Дальневосточный математический журнал. 2022. Т. 22. № 1. С. 61–75

УДК 517.957
MSC2020 80A22+35P35+35K05+46N20

© А. Г. Подгаев[1], В. Я. Прудников[1], Т. Д. Кулеш[1]

Глобальная разрешимость трёхмерной осесимметричной задачи Стефана для квазилинейного уравнения

Методами компактности доказываются результаты, относящиеся к обоснованию разрешимости задачи с неизвестной границей. Используются теоремы об относительной компактности, полученные в предыдущих публикациях и приспособленные к исследованию задач типа задачи Стефана с неизвестной границей.

Для рассматриваемого здесь уравнения ранее была изучена начально-краевая задача в нецилиндрической области с заданной криволинейной границей класса W_2^1 и задача, для которой в условии на неизвестной границе коэффициент скрытой удельной теплоты плавления (в отличие от задачи Стефана, рассматриваемой здесь) являлся неизвестной величиной. Поэтому в некоторых местах будут опущены выкладки, почти полностью совпадающие с изложенными в указанных ниже работах. Методика может быть применена в значительно более общих ситуациях, включая большее число границ фазового перехода и замену оценки второй производной решения на оценку некоторого агрегата, встречающегося в квазилинейных уравнениях.

В итоге установлена регулярная разрешимость однофазной осесимметричной задачи Стефана для квазилинейного трехмерного параболического уравнения с неизвестной границей класса W_4^1, причем в целом по времени. Уравнение описывает процессы фазовых переходов вещества из одного состояния в другое. Граница фазового перехода неизвестна и определяется вместе с решением.

Ключевые слова: *задача Стефана, относительная компактность, нецилиндрическая область, неизвестная граница.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202206

Введение

Основное отличие задач с подвижными (неизвестными) границами от обычных начально-краевых задач состоит в том, что с течением времени меняется и об-

[1] Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
Электронная почта: `000210@pnu.edu.ru`, `pvu1707@mail.ru` (А. Г. Подгаев), `000211@pnu.edu.ru` (В. Я. Прудников), `2015302323@pnu.edu.ru` (Т. Д. Кулеш).

ласть, где протекает описываемый уравнением процесс. Это приводит к существенной нелинейности задачи, даже если уравнение остается линейным.

Некоторые результаты и обзоры современного состояния этого типа задач изложены в работах [1–8]. Имеются также классические работы А. Фридмана, Л. Рубинштейна, А. М. Мейрманова.

Наиболее распространенный подход (см., например, работы А. М. Мейрманова) к исследованию задач с неизвестной границей состоит в том, чтобы, используя растяжение переменных, задачу в неизвестной области свести к начально-краевой задаче для параболического уравнения в известной цилиндрической области, но с неизвестными коэффициентами в уравнении. Эти коэффициенты находят по дополнительному краевому условию. Но чтобы их найти, необходимо построить некоторый нелинейный оператор, неподвижные точки которого определяют решение исходной задачи. Этот подход приводит к некоторым требованиям малости (обычно промежутка времени) и более жестким требованиям (по сравнению с предлагаемым в работе) на гладкость искомой границы.

Другой подход, основанный на введенном С. Л. Каменомостской и О. А. Олейник понятии обобщенного решения задачи Стефана, оказался эффективным при рассмотрении многомерных задач. А Г. Дюво предложил способ сведения задачи Стефана к вариационному неравенству. Однако оба эти подхода, обладая большой общностью, теряют значительную часть сведений: не остается никакой информации о структуре раздела фаз, о принадлежности неизвестной границы какому-либо классу и о том, в каком смысле удовлетворяется условие Стефана.

Предлагаемый в работе подход гарантирует принадлежность границы классу типа W_p^1, а также, используя численные расчеты, может дать в явном виде информацию о границе фазового перехода. Предложенный метод позволяет рассматривать условие Стефана на неизвестной границе с величиной L значительно более общего вида. Так, можно рассматривать случаи (в наших обозначениях) функций вида $L(r,t)$, $L(r(t))$ или $L(r(t),r'(t))$. Два последних случая рассмотрены, например, в [3] для одномерного линейного уравнения теплопроводности. Значительная библиография и обзор работ по задачам с подвижной границей имеется также в [8].

Основная цель исследования —- доказать глобальную разрешимость задачи Стефана для указанного нелинейного уравнения с неизвестной непрерывной границей.

Приведенный итерационный процесс, аналогичный построенному в [9] для другой задачи, позволяет на каждом шаге определять как температуру в каждой точке, так и область, заполненную растаявшим веществом. Процесс дает возможность получить равномерные оценки как на функции, описывающие неизвестную границу, так и на последовательность построенных приближений к решению уравнения. Его можно использовать и при моделировании, и при численных расчётах. Один из шагов процесса требует развития методов исследования нестационарных задач в нецилиндрической области. Этот вопрос решался в ряде старых исследований, но интерес к нему в связи с новыми идеями и целями возникает и сейчас постоянно. В частности, будем использовать результаты работы [9] по разрешимости краевой задачи в заданной нецилиндрической области. При обосновании существования предела у построенных приближенных решений используем «привязанные» к специфике задач с неизвестной границей результаты компактности из работы [10] для семейств функций, не имеющих, как в стандартных теоремах компактности, достаточного запаса производных.

1. Постановка задачи

Рассматривается трёхмерная задача с неизвестной границей для нелинейного уравнения теплопроводности

$$c_t = \varphi(c)\Delta c = div(\varphi(c)\nabla c) - \varphi'(c)|\nabla c|^2 \tag{1}$$

в шаровом слое $1<|x|<r(t)$, где $r(t)$ — неизвестная функция, подлежащая определению вместе с решением $c(x,t)$ уравнения (1).

Уравнение (1) дополняется начальным условием

$$c(x,0) = c_0(x) \geqslant 0, \qquad 1 \leqslant |x| \leqslant 2. \tag{2}$$

На известной неподвижной части границы $|x|=1$ в каждый момент времени задаётся поток тепла, для простоты берем случай его отсутствия:

$$\frac{\partial \Phi(c)}{\partial n} = \sum_{i=1}^{3} \varphi(c) c_{x_i} n_i = 0 \quad \text{при} \quad |x| = 1,\ t > 0, \tag{3}$$

где $\Phi(\eta)=\int\limits_0^\eta \varphi(\xi)d\xi$ — первообразная для φ. На неизвестной границе фазового перехода задаётся постоянная температура плавления вещества, которую считаем равной нулю:

$$c = 0 \quad \text{при} \quad |x| = r(t),\ \ t > 0, \tag{4}$$

а также условие Стефана

$$\varphi(c)\nabla_x c \nabla_x h = L h'_t \quad \text{при} \quad |x| = r(t),\ \ t > 0, \tag{5}$$

где $h(x,t)=0$ есть уравнение неизвестной границы, причём $h<0$ соответствует внутренности области. Условие (5), если уравнение границы имеет вид $h(x,t)=\tilde{h}(x)-t=0$, можно записать в виде

$$\varphi(c)\nabla_x c \nabla_x \tilde{h} = -L \quad \text{при} \quad |x| = r(t), \quad t > 0.$$

В условии (5) L — постоянная, показывающая, какое минимальное количество теплоты необходимо для того, чтобы перевести единицу массы вещества из твёрдого состояния в жидкое при неизменной температуре, равной температуре плавления. Однако предложенный в работе метод исследования позволяет практически без изменений установить те же утверждения и для случая зависимости L от r и t при условии её измеримости и ограниченности сверху и снизу в области $(1,\infty)\times(0,T)$.

Если считать начальное распределение температуры центрально симметричным, то есть $c_0(x)=c_1(|x|)$, то, исходя из физики процесса, можно ожидать, что и решение задачи при t $>$ 0 будет таким же. Поэтому в граничных условиях сразу предполагается эта симметрия. Далее мы увидим, что это ожидание оправданно.

Итак, будем искать решение задачи (1)–(5) в виде функции $c(x,t)=u(r,t)$, где $r=|\,x\,|$ — евклидово расстояние. В этом случае поток можно записать как

$$\frac{\partial\Phi(c)}{\partial n}=\varphi(c)\frac{\partial c}{\partial n}=\varphi(u)u_r.$$

Условие Стефана (5) при выборе $h(x,t)=|x|-r(t)$ примет вид

$$\varphi(u)u_r(r,t)=\,-\,Lr'(t) \text{ при } r=r(t).$$

Таким образом, уравнение, которое далее будем рассматривать на промежутке $(0,T)$, в случае трёх пространственных переменных преобразуется к виду

$$u_t=\,(\Phi(u))''_{rr}-\varphi'(u)(u'_r)^2+\frac{2}{r}\varphi(u)u'_r,\quad 1<r<r(t),\ t\in(0,T), \tag{6}$$

а начально-краевые условия для нахождения решения $c(x,t)=u(r,t)$ и границы раздела фаз — к виду

$$u(r,0)=u_0(r),\quad 1\leqslant r\leqslant 2,\quad u_0(2)=0, \tag{7}$$

$$(\Phi(u))'_r\,=0\quad\text{при}\quad r=1,\ t\in(0,T), \tag{8}$$

$$u=0\quad\text{при}\quad r=r(t),\ t\in[0,T],\quad r(0)=2, \tag{9}$$

$$(\Phi(u))'_r\,=\,-\,Lr'(t)\quad\text{при}\quad r=r(t),\ t\in(0,T). \tag{10}$$

В работе будем предполагать, что функция $\varphi'(\xi)$ непрерывна для всех ξ, а также что

$$\varphi(\xi)\geqslant\delta>0,\quad \xi\varphi'(\xi)\geqslant 0.$$

Введём нецилиндрическую область $Q_t=\{(r,\tau):1<r<r(\tau),\,\tau\in(0,t)\}$. При предположении, что $u_0(r)\geqslant 0$, $u_0\in W_2^1$, будет видно, что функция $r(t)$ не убывает, что $r(t)\in W_4^1(0,T)$ и, следовательно, непрерывна по Гёльдеру.

Используя (9), запишем уравнение (10) в виде

$$Lr'(t)=\,-\,\varphi(0)u_r(r(t),t),\quad t\in(0,T).$$

Интегрируя, выведем важное для дальнейшего интегральное соотношение

$$L(r(t)-2)=\,-\,\varphi(0)\int\limits_0^t u_r(r(\tau,\tau)d\tau,\quad t\in[0,T]. \tag{11}$$

Задачи (6)–(10) и (6)–(9), (11) эквивалентны.

2. Построение итерационного процесса. Оценки и свойства приближений

На основании соотношения (11) определим, начиная с $r^0(t)=t+2$, итерационный процесс:

$$L(r^{n+1}(t)-2) = -\varphi(0)\int\limits_0^t u_r^n(r^n(\tau),\tau)d\tau, \quad n=0,1,2,3,\dots. \tag{12}$$

Функция $u^n(r,t)$ строится по $r^n(t)$ как решение следующей краевой задачи в заданной нецилиндрической области $Q_T^n=\{(r,t): 1<r<r^n(t),\, t\in(0,T)\}$:

$$u_t^n = (\Phi(u^n))''_{rr} - \varphi'(u^n)(u_r^n)^2 + \frac{2}{r}\varphi(u^n)u_r^n, \quad 1<r<r^n(t),\ t\in(0,T), \tag{13}$$
$$u^n(r,0)=u_0(r), \quad 1\leqslant r\leqslant 2,\ u_0\geqslant 0,\ u_0(2)=0,$$
$$(\Phi(u^n))'_r = 0 \text{ при } r=1,\ t\in(0,T), \qquad u^n=0 \text{ при } r=r^n(t),\ t\in(0,T)$$

по известной правой границе $r=r^n(t)$ такой, что выполнены условия $r^n(t)\in W_2^1(0,T)$, $\frac{d}{dt}r^n(t)\geqslant 0$, $r^n(0)=2$.

В [9] установлена следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для заданной $\varphi\in C^1(R)$ существуют $\delta, p_1, c_1, c_2, c_3$ такие, что*

$$\varphi(u)\geqslant\delta>0,\ u\varphi'(u)\geqslant 0, \tag{14}$$
$$\varphi_1(u)\leqslant c_1|\psi(u)|^{p_1}+c_2u^2+c_3, \quad 1\leqslant p_1<2, \tag{15}$$

где

$$\varphi_1(u)=\int\limits_0^u \eta\varphi(\eta)d\eta\ (\geqslant\frac{\delta}{2}u^2), \quad \psi(u)=\int\limits_0^u\sqrt{\varphi(\eta)+\eta\varphi'(\eta)}d\eta.$$

Тогда для любой $u_0(r)\in W_2^1(1,2)$ с условием $u_0(2)=0$ задача (13) с заданной $r^n(t)\in W_2^1(0,T)$ такой, что $\frac{dr^n(t)}{dt}\geqslant 0$, $r^n(0)=2$ имеет решение $u_n(r,t)$ из класса

$$\int\limits_1^{r^n(t)} u_n^2dr + \int\limits_0^t\int\limits_1^{r^n(\tau)}\left|\frac{\partial}{\partial r}\psi(u_n)\right|^2 drd\tau + \int\limits_0^t\varphi_1(u_n(1,\tau))d\tau\leqslant c, \tag{16}$$

$$\int\limits_1^{r^n(t)} u_{nr}^2dr + \int\limits_0^t u_{nr}^2(r^n(\tau),\tau)\frac{dr^n}{d\tau}(\tau)d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_1^{r^n(\tau)} u_{nrr}^2drd\tau\leqslant c, \tag{17}$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_1^{r^n(\tau)} u_{nt}^2drd\tau\leqslant c\left(\int\limits_0^T|\frac{dr^n(t)}{dt}|^2dt+1\right). \tag{18}$$

где c не зависит от n и $r^n(t)$.

Условия (14), (15) выполнены, например, для функций с условием $\delta \leqslant \varphi(u) \leqslant \alpha$. Так, функция $\varphi(u) = \alpha - \frac{\beta}{1+u^2}$, для которой $\beta \geqslant 0, \alpha \geqslant \delta + \beta$, и функция $\varphi(u) = \frac{\sin 2u}{2u} + 1$ удовлетворяют этим условиям с $c_2 \geqslant \frac{\alpha}{2}$ для первой и с $c_2 \geqslant \frac{1}{2}$ для второй.

В [9] также рассмотрен случай с $p_1 = 2$ в (15) и дополнительным ограничением на $\max r(t)$. Примером неограниченной функции, удовлетворяющей условиям (14) и (15) с $p_1 = 2$, является функция $\varphi(u) = (u^2+1)^s$, $s \geqslant 1$. Ниже мы вернемся и к случаю с $p_1 = 2$ в (15).

Интеграл $\int\limits_0^t u_{nr}^2(r^n(\tau),\tau)\frac{dr^n}{d\tau}(\tau)d\tau$ в (17) имеет смысл, так как величина $u_{nr}^4(r^n(\tau),\tau)$ интегрируема по τ:

$$u_{nr}^4\big(r^n(\tau),\tau\big) = \left(\int\limits_1^{r^n(\tau)} \frac{\partial}{\partial r}(u_{nr}^2)dr\right)^2 = 4\left(\int\limits_1^{r^n(\tau)} u_{nr}u_{nrr}dr\right)^2 \leqslant 4\int\limits_1^{r^n(\tau)} u_{nr}^2 dr \int\limits_1^{r^n(\tau)} u_{nrr}^2 dr \leqslant 4c\int\limits_1^{r^n(\tau)} u_{nrr}^2 dr,$$

и поэтому

$$\int\limits_0^t u_{nr}^4(r^n(\tau),\tau)d\tau \leqslant 4c^2. \tag{19}$$

Из (17) следует также равномерная ограниченность:

$$u_n^2(r,t) = -\int\limits_r^{r^n(t)} \frac{\partial}{\partial r}(u_n)^2 dr \leqslant 2\left(\int\limits_1^{r^n(t)} u_n^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_1^{r^n(t)} u_{nr}^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2c$$

Теперь вернемся к итерационному процессу и выведем равномерные по n оценки, связанные с искомой криволинейной частью границы. Из (12) и (19) получаем

$$\begin{gathered}\left|r^{n+1}(t)\right| = \left|2 - \frac{\varphi(0)}{L}\int\limits_0^t u_{nr}(r^n(\tau),\tau)d\tau\right| \leqslant \\ \leqslant 2 + \frac{\varphi(0)}{L}\left(\int\limits_0^t |u_{nr}(r^n(\tau),\tau)|^4 d\tau\right)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{3}{4}} \leqslant 2 + \frac{4\varphi(0)c^2}{L}T^{\frac{3}{4}}.\end{gathered} \tag{20}$$

Дифференцируя (12), из (19) выводим

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}r^{n+1}(t) = -\frac{\varphi(0)}{L}u_{nr}(r^n(t),t), \\ \int\limits_0^T \left|\frac{d}{dt}r^{n+1}(t)\right|^4 dt = \left(\frac{\varphi(0)}{L}\right)^4 \int\limits_0^T |u_{nr}(r^n(t),t)|^4 dt \leqslant 4c^2(\frac{\varphi(0)}{L})^4.\end{gathered} \tag{21}$$

Таким образом, выведена равномерная по n оценка

$$\| r^{n+1}(t) \|_{W_4^1(0,T)} \leqslant \tilde{c},$$

где $\tilde{c}$ зависит от $\varphi(0), L, \| u_0 \|_{W_2^1(1,2)}, T$, входных констант и не зависит от n.

Оценка (18) не дает в явном виде равномерную оценку u_{nt} для задачи (14) с заданной $r^n(t) \in W_2^1(0,T)$. Но поскольку уравнение для u_{nt} можно записать в виде

$$u_{nt} = \varphi(u_n)(u_{nrr} + \frac{2}{r}u_{nr}),$$

то теперь равномерная оценка u_{nt} будет следовать из равномерной ограниченности u_n, непрерывности φ и оценок в L_2 величин в скобке.

По лемме 1 из [9] для нецилиндрических областей

$$W_2^1(Q_T) \cap L_\infty(0,T; W_2^1(1,r(t)) \subset C_{t,r}^{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(\bar{Q}_T)$$

получаем равномерную ограниченность u_n в норме $C_{t,r}^{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(\bar{Q}_T)$.

Из этого результата и полученных равномерных оценок следует, что все функции u_n непрерывны по Гельдеру, их норма в пространстве $C_{t,x}^{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(\bar{Q_T})$ равномерно ограничена.

Далее для итерационного процесса будет установлено что для всех n выполнены неравенства: $\frac{dr^n(t)}{dt} \geqslant 0$ для почти всех $t \in (0,T)$.

3. Принцип максимума, монотонность границы

Для удобства в этой лемме у функций u_n, r^n опустим индекс n и обозначим $\ell = r(T)$.

Лемма 1. *При* $u_0(r) \geqslant 0$, $u_0 \in W_2^1(1,2)$, $u_0(2) = 0$ *решение* $u(r,t)$ *задачи* (13) *для заданной функции* $r(t) \in W_2^1(0,T)$ *такой, что* $\frac{dr(t)}{dt} \geqslant 0$, $\quad r(0) = 2$, *неотрицательно в* $Q_T = \{(r,t) : 1 < r < r(t),\ t \in (0,T)\}$.

Доказательство. Перепишем уравнение для $u(r,t)$ из (14) в виде

$$\frac{u_t}{\varphi(u)} = (u_{rr} + \frac{2}{r}u_r). \tag{22}$$

Введем функцию

$$\tilde{\theta}(r) = \begin{cases} \theta(r), \text{ при } 2 \leqslant r \leqslant \ell; \\ 0, \text{ при } 1 \leqslant r \leqslant 2. \end{cases}$$

где $t = \theta(r)$ — «обратная» к функции $r = r(t)$, определенная на промежутке $[2, \ell]$ равенством $\theta(r) = \max\{t : t \in [0,T], r(t) = r\}$. В силу непрерывности $r(t)$ при каждом r найдется максимальное t, для которого $r = r(t)$.

Рассмотрим срезку $\bar{u}(r,t) = \min(u(r,t), 0)$. Имеем для почти всех t [11, лемма 7.6] $\bar{u}(r,t), \bar{u}_r(r,t) \in L_2(1, r(t))$ и $u = \bar{u}, u_r = \bar{u}_r$ на множествах

$$E_t^- = \{r \in (1, r(t)) : u < 0\} = \{r \in (1, r(t)) : \bar{u} < 0\}.$$

По той же лемме $\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = 0$ на множествах $\{r \in (1, r(t)) : u \geqslant 0\}$. А также, для почти всех $r \in (1, \ell)$ функция $u(r,t)$ имеет обобщенную производную по t из $L_2(\tilde{\theta}(r), T)$, $u = \bar{u}, \bar{u}_t = u_t$ на множествах $E_r^- = \{t \in (\tilde{\theta}(r), T) : u < 0\}$ и $\bar{u}_t \in L_2(\tilde{\theta}(r), T)$. Кроме того, $\bar{u}_t = 0$ на множествах $E_r^+ = \{t \in (\tilde{\theta}(r), T) : u \geqslant 0\}$.

Умножая (22) скалярно в $L_2(Q_T)$ на функции $rf^t(r,\tau)$ такие, что $f^t(r(\tau),\tau)=0$, $f^t_r\in L_2(Q_T)$, $f^t(r,\tau)=0$ при $\tau\geqslant t$, получим тождество

$$\int\limits_1^\ell r\left(\int\limits_{\tilde\theta(r)}^t \frac{u_t}{\varphi(u)} f^t(r,\tau)d\tau\right)dr+\int\limits_0^t\left(\int\limits_1^{r(\tau)} ru_r f^t_r(r,\tau)dr\right)d\tau-\int\limits_0^t\left(\int\limits_1^{r(\tau)} u_r f^t(r,\tau)dr\right)d\tau=0.$$

Взяв в качестве пробной такую функцию $f^t(r,\tau)$, что $f^t(r,\tau)=\bar u(r,\tau)$ при $\tau<t$ и $f^t(r,\tau)=0$ при $\tau\geqslant t$, получим в первом члене тождества

$$\int\limits_1^\ell r\left(\int\limits_{\tilde\theta(r)}^t \frac{u_t\bar u}{\varphi(u)}d\tau\right)dr=\int\limits_1^\ell r\left(\int\limits_{E_r^-} \frac{\bar u_t\bar u}{\varphi(\bar u)}d\tau\right)dr=\int\limits_1^\ell r\left(\int\limits_{\tilde\theta(r)}^t \frac{\bar u_t\bar u}{\varphi(\bar u)}d\tau\right)dr=$$

$$=\int\limits_1^\ell r\left(\int\limits_{\tilde\theta(r)}^t (\Phi_1(\bar u))_t d\tau\right)dr=\int\limits_1^\ell r\big(\Phi_1(\bar u(r,t)\big)dr.$$

В последнем равенстве использовано представление $\int\limits_1^\ell=\int\limits_1^2+\int\limits_2^\ell$, и равенства $\tilde\theta(r)=0$ при $1\leqslant r\leqslant 2$, $\bar u(r,\theta(r))=0$ при $2\leqslant r\leqslant\ell$, $\Phi_1(\bar u(r,0))=0$. Последнее следует из предположения, что $u_0(r)\geqslant 0$, а $\Phi_1(u)=\int\limits_0^u\frac{\xi}{\varphi(\xi)}d\xi$.

Для остальных слагаемых тождества получим

$$\int\limits_0^t\left(\int\limits_1^{r(\tau)} ru_r\bar u_r\,dr\right)d\tau-\int\limits_0^t\left(\int\limits_1^{r(\tau)} u_r\bar u\,dr\right)d\tau=I-\frac12\int\limits_0^t\left(\int\limits_1^{r(\tau)}(\bar u^2)_r\,dr\right)d\tau=$$

$$=I-\frac12\int\limits_0^t\big(\bar u^2(r(\tau),\tau)-\bar u^2(1,\tau)\big)\,d\tau=I+\frac12\int\limits_0^t\bar u^2(1,\tau)d\tau\geqslant 0,\ \text{где } I=\int\limits_0^t\left(\int\limits_1^{r(\tau)} r(\bar u_r)^2dr\right)d\tau.$$

Поэтому $\int\limits_1^\ell r\Phi_1(\bar u(r,t))dr=0$, а так как $\Phi_1(u)\geqslant 0$ и $\Phi_1(u)=0$ тогда и только тогда, когда $u=0$, то $\bar u(r,t)=0$ почти всюду и, следовательно, $u(r,t)\geqslant 0$. Лемма доказана. □

Вернемся к итерационному процессу и обоснуем монотонность r^{n+1}, построенной по предыдущим r^n и u_n.

Лемма 2. *При $u_0(r)\geqslant 0$, $L>0$ выполнены неравенства $\frac{d}{dt}r^{n+1}(t)\geqslant 0$, включения $r^{n+1}(t)\in W^1_4(0,T)$, а нормы $\|r^{n+1}(t)\|_{W^1_4(0,T)}$ равномерно по n ограничены.*

Так как $\frac{d}{dt}r^n(t)\geqslant 0$, Лемма 1 дает, что $u^n\geqslant 0$. Поэтому из условия $u^n(r^n(t),t)=0$ выводим, что $u^n_r(r(t),t)\leqslant 0$. Из первого равенства в (21) заключаем, что $\frac{d}{dt}r^{n+1}(t)\geqslant 0$. След $u_{nr}(r,t)$ при $r=r^n(t)$ существует в силу непрерывности $r^n(t)$ и оценки u^n_{rr} в L_2. Остальные утверждения установлены выше.

4. Предельный переход. Основной результат

Зададим последовательность неубывающих функций $\{r^n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $t\in[0,T]$ такую, что $1\leqslant r^n(t)\leqslant \ell$, $r^n(t)\to r(t)$ для всех $t\in[0,T]$. Здесь $\ell=\sup\{r^n(T):\ \ n=1,2,...\}$. Заметим, что в силу первого неравенства в (20) величина ℓ конечна. По функциям $w_n(r,t)$, определенным на нецилиндрических областях $\{(r,t): t\in[0,T], 1\leqslant r\leqslant r^n(t)\}$, построим множество F функций $\widetilde{W}_n(r,t)$, определенных на цилиндре $Q^\ell=\{(r,t): 1\leqslant r\leqslant \ell, t\in[0,T]\}$:

$$F=\left\{\widetilde{W}_n(r,t):\ \widetilde{W}_n(r,t)=\begin{cases} w^n, & 1\leqslant r<r^n(t);\\ 0, & r^n(t)\leqslant r\leqslant \ell, \end{cases}\right\}$$

и будем считать, что для функций из F выполнены равномерные оценки

$$\|\widetilde{W}_n\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(1,\ell))}\leqslant c, \quad \|\widetilde{W}_{nt}\|_{L_2(Q^\ell)}\leqslant c, \int\limits_0^T\int\limits_1^{r^n(t)} w_{nrr}^2\,drdt\leqslant c.$$

Заметим, что в последнем неравенстве интегралы рассматриваются только слева от криволинейных границ.

В [10] установлена

Теорема 2. *Для всех $q_0: 1\leqslant q_0<2$ множество функций F относительно компактно в $L_{q_0}(0,T;W_{q_0}^1(1,\ell))$.*

Построенные по итерационному процессу в предыдущих разделах последовательности $r^n(t)$ и $u_n(r,t)$ (последнюю надо взять в качестве $w^n(r,t)$) удовлетворяют этой теореме. Это позволяет сделать предельный переход и получить решение задачи (6)–(10). Покажем это.

Каждое из уравнений для $u^n(r,t)$ выполнено в области, зависящей от n. Поэтому для перехода к пределу в уравнении в качестве пробной рассмотрим произвольную функцию $f\in L_2(0,T;W_2^1(1,\ell))$ и функцию

$$U^n(r,t)=\begin{cases} u^n(r,t), & \text{если } 1\leqslant r<r^n(t),\\ 0, & \text{если } r^n(t)\leqslant r\leqslant \ell. \end{cases}$$

В силу непрерывности $u^n(r,t)$ функции U^n непрерывны на $[1,\ell]\times[0,T]$, имеют для данного $t\in S_0\subseteq(0,T)$ при $r<r^n(t)$ и при $r>r^n(t)$ обобщенную производную по r. Здесь S_0 — множество полной меры. Поэтому U^n абсолютно непрерывна по r для $t\in S_0$ на промежутке $[1,\ell]$ и, следовательно, имеет обобщенную производную U_r^n, совпадающую с поточечной. Таким образом, для обобщенной производной имеем для всех $t\in S_0: U_r^n=u_r^n$ при $r<r^n(t)$; $U_r^n=0$ при $r\geqslant r^n(t)$.

Выше была определена функция $t=\theta^n(r)$ — «обратная» к функции $r=r^n(t)$ — равенством

$$\theta^n(r)=\max\{t: t\in[0,T],\ r=r^n(t)\}, \quad 2\leqslant r\leqslant r^n(T).$$

В области $(1,2)\times(0,T)$ имеем $U^n = u^n$. Пусть $r > 2$. Тогда определена функция $\theta^n(r)$. При $t > \theta^n(r)$ имеем $r < r^n(t)$. Поэтому

$$U^n(r,t) = \begin{cases} u^n(r,t), & \text{при } 1 \leqslant r < 2,\ t \in [0,T] \\ u^n(r,t), & \text{при } T \geqslant t \geqslant \theta^n(r),\ 2 \leqslant r \leqslant r^n(T), \\ 0, & \text{при } t < \theta^n(r),\ 2 \leqslant r \leqslant r^n(T), \\ 0, & \text{при } r^n(T) \leqslant r \leqslant \ell. \end{cases}$$

Из принадлежности u_t^n пространству $L_2(Q_T)$ следует, что непрерывная на $[1,\ell]\times\times[0,T]$ функция U^n при всех $r \in [1,\ell]$ абсолютно непрерывна по t и имеет при любом фиксированном $r \in S_1 \subseteq (1,\ell)$, $\mu_1(S_1) = \ell - 1$ обобщенную производную по t, совпадающую с поточечной. Поэтому для обобщенной производной

$$U_t^n(r,t) = \begin{cases} u_t^n(r,t), & \text{при } 1 \leqslant r < 2,\ t \in [0,T], \\ u_t^n(r,t), & \text{при } T \geqslant t \geqslant \theta^n(r),\ 2 \leqslant r \leqslant r^n(T), \\ 0, & \text{при } t < \theta^n(r),\ 2 \leqslant r \leqslant r^n(T), \\ 0, & \text{при } r^n(T) \leqslant r \leqslant \ell. \end{cases}$$

Для получения уравнения, которому удовлетворяет $U^n(r,t)$, умножим уравнение (13) для u^n на произвольную функцию $f(r,t) \in C(\bar{Q}^\ell)$, $\bar{Q}^\ell = [1,\ell]\times[0,T]$ такую, что $f_r \in L_2(\bar{Q}^\ell)$, проинтегрируем по $Q_T^n = \{(r,t) : 1 < r < r^n(t),\ t \in (0,T)\}$, и перебросим производную по r, используя первое равенство в (21):

$$\int\limits_{Q_T^n} u_t^n f drdt + \int\limits_{Q_T^n} (\Phi(u^n))_r f_r drdt + \int\limits_{Q_T^n} \varphi'(u^n)(u_r^n)^2 f drdt -$$
$$\int\limits_{Q_T^n} \frac{2}{r}\varphi(u^n)u_r^n f drdt + L\int\limits_0^T \frac{dr^{n+1}(t)}{dt} f(r^n(t),t)dt = 0.$$

Из полученных свойств U^n, следует, что

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T} U_t^n f drdt + \int\limits_{Q_T} (\Phi(U^n))_r f_r drdt + \int\limits_{Q_T} \varphi'(U^n)(U_r^n)^2 f drdt - \\ \int\limits_{Q_T} \frac{2}{r}\varphi(U^n)U_r^n f drdt + L\int\limits_0^T \frac{dr^{n+1}(t)}{dt} f(r^n(t),t)dt = 0\end{gathered} \tag{23}$$

для всех $f(r,t) \in C(\bar{Q}^\ell)$, таких, что $f_r \in L_2(Q^\ell)$. Кроме того, для U^n выполнены равномерные по n оценки (используем (16), (17) и равномерную оценку u_t^n)

$$\int\limits_1^\ell (U^n)^2 dr + \int\limits_{Q_T} \left|\frac{\partial\psi(U^n)}{\partial r}\right|^2 drdt + \int\limits_0^T \varphi_1(U^n(1,\tau))d\tau \leqslant c, \tag{24}$$

$$\int\limits_1^\ell (U_r^n(r,t))^2 dr \leqslant c, \quad \|U_t^n\|_{L_2(Q_T)} \leqslant c, \quad \|U^n\|_{C^{1/4}(\bar{Q}_T)} \leqslant c. \tag{25}$$

Последняя оценка — следствие вложения

$$W_2^1(Q^\ell) \cap L_\infty(0,T;W_2^1(1,\ell)) \subset C_{t,r}^{1/4,1/2}(\bar{Q}^\ell).$$

Однако оценку второй производной по r во всей области Q^ℓ от функции $\Phi(U^n)$ или от функции U^n мы, на основании вышеизложенного, получить не можем, так как функция $(\Phi(U^n))_r$ не является непрерывной при переходе через линию $r = r^n(t)$. Поэтому возникает трудность предельного перехода по n. Эту трудность позволяет преодолеть указанная выше теорема 2.

Действительно, в силу компактности вложения $C^\alpha(\bar{Q}^\ell) \subseteq C(\bar{Q}^\ell)$ можно считать, что некоторая подпоследовательность последовательности U^n сходится по норме $C(\bar{Q}^\ell)$ и поточечно в $\bar{Q}^\ell$ к некоторой непрерывной в $\bar{Q}^\ell$ функции U. Из непрерывности φ и φ' следует ограниченность величин $\varphi(U^n)$ и $\varphi'(U^n)$ и их поточечная сходимость к $\varphi(U)$ и $\varphi'(U)$ соответственно. Далее также считаем, что U^n сходится слабо в $W_2^1(Q^\ell)$ к U. Добавляя к (24), (25) оценку последнего слагаемого из (17)

$$\int_0^t \int_1^{r^n(\tau)} u_{nrr}^2 dr d\tau \leqslant c.$$

и используя теорему 2 компактности, из последовательности U_r^n можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся по норме $L_{q_0}(Q^\ell)$ к функции U_r . По лемме 3.1 из [12], выбирая еще одну подпоследовательность, получим сходимость U_r^n к U_r почти всюду в Q_ℓ. По лемме 3.2 [12], в силу ограниченности норм $\|\varphi(U^n)U_r^n\|_{L_2(Q^\ell)}$, $\|\varphi'(U^n)|U_r^n|^2\|_{L_2(Q^\ell)}$ снова, выделяя, если необходимо, еще одну подпоследовательность, перейдем к пределу во втором, третьем и четвертом слагаемом. Для перехода к пределу в последнем слагаемом нужно выделить из соответствующей подпоследовательности $r^{n+1}(t)$ подпоследовательность, сходящуюся в $C[0,T]$ и слабо в $L_2(0,T)$, и использовать непрерывность f.

В результате установлена теорема.

Теорема 3. *При указанных условиях на φ, $u_0(r)$ найдётся монотонно неубывающая функция $r(t)$, для которой $r(0) = 2$, $r(t) \in W_4^1(0,T)$, а также неотрицательная функция $u(r,t) \in C^{1/4}(\bar{Q}_T)$, для которой*

$$u(r,t), u_r(r,t) \in L_\infty\big(0,T;L_2(1,r(t))\big), \quad u_{rr},\ u_t \in L_2\big(0,T;L_2(1,r(t))\big),$$

являющаяся решением задачи (6)–(10) *(соответственно найдется $c(x,t)$, являющаяся решением задачи* (1)–(5)*).*

Замечание. Оценка (16) была получена при предположении (15), которое в некоторых случаях ограничивает рост функции φ. Покажем, что при дополнительных условиях типа малости можно в предположении (15) допускать случай $p_1 = 2$.

Для этого зададим некоторое $\ell > 2$ и определим $r^{n+1}(t)$ итерационным процессом следующим образом:

$$r^{n+1}(t) = \left(2 - L\varphi(0)\int_0^t u_r^n(r^n(\tau),\tau)d\tau\right)_\ell^-,$$

где

$$(y)_\ell^- = \begin{cases} y, & \text{если } y < \ell, \\ \ell, & \text{если } y \geqslant \ell. \end{cases}$$

Все свойства “новой” $r^{n+1}(t)$, включая монотонность, равномерные оценки, остаются справедливыми, если заменить условие (15) на условие

$$\forall u \in R \quad \varphi_1(u) \leqslant c_1\psi^2(u) + c_2u^2 + c_3, \text{ где } 2c_1(\ell - 1 - \ln \ell) < 1, \tag{26}$$

Действительно, для функций $u^n(r,t)$, равных нулю при $r = r^n(t)$, выполнено неравенство

$$| \psi(u^n) |^2 \leqslant (r^n(t) - r) \int\limits_1^{r^n(t)} \left| \frac{\partial}{\partial r}\psi(u^n)\right|^2 dr. \tag{27}$$

Из (26), (27) вытекает

$$2\int\limits_1^{r^n(t)} \frac{\varphi_1(u^n)}{r^2} dr \leqslant 2c_1 \int\limits_1^{r^n(t)} \frac{r^n(t) - r}{r^2} dr \int\limits_1^{r^n(t)} \left| \frac{\partial}{\partial r}\psi(u^n)\right|^2 dr + 2c_2 \int\limits_1^{r^n(t)} | u^n |^2 dr + 2c_3(\ell - 1) \leqslant$$

$$\leqslant 2c_1(\ell - 1 - \ln \ell) \int\limits_1^{r^n(t)} \left| \frac{\partial}{\partial r}\psi(u^n)\right|^2 dr + 2c_2 \int\limits_1^{r^n(t)} u^{n2} dr + 2c_3(\ell - 1).$$

Здесь мы использовали тот факт, что функция $r - 1 - \ln r$ возрастает при $r > 1$ и что для каждой итерации $r^n(t) \leqslant \ell$. Из последней оценки, оценок (26), (27) и леммы Гронуолла получаем аналог оценки (16):

$$\int\limits_1^{r^n(t)} | u^n |^2 dr + \int\limits_0^t \int\limits_1^{r^n(\tau)} \left| \frac{\partial}{\partial r}\psi(u^n)\right|^2 dr d\tau + \int\limits_0^t \varphi_1(u^n(1,\tau)) d\tau \leqslant c, \tag{28}$$

из (27) и из (28) следует, что интеграл $\int\limits_0^t |\psi(u^n)| d\tau$ также равномерно ограничен. В остальном обоснование повторяет случай $p_1 < 2$.

Поэтому имеет место также следующая теорема.

Теорема 4. *Теорема 3 остаётся справедливой, если в её формулировке условие* (15) *замененить на условие* (26).

Список литературы

[1] А. М. Бородин, “Задача Стефана”, *Український математичний вісник*, **8** (2011), 17–54.

[2] А. М. Мейрманов, О. А. Гальцева, В. Е. Сельдемиров, “О существовании обобщенного решения в целом по времени одной задачи со свободной границей”, *Матем.заметки*, **107**:2 (2020), 229–240.

[3] J. Bollati, A. D. Tarzia, “One-phase Stefan problem with a latent heat depending on the position of the free boundary and its rate of change”, *Electronic Journal of Differential Equations*, **2018**:10 (2018), 1–12.

[4] В. Н. Белых, “Корректность одной нестационарной осесимметричной задачи гидродинамики со свободной поверхностью”, *Сибирский математический журнал*, **58**:4 (2017), 728–744.

[5] Ж. О. Тахиров, Р. Н. Тураев, “Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения”, *Вестн. Сам. гос.техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **28**:3 (2012), 8–16.

[6] J. Bollati,D. A. Tarzia, “Explicit solution for the one-phase Stefan problem with latent heat depending on the position and a convective boundary condition at the fixed face”, *Communications in Applied Analysis*, See http://arxiv.org/abs/1610.09338 2017.

[7] Ф. Ли, Д. Лу, “Распространение решений для уравнения диффузии реакции со свободными границами в периодической среде”, *Электрон. J. Дифференциальные уравнения*, 2018, № 185, 1–12.

[8] D. A. Tarzia, “A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems”, *MAT-Serie A*, 2000, No 2, 1–297.

[9] А. Г. Подгаев, “Разрешимость осесимметричной задачи для нелинейного параболического уравнения в областях с нецилиндрической или неизвестной границей. I”, *Челяб. физ.-матем. журнал*, **5**:1 (2020), 44–55.

[10] А. Г. Подгаев, “О теоремах компактности, связанных с задачами с неизвестной границей”, *Математические заметки СВФУ*, **28**:4 (2021), 71–89.

[11] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.

[12] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.

[13] A. M. Meirmanov, *The Stefan Problem*, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

Поступила в редакцию
10 марта 2022 г.

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение от 4 февраля 2022г. № 075-02-2022-879 по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

Podgaev A. G.[1], *Prudnikov V. Ya.*[1], *Kulesh T. D.*[1] Global three-dimensional solvability the axisimmetric Stefan problem for quasilinear equation. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2022. V. 22. No 1. P. 61–75.

[1] Pacific National University, Khabarovsk, Russia

ABSTRACT

We prove results related to the study of the solvability of a problem with an unknown boundary by compactness methods. Relative compactness theorems are used, which were obtained in previous publications, adapted to the study of problems like the Stefan problem with an unknown boundary.

In previous papers, for the equation considered here, we studied the initial-boundary problem in a non-cylindrical domain with a given curvilinear boundary of class W_2^1 and the problem for which, under the condition on the unknown boundary, the coefficient latent specific heat of fusion (in contrast to the Stefan problem, considered given here) was an unknown quantity.

Therefore, in some places calculations will be omitted that almost completely coincide with those set out in the works listed below. The proposed technique can be applied in more general situations: more phase transition boundaries, or more complex nonlinearities.

As a result, global over time, the regular solvability of a single-phase axisymmetric Stefan problem for a quasilinear three-dimensional parabolic equation with unknown boundary from the class W_4^1, is proved.

Key words: *Stefan problem, relative compactness, non-cylindrical domain, unknown boundary.*

References

[1] A. M. Borodin, “Zadacha Stefana”, *Ukraïns’kii matematichnii visnik*, **8** (2011), 17–54.

[2] A. M. Meirmanov, O. A. Gal’tseva, V. E. Sel’demirov, “O sushchestvovanii obobshchennogo resheniia v tselom po vremeni odnoi zadachi so svobodnoi granitsei”, *Matem.zametki*, **107**:2 (2020), 229–240.

[3] J. Bollati, A. D. Tarzia, “One-phase Stefan problem with a latent heat depending on the position of the free boundary and its rate of change”, *Electronic Journal of Differential Equations*, **2018**:10 (2018), 1–12.

[4] V. N. Belykh, “Korrektnost’ odnoi nestatsionarnoi osesimmetrichnoi zadachi gidrodinamiki so svobodnoi poverkhnost’iu”, *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, **58**:4 (2017), 728–744.

[5] Zh. O. Takhirov, R. N. Turaev, “Nelokal’naia zadacha Stefana dlia kvazilineinogo parabolicheskogo uravneniia”, *Vestn. Sam. gos.tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*, **28**:3 (2012), 8–16.

[6] J. Bollati,D. A. Tarzia, “Explicit solution for the one-phase Stefan problem with latent heat depending on the position and a convective boundary condition at the fixed face”, *Communications in Applied Analysis*, See http://arxiv.org/abs/1610.09338 2017.

[7] F. Li, D. Lu, “Rasprostranenie reshenii dlia uravneniia diffuzii reaktsii so svobodnymi

granitsami v periodicheskoi srede", *Elektron. J. Differentsial'nye uravneniia*, 2018, № 185, 1–12.

[8] D. A. Tarzia, "A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems", *MAT-Serie A*, 2000, No 2, 1–297.

[9] A. G. Podgaev, "Razreshimost' osesimmetrichnoi zadachi dlia nelineinogo parabolicheskogo uravneniia v oblastiakh s netsilindricheskoi ili neizvestnoi granitsei. I", *Cheliab. fiz.-matem. zhurnal*, **5**:1 (2020), 44–55.

[10] A. G. Podgaev, "O teoremakh kompaktnosti, sviazannykh s zadachami s neizvestnoi granitsei", *Matematicheskie zametki SVFU*, **28**:4 (2021), 71–89.

[11] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Ellipticheskie differentsial'nye uravneniia s chastnymi proizvodnymi vtorogo poriadka*, Nauka, M., 1989.

[12] O. A. Ladyzhenskaia, N. N. Ural'tseva, *Lineinye i kvazilineinye uravneniia ellipticheskogo tipa*, Nauka, M., 1973.

[13] A. M. Meirmanov, *The Stefan Problem*, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.