1)][K_{j+1,1}(t-\tau_2) - K_{j,1}(t-\tau_2)]\eta_1(\tau_1)\eta_1(\tau_2) +$$
$$+[K'_{j+1,1}(t-\tau_1) + K'_{j,1}(t-\tau_1)][K_{j+1,n}(t-\tau_2) - K_{j,n}(t-\tau_2)]\eta_1(\tau_1)\eta_n(\tau_2) +$$
$$+[K'_{j+1,n}(t-\tau_1) + K'_{j,n}(t-\tau_1)][K_{j+1,1}(t-\tau_2) - K_{j,1}(t-\tau_2)]\eta_n(\tau_1)\eta_1(\tau_2) +$$
$$+[K'_{j+1,n}(t-\tau_1) + K'_{j,n}(t-\tau_1)][K_{j+1,n}(t-\tau_2) - K_{j,n}(t-\tau_2)]\eta_n(\tau_1)\eta_n(\tau_2)\Big\}d\tau_1 d\tau_2.$$

Учитывая корреляционные соотношения (2), $\langle J_{j+1,j}(t)\rangle_\eta$ можно записать в виде

$$\langle J_{j+1,j}(t)\rangle_\eta = \int_0^t \int_0^t \Big\{T_1[K'_{j+1,1}(t-\tau_1) + K'_{j,1}(t-\tau_1)][K_{j+1,1}(t-\tau_2) - K_{j,1}(t-\tau_2)] +$$

$$+T_n[K'_{j+1,n}(t-\tau_1) + K'_{j,n}(t-\tau_1)][K_{j+1,n}(t-\tau_2) - K_{j,n}(t-\tau_2)]\Big\}\delta(\tau_1 - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \int_0^t \int_{\tau_1 - t}^{\tau_1} \Big\{T_1[K'_{j+1,1}(t-\tau_1) + K'_{j,1}(t-\tau_1)][K_{j+1,1}(t-\tau_1+\tau) - K_{j,1}(t-\tau_1+\tau)] +$$

$$+T_n[K'_{j+1,n}(t-\tau_1) + K'_{j,n}(t-\tau_1)][K_{j+1,n}(t-\tau_1+\tau) - K_{j,n}(t-\tau_1+\tau)]\Big\}\delta(\tau)d\tau d\tau_1 =$$

$$= \int_0^t \Big[T_1 K_{j+1,1}(\tau)K'_{j+1,1}(\tau) + T_n K_{j+1,n}(\tau)K'_{j+1,n}(\tau)\Big]\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \Big[T_1 K_{j+1,1}(\tau)K'_{j,1}(\tau) + T_n K_{j+1,n}(\tau)K'_{j,n}(\tau)\Big]\, d\tau -$$

$$- \int_0^t \Big[T_1 K_{j,1}(\tau)K'_{j+1,1}(\tau) + T_n K_{j,n}(\tau)K'_{j+1,n}(\tau)\Big]\, d\tau -$$

$$- \int_0^t \Big[T_1 K_{j,1}(\tau)K'_{j,1}(\tau) + T_n K_{j,n}(\tau)K'_{j,n}(\tau)\Big]\, d\tau.$$

Следовательно, средний локальный тепловой поток равен

$$\langle J_{j+1,j}(t)\rangle_\eta = \frac{1}{2}\left(T_1\left[K^2_{j+1,1}(t) - K^2_{j,1}(t)\right] + T_n\left[K^2_{j+1,n}(t) - K^2_{j,n}(t)\right]\right) + \tag{6}$$

$$+\int_0^t \Big\{T_1\left[K_{j+1,1}(\tau)K'_{j,1}(\tau) - K_{j,1}(\tau)K'_{j+1,1}(\tau)\right] + \\ +T_n\left[K_{j+1,n}(\tau)K'_{j,n}(\tau) - K_{j,n}(\tau)K'_{j+1,n}(\tau)\right]\Big\}d\tau. \tag{7}$$

3.2. Усреднение по времени

Равенство (3) позволяет в (6)—(7) вычислить среднее только для $K_{j,1}(t)$.

В первом слагаемом (6) среднее от $K^2_{j,1}(t)$ не зависит от j. Поскольку

$$K^2_{j,1}(t) = \frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k,l\,=\,1}^{n} \sin jk\vartheta \sin lk\vartheta \cos k\vartheta_2 \cos l\vartheta_2 \sin(2t\sin k\vartheta_2)\sin(2t\sin l\vartheta_2),$$

то ненулевой вклад в усреднение по времени при $t\to\infty$ в этой сумме дают пределы интегралов от произведений $\sin(2t\sin k\vartheta_2)\sin(2t\sin l\vartheta_2)$ лишь в случае $k=l$, и этот предел равен $\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\overline{K^2_{j,1}} = \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{k\,=\,1}^{n}\sin^2 jk\vartheta\cos^2 k\vartheta_2 =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)^2}\sum_{k\,=\,1}^{n}(1+\cos k\vartheta - \cos 2jk\vartheta - \cos 2jk\vartheta\cos k\vartheta) =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)^2}\left[n + \sum_{k\,=\,1}^{n}\left(\cos k\vartheta - \cos 2jk\vartheta - \frac{1}{2}(\cos(2j+1)k\vartheta + \cos(2j-1)k\vartheta)\right)\right].$$

Учитывая, что при $\vartheta = \dfrac{\pi}{n+1}$ и $j\neq 0$,

$$\sum_{k\,=\,1}^{n}\cos jk\vartheta = \begin{cases} \ \ 0, & \text{если } j \text{ нечётное,} \\ -1, & \text{если } j \text{ чётное,}\end{cases} \tag{8}$$

получим $\overline{K^2_{j,1}} = \dfrac{1}{2(n+1)}$.

Таким образом, усреднение по времени разности $K^2_{j+1,1}(t) - K^2_{j,1}(t)$ равно нулю. В силу равенства (3) усреднение по времени второго слагаемого в (6) также даёт нуль, следовательно, вклад (6) в $\langle J_{j+1,j}(t)\rangle_\eta$ равен нулю.

Поскольку

$$K'_{j,1}(t) = \frac{2}{n+1}\sum_{k\,=\,1}^{n}\sin jk\vartheta\sin k\vartheta\cos(2t\sin k\vartheta_2), \tag{9}$$

то в (7) ненулевой вклад в усреднение интеграла в произведении $K_{j+1,1}(t)K'_{j,1}(t)$ дают пределы интегралов

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t\int\limits_0^s \sin\omega_k\tau\cos\omega_l\tau d\tau ds = \begin{cases}\dfrac{1}{4\omega_k}, & k=l,\\ \dfrac{\omega_k}{\omega_k^2-\omega_l^2}, & k\neq l,\end{cases}$$

$$\omega_k = 2\sin k\vartheta_2, \qquad \frac{\omega_k}{\omega_k^2-\omega_l^2} = \frac{\sin k\vartheta_2}{2(\sin^2 k\vartheta_2 - \sin^2 l\vartheta_2)} = \frac{\sin k\vartheta_2}{\cos l\vartheta - \cos k\vartheta}.$$

Сумма диагональных членов $\overline{DK_j}$ в усреднении $\overline{K_{j+1,1}K'_{j,1}}$ равна

$$\overline{DK_j} = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\sin(j+1)k\vartheta\sin jk\vartheta\cos^2 k\vartheta_2 =$$

$$= \frac{1}{4(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos k\vartheta - \cos(2j+1)k\vartheta + \frac{1+\cos 2k\vartheta - \cos 2(j+1)k\vartheta - \cos 2jk\vartheta}{2}\right] = \frac{1}{8(n+1)}.$$

Здесь использованы равенства (8). Так как $\overline{DK_j}$ не зависит от j, то их вклад в (7) равен нулю.

Таким образом, ненулевой вклад в усреднение по времени в (7) дают лишь внедиагональные члены. Вычислим их вклад, обозначив двойную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}$ как $\sum\limits_{k,l}{}'$. Для внедиагональных членов выражения при T_1 в (7) справедливо равенство

$$\overline{\mathbf{K}}_{j,1} \overset{\mathrm{def}}{=} \overline{K_{j+1,1}K'_{j,1} - K_{j,1}K'_{j+1,1}} =$$

$$= \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{k,l}{}'\left[\sin(j+1)k\vartheta\sin jl\vartheta - \sin jk\vartheta\sin(j+1)l\vartheta\right]\frac{\sin k\vartheta\sin l\vartheta}{\cos l\vartheta - \cos k\vartheta}.$$

$\overline{\mathbf{K}}_{j,1}$ будем вычислять по индукции. Очевидно, что

$$\overline{\mathbf{K}}_{1,1} = -\frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k,l}{}'\sin^2 k\vartheta\sin^2 l\vartheta.$$

При $j>2$ вычислим разность $\overline{\mathbf{K}}_{j,1} - \overline{\mathbf{K}}_{j-1,1}$. Для этого достаточно преобразовать выражение

$$\sin(j+1)k\vartheta\sin jl\vartheta - \sin jk\vartheta\sin(j+1)l\vartheta - \sin jk\vartheta\sin(j-1)l\vartheta + \sin(j-1)k\vartheta\sin jl\vartheta,$$

или

$$\sin jl\vartheta(\sin(j+1)k\vartheta + \sin(j-1)k\vartheta) - \sin jk\vartheta(\sin(j+1)l\vartheta + \sin(j-1)l\vartheta) =$$
$$= 2(\sin jl\vartheta\sin jk\vartheta\cos k\vartheta - \sin jk\vartheta\sin jl\vartheta\cos l\vartheta) =$$
$$= 2\sin jl\vartheta\sin jk\vartheta(\cos k\vartheta - \cos l\vartheta).$$

Отсюда получим $\overline{\mathbf{K}}_{j,1} = \overline{\mathbf{K}}_{j-1,1} - \dfrac{4}{(n+1)^2}\sum_{k,l}{}' \sin jl\vartheta \sin jk\vartheta \sin k\vartheta \sin l\vartheta$.

Сумму $\sum_{k,l}{}' \sin jk\vartheta \sin jl\vartheta \sin k\vartheta \sin l\vartheta$ несложно вычислить, добавляя и вычитая диагональные члены, что приводит к разности

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \sin jk\vartheta \sin k\vartheta\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \sin^2 jk\vartheta \sin^2 k\vartheta.$$

Это выражение записывается в виде

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \sin^2 k\vartheta\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \sin^4 k\vartheta = \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{3(n+1)}{8} = \frac{1}{8}(n+1)(2n-1) \text{ при } j=1,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin jk\vartheta \sin k\vartheta = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} [\cos(j-1)k\vartheta - \cos(j+1)k\vartheta] = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin^2 jk\vartheta \sin^2 k\vartheta =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[1 - \cos 2jk\vartheta - \cos 2k\vartheta + \frac{1}{2}(\cos 2(j+1)k\vartheta + \cos 2(j-1)k\vartheta)\right] = \frac{1}{4}(n+1)$$

при $j > 1$.

Следовательно,

$$\overline{\mathbf{K}}_{1,1} = -\frac{2n-1}{2(n+1)}, \qquad \overline{\mathbf{K}}_{j,1} = \overline{\mathbf{K}}_{j-1,1} + \frac{1}{n+1} = \overline{\mathbf{K}}_{1,1} + \frac{j-1}{n+1} \text{ при } j>1,$$

или

$$\overline{\mathbf{K}}_{j,1} = \frac{2(j-n)-1}{2(n+1)}.$$

Так как $\overline{K_{j+1,n}K'_{j,n} - K_{j,n}K'_{j+1,n}} = \overline{K_{n-j,1}K'_{n+1-j,1} - K_{n+1-j,n}K'_{n-j,n}}$, то $\overline{\mathbf{K}}_{j,n} = -\overline{\mathbf{K}}_{n-j,1}$, или $\overline{\mathbf{K}}_{j,n} = \dfrac{2j+1}{2(n+1)}$. В окончательном виде получаем формулу локального переноса тепла

$$\overline{\langle J_{j+1,j}(t)\rangle_\eta} = T_n\frac{2j+1}{2(n+1)} - T_1\frac{2(n-j)+1}{2(n+1)} = \frac{T_n - T_1}{2} + \frac{T_n + T_1}{2}\,\frac{2j-n}{n+1}. \qquad (10)$$

4. Обсуждение

Начальная мотивация при выполнении данной работы состояла в сравнении результатов применения диссипативной и бездиссипативной моделей при описании переноса тепла в однородной цепочке из частиц. Формула (10) показывает, что структура теплового потока в рамках бездиссипативной модели совпадает со структурой стационарного теплового потока диссипативной модели [5]. Однако полученный вывод нельзя полагать точным, поскольку достигнутое совпадение оказалось возможным после проведения дополнительной процедуры усреднения по внутреннему масштабу. Также надо иметь в виду, что выполненное сравнение было основано на анализе поведения только теплового потока. Для различных моделей представляет интерес исследовать поведение средней кинетической энергии частицы, которая является мерой температуры.

Предварительное рассмотрение поведения температуры можно выполнить для бездиссипативной модели.

Аналогичные вычисления п. 3.1 для энергии $\Xi_j = \frac{1}{2} v_j^2$ приводят к равенству

$$\langle \Xi_j(t) \rangle_\eta = \frac{\sigma^2}{2} \int\limits_0^t \left[T_1 (K'_{j,1}(\tau))^2 + T_n (K'_{j,n}(\tau))^2 \right] d\tau.$$

Равенства (3) и (9) позволяют вычислять среднее лишь для

$$(K'_{j,1}(t))^2 = \frac{4}{(n+1)^2} \sum_{k\,=\,1}^{n} \sum_{l\,=\,1}^{n} \sin jk\vartheta \sin jl\vartheta \sin k\vartheta \sin l\vartheta \cos(2t \sin k\vartheta_2) \cos(2t \sin l\vartheta_2).$$

Интегрируя $(K'_{j,1})^2$, получим

$$\int\limits_0^t (K'_{j,1}(s))^2 ds = \frac{2}{(n+1)^2} \left[\sum_{k\,=\,1}^{n} \sin^2 jk\vartheta \sin^2 k\vartheta \left(t + \frac{\sin 2\omega_k t}{2\omega_k} \right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k,l}{}' \sin jk\vartheta \sin jl\vartheta \sin k\vartheta \sin l\vartheta \frac{\omega_k \sin \omega_k t \cos \omega_l t - \omega_l \sin \omega_l t \cos \omega_k t}{\omega_k^2 - \omega_l^2} \right].$$

Так как

$$\sum_{k\,=\,1}^{n} \sin^2 jk\vartheta \sin^2 k\vartheta = \begin{cases} \dfrac{3(n+1)}{8} & \text{при } j = 1, \\ \dfrac{n+1}{4} & \text{при } j > 1, \end{cases}$$

то

$$\langle \Xi_j(t) \rangle_\eta = \frac{\sigma^2}{n+1} \left[\frac{1}{4} C(T_1, T_n) t + \frac{2}{n+1} f_j(t) \right],$$

где

$$C(T_1, T_n) = \begin{cases} 3T_1 + 2T_n & \text{при } j = 1, \\ 2(T_1 + T_n) & \text{при } 1 < j < n, \\ 2T_1 + 3T_n & \text{при } j = n, \end{cases}$$

а $f_j(t)$ — ограниченная быстро осциллирующая функция.

Таким образом, для бездиссипативной модели средняя кинетическая энергия частицы имеет секулярное поведение при $t \to \infty$. С физической точки зрения полученный эффект аналогичен явлению резонанса для частицы под действием внешней силы. Связь между диссипативной и бездиссипативной моделями можно указать на основе следующего эвристического рецепта. Поскольку система (1) получена при условии $\beta \to 0$, тогда по размерности $t \sim {}^1\!/_\beta$ и ${}^1\!/_\beta$ задает дополнительный масштаб во времени. Тогда для диссипативной модели величина $\langle \Xi_j(t) \rangle_\eta$ в ведущем порядке по β ведет как ${}^1\!/_\beta$. Для дальнейшего исследования представляет интерес уточнить полученный результат.

Список литературы

[1] G. E. Uhlenbeck, L. S. Ornstein, “On the Theory of the Brownian Motion”, *Phys. Rev.*, **36** (1930), 823–841.

[2] S. Lepri, R. Livi, A. Politi, “Thermal conduction in classical low-dimensional lattices”, *Physics Reports*, **377** (2003), 1–80 doi:10.1016/S0370-1573(02)00558-6.

[3] F. Bonetto, J. L. Lebowitz, J. Lukkarinen, “Fourier’s Law for a Harmonic Crystal with Self-Consistent Stochastic Reservoirs”, *Journal of Statistical Physics*, **116** (2004), 783—813 doi:10.1023/B:JOSS.0000037232.14365.10.

[4] A. Dhar, R. Dandekar, “Heat transport and current fluctuations in harmonic crystals”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **418** (2015), 49–64.

[5] Гузев М. А., Горбунов А. В., “Структура теплового потока для частиц Орнштейна-Уленбека одномерной гармонической цепочки”, *Дальневосточный матем. журнал*, **21**:2 (2021), 180-–193.

[6] R. Kubo, M. Toda, N. Hashitsume, *Statistical Physics II: Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Academic PressSpringer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.

[7] F. Bonetto, J. L. Lebowitz, L. Rey-Bellet, “Fourier’s law: A challenge to theorists”, *Mathematical Physics*, 2000, 128–150.

[8] А. М. Кривцов, “Распространение тепла в бесконечном одномерном гармоническом кристалле”, *ДАН*, **464**:2 (2015), 162–166.

[9] М. А. Гузев, А. А. Дмитриев, “Различные формы представления решения одномерной гармонической модели кристалла”, *Дальневосточный матем. журнал*, **17**:1 (2017), 30–47.

Поступила в редакцию
16 мая 2022 г.

Guzev M. A.[1], *Dmitriev A. A.*[1] Heat flow calculation for a harmonic model of a one-dimensional crystal. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2022. V. 22. No 1. P. 28–37.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

A one-dimensional non-dissipative harmonic chain of particles is considered, located between two thermal reservoirs. Using the fundamental solution of the one-dimensional harmonic model, an analytical representation is obtained for the discrete expression of the heat flux. Time averaging was performed, which allows taking into account the stationary characteristics of the heat transfer process. It is shown that the averaged heat flux includes two physically different components. The first one is proportional to the temperature difference between the reservoirs and characterizes the heat transfer along the chain. The second one determines the initial value of the flow when the temperatures of the tanks are equal.

Key words: *harmonic chain, fundamental solution, time averaging, heat flux.*

References

[1] G. E. Uhlenbeck, L. S. Ornstein, “On the Theory of the Brownian Motion”, *Phys. Rev.*, **36** (1930), 823–841.

[2] S. Lepri, R. Livi, A. Politi, “Thermal conduction in classical low-dimensional lattices”, *Physics Reports*, **377** (2003), 1–80 doi:10.1016/S0370-1573(02)00558-6.

[3] F. Bonetto, J. L. Lebowitz, J. Lukkarinen, “Fourier's Law for a Harmonic Crystal with Self-Consistent Stochastic Reservoirs”, *Journal of Statistical Physics*, **116** (2004), 783–813 doi:10.1023/B:JOSS.0000037232.14365.10.

[4] A. Dhar, R. Dandekar, “Heat transport and current fluctuations in harmonic crystals”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **418** (2015), 49–64.

[5] Guzev M. A., Gorbunov A. V., “Struktura teplovogo potoka dlia chastits Ornshteina-Ulenbeka odnomernoi garmonicheskoi tsepochki”, *Dal'nevostochnyi matem. zhurnal*, **21**:2 (2021), 180–193.

[6] R. Kubo, M. Toda, N. Hashitsume, *Statistical Physics II: Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Academic PressSpringer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.

[7] F. Bonetto, J. L. Lebowitz, L. Rey-Bellet, “Fourier's law: A challenge to theorists”, *Mathematical Physics*, 2000, 128–150.

[8] A. M. Krivtsov, “Rasprostranenie tepla v beskonechnom odnomernom garmonicheskom kristalle”, *DAN*, **464**:2 (2015), 162–166.

[9] M. A. Guzev, A. A. Dmitriev, “Razlichnye formy predstavleniia resheniia odnomernoi garmonicheskoi modeli kristalla”, *Dal'nevostochnyi matem. zhurnal*, **17**:1 (2017), 30–47.