Дальневосточный математический журнал. 2022. Т. 22. № 1. С. 51–54

УДК 517
MSC2020 30E20

© А. А. Дмитриев[1]

Об одном равенстве интегралов

В заметке доказывается равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|\,=\,r}\ln\!\left[1-f(z)\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]dz=\;-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|\,=\,r}\exp\left(\frac{1-\sqrt{1-4f^2(z)}}{2zf(z)}\right)dz.$$

Ключевые слова: *интеграл.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202204

В заметке доказывается следующее утверждение:

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $\{|z|<r\}$, непрерывна вплоть до границы и

$$\max_{|z|\,=\,r}|f(z)|\left(r+\frac{1}{r}\right)<1.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|\,=\,r}\ln\!\left[1-f(z)\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]dz=\;-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|\,=\,r}\exp\left(\frac{1-\sqrt{1-4f^2(z)}}{2zf(z)}\right)dz.$$

Из принципа максимума модуля непосредственно вытекает, что $\left|f(z)\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|<1$ в некотором кольце $r''<|z|<r'<r$, в котором логарифм $\ln(1-z)$ не меняет своего аргумента, причем $|f(z)|<\frac{1}{2}$ в круге $\{|z|<r\}$.

Положим $h_k(z)=h(z)\left(z+\frac{1}{z}\right)^k$, $c_n(h)=h^{(n)}(0)$ и вычислим вычеты функции $h_k(z)$ в нуле.

При чётных индексах k

$$h_{2k}(z)=\sum_{n\,=\,0}^{\infty}\sum_{m\,=\,0}^{2k}\frac{1}{n!}\binom{2k}{m}c_n(h)z^{2(k-m)+n}.$$

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690043, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: dmitriev@iam.dvo.ru

Показатель степени z будет равен -1, если $n=2p-1$ и $m=p+k$, а так как n и m больше либо равны нулю и m не больше $2k$, то $1\leqslant p\leqslant k$, следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=0} h_{2k}(z) = \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{(2p-1)!}\binom{2k}{p+k} c_{2p-1}(h).$$

При нечетных индексах k

$$h_{2k-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2k-1} \frac{1}{n!}\binom{2k-1}{m} c_n(h) z^{2(k-m)+n-1}.$$

Показатель степени z будет равен -1, если $n=2p$ и $m=p+k$, причем $0\leqslant p\leqslant k-1$, т. е.

$$\operatorname*{res}_{z=0} h_{2k-1}(z) = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{(2p)!}\binom{2k-1}{p+k} c_{2p}(h) = \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{[2(p-1)]!}\binom{2k-1}{p+k-1} c_{2(p-1)}(h).$$

Для функции

$$\mathrm{g}(z) = -\ln\left[1 - f(z)\left(z+\frac{1}{z}\right)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^k(z)}{k}\left(z+\frac{1}{z}\right)^k$$

вычет в точке 0 равен

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{k}\left[\frac{1}{(2k-1)[2(p-1)]!}\binom{2k-1}{p+k-1} c_{2(p-1)}\left(f^{2k-1}\right) + \frac{1}{2k(2p-1)!}\binom{2k}{p+k} c_{2p-1}\left(f^{2k}\right)\right] =$$

$$=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=p}^{\infty}\left[\frac{1}{(2k-1)[2(p-1)]!}\binom{2k-1}{p+k-1} c_{2(p-1)}\left(f^{2k-1}\right) + \frac{1}{2k(2p-1)!}\binom{2k}{p+k} c_{2p-1}\left(f^{2k}\right)\right] =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{[2(k+p-1)]!}{[2(p-1)]!k!(2p+k-1)!} c_{2(p-1)}\left(f^{2(k+p)-1}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{[2(k+p)-1]!}{(2p-1)!k!(2p+k)!} c_{2p-1}\left(f^{2(k+p)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r} \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{[2(k+p-1)]!}{[2(p-1)]!k!(2p+k-1)!}\frac{f^{2(k+p)-1}(\zeta)}{\zeta^{2p-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{[2(k+p)-1]!}{(2p-1)!k!(2p+k)!}\frac{f^{2(k+p)}(\zeta)}{\zeta^{2p}}\right] d\zeta.$$

Известно, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+q-1)!}{k!(k+q)!} x^k = \frac{1}{q}\left[\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right]^q$$

при $|x|<\dfrac{1}{4}$ (см. [1, 5.2.13.30]), следовательно, суммы в последнем выражении равны

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{[f(\zeta)]^{2p-1}}{[2(p-1)]!\zeta^{2p-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[2k+(2p-1)-1]!}{k!(k+2p-1)!}\left[f^2(\zeta)\right]^k=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p-1)!}\left[\frac{1-\sqrt{1-4f^2(\zeta)}}{2f(\zeta)\zeta}\right]^{2p-1},$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{[f(\zeta)]^{2p}}{(2p-1)!\zeta^{2p}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+2p-1)!}{k!(k+2p)!}\left[f^2(\zeta)\right]^k = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)!}\left[\frac{1-\sqrt{1-4f^2(\zeta)}}{2f(\zeta)\zeta}\right]^{2p},$$

или $\operatorname*{res}_{z=0} \mathrm{g}(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta|=r}\exp\left(\frac{1-\sqrt{1-4f^2(\zeta)}}{2f(\zeta)\zeta}\right)d\zeta$, что и доказывает сформулированное утверждение.

Например, при $|t|\leqslant\dfrac{1}{4}$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\ln\left[1-\frac{t}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]dz = -\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t},$$

так как вычет функции $\exp\left(\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{zt}\right)$ в нуле, очевидно, равен правой части равенства. Отметим, что подстановка $z=e^{i\varphi}$ приводит к интегралам

$$frac12\pi\int\limits_0^{2\pi}\ln\left[1-t\cos\varphi\right]\cos\varphi d\varphi, \qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left[1-t\cos\varphi\right]\sin\varphi d\varphi,$$

которые вычисляются элементарными методами. Первый из них равен $-\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t}$, а второй — нулю.

Отметим, что, если $\dfrac{1-\sqrt{1-4f^2(z)}}{2f(z)}$ обозначить через $\mathrm{g}(z)$, то $f(z)=\dfrac{\mathrm{g}(z)}{1+\mathrm{g}^2(z)}$, в частности, при $\mathrm{g}(z)=\dfrac{1}{2}t(z^2-1)$ и $|t|<\sqrt{2}-1$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\ln\left[1-\frac{2t(z^2-1)}{4+t^2(z^2-1)^2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]dz = J_1(t),$$

так как $\exp\left(\dfrac{t}{2}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)\right)$ является производящей функцией полиномов Бесселя, причём коэффициент при z^{-1} равен $-J_1(t)$ (см., например, [2, стр.24]).

Список литературы

[1] by А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев*Интегралы и ряды.* Т. 1: *Элементарные функции*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2002, 632 с.

[2] Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, ИИЛ, М., 1949, 799 с.

Поступила в редакцию
30 марта 2022 г.

Dmitriev A. A.[1] On one equality of integrals. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2022. V. 22. No 1. P. 51–54.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

The note proves the equality

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r}\ln\left[1-f(z)\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]dz = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r}\exp\left(\frac{1-\sqrt{1-4f^2(z)}}{2zf(z)}\right)dz.$$

Key words: *integral.*

References

[1] by A. P. Prudnikov, Iu. A. Brychkov, O. I. Marichev*Integraly i riady.* T. 1: *Elementarnye funktsii*, FIZMATLIT, M., 2002, 632 c.

[2] G. N. Vatson, *Teoriia besselevykh funktsii*, IIL, M., 1949, 799 c.