Дальневосточный математический журнал. 2022. Т. 22. № 1. С. 55–60

УДК 517.54
MSC2020 30C75, 30C85

© В. Н. Дубинин[1], В. Ю. Ким[2]

О конденсаторах с переменными пластинами, уровнями потенциала и областью задания

Получена асимптотическая формула для емкости обобщенного конденсатора в случае, когда часть его пластин стягивается в наперед заданные точки, при этом уровни потенциала суть переменные величины, а множество, на котором определен конденсатор, стремится к фиксированной области.

Ключевые слова: *асимптотическая формула, конформная емкость, конденсатор, функция Грина.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202205

Систематическое изучение поведения емкости конденсатора при геометрических преобразованиях его пластин восходит к работам Полиа и Сеге [1]. Нас интересует асимптотика конформной емкости конденсатора при стягивании части его пластин в наперед заданные точки. Случай одной точки является классическим, и его применение в комплексном анализе широко представлено в литературе (см., например, [2–6]). Асимптотика емкости конденсатора с тремя и более пластинами разной полярности рассматривалась впервые в [7]. Такая асимптотика представляет интерес при получении метрических свойств замкнутых множеств, решении задач об экстремальном разбиении комплексной сферы, а также в теории конформных отображений и теории многолистных функций, включая полиномы и рациональные функции [8, 9]. В работе [10] впервые был поставлен вопрос об асимптотике емкости конденсатора с переменными уровнями потенциала. В данном сообщении приводится формула, учитывающая наряду с изменением уровней потенциала меняющуюся область задания конденсатора. Перейдем к точным формулировкам.

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7.
[2] Дальневосточный федеральный университет, 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.
Электронная почта: `dubinin@iam.dvo.ru` (В. Н. Дубинин), `victoria_kim@mail.primorye.ru` (В. Ю. Ким).

Пусть D — область на комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}$. *Обобщенный конденсатор* (далее *конденсатор*) в $\overline{D}$ есть тройка $C=(D,\mathscr{E},\Delta)$, где $\mathscr{E}=\{E_k\}_{k=0}^n$ — совокупность замкнутых непустых попарно не пересекающихся множеств $E_k\subset\overline{D}$, $k=0,1,\dots,n$, а $\Delta=\{\delta_k\}_{k=0}^n$ — совокупность вещественных чисел δ_k, $k=0,1,\dots,n$, $n\geqslant 1$. Множества E_k называют *пластинами* конденсатора C, а числа δ_k — *уровнями потенциала* или, короче, *потенциалами пластин* E_k, $k=0,1,\dots,n$. *Емкость* $\operatorname{cap} C$ конденсатора C определяется как точная нижняя граница интегралов Дирихле

$$I(v,D):=\iint\limits_D|\bigtriangledown v|^2\,dxdy$$

по всем вещественнозначным функциям v, непрерывным в $\overline{D}$, удовлетворяющим условию Липшица локально в D и равным δ_k на E_k, $k=0,1,\dots,n$. В следующей ниже теореме пластины конденсатора, уровни потенциала и область задания конденсатора являются функциями некоторого параметра $\varepsilon>0$.

Теорема 1. *Пусть D — конечносвязная область сферы $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченная дважды непрерывно дифференцируемыми кривыми, и пусть $\{D(\varepsilon)\}$ — семейство областей в $\overline{\mathbb{C}}$, зависящих от параметра $\varepsilon>0$, имеющих классическую функцию Грина и таких, что расстояние между границами ∂D и $\partial D(\varepsilon)$ (по Хаусдорфу) есть величина $O(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$. Пусть $\{z_k\}_{k=1}^n$, $n\geqslant 1$, — совокупность различных конечных точек области D,*

$$\delta_k(\varepsilon)=\delta_k-\alpha_k\varepsilon+o(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0,$$

$\delta_k\neq 0$ и α_k — вещественные числа, $k=1,\dots,n$. Предположим, что пластины $E_k(\varepsilon)$, $k==1,\dots,n$, конденсатора

$$C(\varepsilon)=(D(\varepsilon),\{\partial D(\varepsilon),E_1(\varepsilon),\dots,E_n(\varepsilon)\},\{0,\delta_1(\varepsilon),\dots,\delta_n(\varepsilon)\})$$

ограничены замкнутыми гладкими жордановыми кривыми, на которых выполняется

$$|z-z_k|=\mu_k\exp(-\nu_k/\varepsilon)(1+o(1)),\ \ \varepsilon\to 0, \tag{1}$$

$\mu_k>0$, $\nu_k>0$, $k=1,\dots,n$. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned}\operatorname{Cap} C(\varepsilon)=2\pi\varepsilon\sum_{k=1}^n\frac{\delta_k^2}{\nu_k}-2\pi\varepsilon^2\Big\{\sum_{k=1}^n\Big[2\frac{\alpha_k\delta_k}{\nu_k}+\frac{\delta_k^2}{\nu_k^2}\log\frac{r(D,z_k)}{\mu_k}\Big]+\\+\sum_{k=1}^n\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^n\frac{\delta_k\delta_l}{\nu_k\nu_l}\mathrm{g}_D(z_k,z_l)\Big\}+o(\varepsilon^2),\quad\varepsilon\to 0,\end{aligned}\tag{2}$$

где

$$\mathrm{g}_D(z,z_k)=h_D(z,z_k)-\log|z-z_k|$$

означает функцию Грина области D, а $r(D,z_k)=\exp h_D(z_k,z_k)$ — внутренний радиус D относительно точки z_k, $k=1,\dots,n$. При $n=1$ слагаемые, содержащие функции Грина, полагаем равными нулю.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что формула вида (2) не зависит от выбора конкретных пластин $E_k(\varepsilon)$, $k = 1, ..., n$, удовлетворяющих условию (1) (см. [8, Лемма 2.1]). Введем сокращенные обозначения $\mathrm{g}(z, z_k) = \mathrm{g}_D(z, z_k)$, $R_k = r(D, z_k)$, $\mathrm{g}_\varepsilon(z, z_k) = \mathrm{g}_{D(\varepsilon)}(z, z_k)$, $R_k(\varepsilon) = r(D(\varepsilon), z_k)$ и $\lambda_k = \varepsilon/(\varepsilon \log \mu_k - \nu_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Следуя [7], при достаточно малом положительном значении параметра ε рассмотрим вспомогательную функцию

$$\mathrm{g}(z) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) \sum_{l=1}^{n} \beta_{lk} \mathrm{g}_\varepsilon(z, z_l),$$

где

$$\beta_{lk} = \begin{cases} -\lambda_k \lambda_l \mathrm{g}_\varepsilon(z_k, z_l), & l \neq k, \\ -\lambda_k [1 + \lambda_k \log R_k(\varepsilon)], & l = k, \end{cases}$$

$k,\ l = 1, \ldots, n$. Функция g равна нулю в $\overline{\mathbb{C}} \setminus D(\varepsilon)$, непрерывна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \{z_k\}$ и гармоническая в $D(\varepsilon) \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \{z_k\}$. В каждой точке z_k функция g имеет логарифмическую особенность. Отсюда заключаем, что при любом k, $1 \leqslant k \leqslant n$, граница множества

$$\mathscr{E}_k(\varepsilon) := \{z :\ |z - z_k| < \mu_k \exp(-\nu_k/(2\varepsilon)),\ \mathrm{g}(z)/\delta_k(\varepsilon) \geqslant 1\}$$

представляет собой замкнутую аналитическую жорданову кривую. Для точек $z \in \partial \mathscr{E}_k(\varepsilon)$ выполняется

$$\delta_k(\varepsilon) = \delta_k(\varepsilon) \Big\{ -\lambda_k [1 + \lambda_k \log R_k(\varepsilon)] \mathrm{g}_\varepsilon(z, z_k) - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \lambda_k \lambda_l \mathrm{g}_\varepsilon(z_k, z_l) \mathrm{g}_\varepsilon(z, z_l) \Big\} -$$
$$- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \delta_j(\varepsilon) \Big\{ \lambda_k \lambda_j \mathrm{g}_\varepsilon(z_k, z_j) \mathrm{g}_\varepsilon(z, z_k) + \lambda_j [1 + \lambda_j \log R_j(\varepsilon)] \mathrm{g}_\varepsilon(z, z_j) + \tag{3}$$
$$+ \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j, l \neq k}}^{n} \lambda_l \lambda_j \mathrm{g}_\varepsilon(z_l, z_j) \mathrm{g}_\varepsilon(z, z_l) \Big\}.$$

Зададим на границе области D положительную ориентацию. При достаточно большом фиксированном значении c и малых ε кривые вида

$$\{z :\ z = z' \pm c\varepsilon i dz/|dz|,\ z' \in \partial D\}$$

ограничивают область $D^+(\varepsilon)$, содержащуюся в $D(\varepsilon)$ (в случае знака "$+$"), и $D^-(\varepsilon)$, содержащую $D(\varepsilon)$ в противном случае. По формуле Адамара [11, A3.3]

$$\mathrm{g}_{D^\pm(\varepsilon)}(z, \zeta) = \mathrm{g}_D(z, \zeta) \mp \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial \mathrm{g}(t, z)}{\partial n_t} \frac{\partial \mathrm{g}(t, \zeta)}{\partial n_t} c\varepsilon ds_t + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда

$$\mathrm{g}_\varepsilon(z, \zeta) = \mathrm{g}_D(z, \zeta) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \tag{4}$$

причем остаточный член $O(\varepsilon)$ допускает равномерную оценку для z и ζ, лежащих в фиксированной замкнутой подобласти D. Следовательно,

$$\log R_k(\varepsilon) = \log R_k + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \ k = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Подставляя (4) и (5) в (3), приходим к равенству

$$1 = (\lambda_k \log|z - z_k|)\Big[1 + \lambda_k \log R_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{\delta_j(\varepsilon)}{\delta_k(\varepsilon)} \lambda_j \mathrm{g}(z_j, z_k) + O(\varepsilon^2)\Big] -$$

$$- \lambda_k \log R_k - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{\delta_j(\varepsilon)}{\delta_k(\varepsilon)} \lambda_j \mathrm{g}(z_k, z_j) + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0.$$

После простых вычислений получаем

$$\lambda_k \log|z - z_k| = 1 + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, на границе множества $\mathscr{E}_k(\varepsilon)$ справедливо асимптотическое равенство (1). Поэтому при нахождении формулы для емкости конденсатора $C(\varepsilon)$ достаточно ограничиться пластинами $\mathscr{E}_k(\varepsilon)$ вместо $E_k(\varepsilon), k=1,\ldots,n$.

Пусть $\rho>0$ настолько мало, что круги $\{z: |z-z_k| \leqslant \rho\}$ принадлежат соответственно пластинам $\mathscr{E}_k(\varepsilon), k=1,\ldots,n$. По принципу Дирихле

$$\operatorname{cap} C(\varepsilon) = I(\mathrm{g}, D(\varepsilon) \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \mathscr{E}_k(\varepsilon)) = -\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\partial \mathscr{E}_k(\varepsilon)} \delta_k(\varepsilon) \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial n} \, ds =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) \int\limits_{|z-z_k|=\rho} \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial n} ds = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) \sum_{l=1}^{n} \delta_l(\varepsilon) \beta_{kl} + o(1), \quad \rho \to 0.$$

Здесь дифференцирование производится по внешней нормали к границе множеств $\mathscr{E}_k(\varepsilon)$ и $\{z: |z - z_k| \leqslant \rho\}, k=1,\ldots,n$. Подставив сюда значения β_{kl} с учетом (4), (5) и того факта, что емкость конденсатора не зависит от ρ, получим

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname{cap} C(\varepsilon) = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_k^2(\varepsilon)[1 + \lambda_k \log R_k(\varepsilon)] - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \lambda_k \lambda_l \delta_k(\varepsilon) \delta_l(\varepsilon) \mathrm{g}_\varepsilon(z_k, z_l) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \big[-\varepsilon/\nu_k - (\varepsilon^2 \log \mu_k)/\nu_k^2 + o(\varepsilon^2)\big] \big[\delta_k^2 - 2\alpha_k \delta_k \varepsilon + o(\varepsilon)\big]\big[1 - (\varepsilon/\nu_k) \log R_k + O\big(\varepsilon^2\big)\big] -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \big[-\varepsilon/\nu_k + O\big(\varepsilon^2\big)\big] \big[-\varepsilon/\nu_l + O\big(\varepsilon^2\big)\big] [\delta_k - \alpha_k \varepsilon + o(\varepsilon)][\delta_l - \alpha_l \varepsilon + o(\varepsilon)] \, \mathrm{g}(z_k, z_l) + O\big(\varepsilon^2\big) =$$

$$= \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{\nu_k} - \varepsilon^2 \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[2\frac{\alpha_k \delta_k}{\nu_k} + \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{R_k}{\mu_k} \right] + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} \mathrm{g}(z_k, z_l) + o\left(\varepsilon^2\right) \right\}, \quad \varepsilon \to 0.$$

Теорема 1 доказана. □

В связи с полученными результатом возникает естественный вопрос об асимптотике емкости конденсатора $C(\varepsilon)$ при иной скорости стягивания пластин $E_k(\varepsilon)$ к точкам $z_k, \varepsilon \to 0, k=1,\dots,n$ (отличной от (1)).

Список литературы

[1] Г. Полиа, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, Физматлит, М., 1962.

[2] L. V. Ahlfors, A. Beurling, “Conformal invariants and function-theoretic null-sets”, *Acta math.*, **83**:1/2 (1950), 101–129.

[3] В. К. Хейман, *Многолистные функции*, Изд-во иностр. лит., М., 1960.

[4] Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, Изд-во иностр. лит., М., 1962.

[5] В. Г. Кузьмина, “Методы геометрической теории функций. II”, *Алгебра и анализ*, **9**:5 (1997), 1–50.

[6] А. Ю. Солынин, “Модули и экстремально-метрические проблемы”, *Алгебра и анализ*, **11**:1 (1999), 3–86.

[7] В. Н. Дубинин, “Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения”, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **237** (1997), 56–73.

[8] V. N. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.

[9] V. N. Dubinin, M. Vuorinen, “Robin functions and distortion theorems for regular mappings”, *Math. Nachr.*, **283**:11 (2010), 1589–1602.

[10] В. Н. Дубинин, “Асимптотика емкости конденсатора с переменными уровнями потенциала”, *Сиб. матем. журн.*, **61**:4 (2020), 796–802.

[11] M. Schiffer, “Some recent developments in the theory of conformal mapping”, *Appendix to: R. Courant, Dirichlet’s principle, conformal mapping, and minimal surfaces*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1950, 249–323.

Поступила в редакцию
18 апреля 2022

Исследование выполнено в рамках НИОКТР № АААА-А20-120112690042-0 при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00018).

Dubinin V.N.[1], *Kim V.Yu.*[2] On the condensers with variable plates, potential levels and domain of definition. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2022. V. 22. No 1. P. 55–60.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences
[2] Far Eastern Federal University, Russia

ABSTRACT

The asymptotic formula is obtained for the capacity of a generalized condenser when parts of its plates contract to prescribed points. We consider condenser with variable potential levels and a set of definition that tends to a predetermined domain.

Key words: *asymptotic formula, conformal capacity, condenser, Green's function.*

References

[1] G. Polia, G. Sege, *Izoperimetricheskie neravenstva v matematicheskoi fizike*, Fizmatlit, M., 1962.

[2] L. V. Ahlfors, A. Beurling, "Conformal invariants and function-theoretic null-sets", *Acta math.*, **83**:1/2 (1950), 101–129.

[3] V. K. Kheiman, *Mnogolistnye funktsii*, Izd-vo inostr. lit., M., 1960.

[4] Dzh. Dzhenkins, *Odnolistnye funktsii i konformnye otobrazheniia*, Izd-vo inostr. lit., M., 1962.

[5] V. G. Kuz'mina, "Metody geometricheskoi teorii funktsii. II", *Algebra i analiz*, **9**:5 (1997), 1–50.

[6] A. Iu. Solynin, "Moduli i ekstremal'no-metricheskie problemy", *Algebra i analiz*, **11**:1 (1999), 3–86.

[7] V. N. Dubinin, "Asimptotika modulia vyrozhdaiushchegosia kondensatora i nekotorye ee primeneniia", *Zap. nauchn. sem. POMI*, **237** (1997), 56–73.

[8] V. N. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.

[9] V. N. Dubinin, M. Vuorinen, "Robin functions and distortion theorems for regular mappings", *Math. Nachr.*, **283**:11 (2010), 1589–1602.

[10] V. N. Dubinin, "Asimptotika emkosti kondensatora s peremennymi urovniami potentsiala", *Sib. matem. zhurn.*, **61**:4 (2020), 796–802.

[11] M. Schiffer, "Some recent developments in the theory of conformal mapping", *Appendix to: R. Courant, Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1950, 249–323.