Дальневосточный математический журнал. 2022. Т. 22. № 1. С. 76–83

УДК 517.54
MSC2020 31B99

© Е. Г. Прилепкина[1]

О конформной емкости пространственного конденсатора с шаровыми пластинами

Рассматриваются конденсаторы с шаровыми пластинами, радиусы которых зависят от параметра r. Показано, что конформная емкость таких конденсаторов является мультипликативно выпуклой функцией от r. В качестве следствия установлено, что подобным свойством обладают некоторые связанные с емкостью специальные функции.

Ключевые слова: *конформная емкость, модуль семейства кривых, приведенный модуль, квазирегулярные отображения*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202207

1. Введение и формулировки результатов

В данной работе $\overline{\mathbf{R}}^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ означает n-мерное евклидово пространство, $n \geqslant 2$, состоящее из точек $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, $B(\mathbf{x}_0, t) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leqslant t\}$ — замкнутый шар с центром $\mathbf{x}_0$ радиусом t; $B(\infty, t) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : |\mathbf{x}| \geqslant 1/t\}$, w_{n-1} — площадь единичной гиперсферы. Стандартный базис в $\mathbf{R}^n$ будем обозначать через $\mathbf{e}_i$, $i = 1, ... n$. Конденсатором $C = (E, F, G)$ в области $G \subset \overline{\mathbf{R}}^n$ называется пара непустых замкнутых непересекающихся множеств $E \subset \overline{G}$, $F \subset \overline{G}$. В случае $G = \overline{\mathbf{R}}^n$ конденсатор будет обозначаться как пара $C = (E, F)$. Конформная емкость конденсатора обычно определяется при помощи инфимума интеграла Дирихле по классу допустимых функций [1]. Учитывая равенство емкости конденсатора и модуля семейства кривых, соединяющих его пластины [2], мы дадим модульное определение емкости. Напомним [3], что если Γ — семейство кривых в $\mathbf{R}^n$, то его n-*модулем* называется величина

$$M_n(\Gamma) = \inf \int\limits_{\mathbf{R}^n} \rho^n dx,$$

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: pril-elena@yandex.ru

где инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho:\mathbf{R}^n\to[0,\infty]$ таким, что неравенство $\int\limits_\gamma \rho ds\geqslant 1$ выполняется для каждой кривой $\gamma\in\Gamma$. Конформная емкость конденсатора $\mathrm{cap}_n C$ равна модулю $M_n(\Delta(E,F,G))$, где $\Delta(E,F,G)$ — семейство кривых, соединяющих E с F в области G. Из определения модуля следует, что можно ограничиться метриками, которые равны нулю вне замыкания области G.

В области G зафиксируем точки $\mathbf{x}_k\in G$ и выберем числа $\mu_k>0$, $\nu_k>0$, $k=1,\dots,m$. Обозначим через $C(r)=C(r;G,X,\Psi)$ конденсатор с пластинами $E=\partial G$, $F=\bigcup\limits_{k=1}^{m} B(\mathbf{x}_k,\mu_k r^{\nu_k})$, где $r>0$ достаточно мало для того, чтобы шары $B(\mathbf{x}_k,\mu_k r^{\nu_k})$ не пересекались и целиком лежали в G, $X=\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^m$, $\Psi=\{\mu_k r_k^\nu\}_{k=1}^m$. В зависимости от области G и выбранных X, Ψ в каждом конкретном случае несложно найти "естественную" область определения функции $f(r)=\mathrm{cap}_n C(r)$ — некоторый интервал $(0;d)$. А именно, пусть $r=\sigma_{ij}$ означает решение уравнения

$$\mu_i r^{\nu_i}+\mu_j r^{\nu_j}=\|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j\|.$$

Тогда

$$d=d(G,X,\Psi)=\min_{1\leqslant i\leqslant m}(\sigma_i,(d_i/\mu_i)^{1/\nu_i}),$$

где d_i — расстояние от точки $\mathbf{x}_i$ до границы ∂G, $\sigma_i=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m,\ j\neq i}\sigma_{ij}$. Конденсатор $C(r;G,X,\Psi)$ на плоскости использовался в работе [4] для определения приведенного модуля относительно совокупности точек. Используя лемму Греча и тот факт, что $cap_n(\partial B(0,r_1),\partial B(0,r_2))=w_{n-1}(\log(r_1/r_2))^{1-n}$, мы можем с очевидными поправками повторить в евклидовом пространстве рассуждение из [4]. В итоге получим, что при $r_2<r_1$ выполняется неравенство

$$cap_n C(r_2)^{1/(1-n)}+\nu\log(r_2)\geqslant cap_n C(r_1)^{1/(1-n)}+\nu\log(r_1),$$

$$\nu=\left(w_{n-1}\sum_{k=1}^{m}\nu_k^{1-n}\right)^{1/(1-n)}.$$

Этот факт гарантирует существование предела

$$M=\lim_{r\to 0}\left(cap_n C(r)^{1/(1-n)}+\nu\log(r)\right), \tag{1}$$

но не гарантирует, что $M\neq\infty$. Существуют формулы вычисления в терминах функции Грина предела (1) при $n=2$, $m\geqslant 1$ [4, Теорема 1] и при $n\geqslant 3$, $m=1$ [5]. В этих случаях предел (1) называется приведенным модулем. Понятие приведенного модуля относительно совокупности точек в случае $n\geqslant 3$, $m\geqslant 1$ было распространено нами в евклидово пространство для 2-емкости конденсатора (но не для конформной n-емкости) [6]. Пока остается открытым вопрос о конечности (1) для ограниченной области с гладкой границей при $n\geqslant 3$, $m\geqslant 2$. Таким образом появляется мотивация изучения $\mathrm{cap}_n C(r)$ как функции от r.

В теории квазирегулярных отображений шара важное значение имеет емкость кольца Греча [3, с. 88]. Кольцо Греча определяется как конденсатор $R_{G,n}(s)$ с пластинами $B(\mathbf{0},1)$ и $[s\mathbf{e}_1,\infty)$, $s>1$. Емкость кольца Греча обозначается $\gamma_n(s)$. Очевидно,

что
$$\gamma_n(s) = \mathrm{cap}_n C(r; \mathbf{R}^n \setminus [\mathbf{e}_1, \infty), \{\mathbf{0}\}, \{r\}), r = 1/s, r \in (0;1). \tag{2}$$

В [7, Теорема 1.21] показано, что функция
$$m_n(r) = \left(\frac{\gamma_n(1/r)}{w_{n-1}} \right)^{\frac{1}{1-n}}$$

удовлетворяет неравенству
$$m_n(a) + m_n(b) \leqslant 2m_n(\sqrt{ab}),\ a < 1\ , b < 1.$$

Иными словами, функция $m_n(e^x)$ вогнута на промежутке $(-\infty,0)$. Функции, удовлетворяющие данному свойству, называют мультипликативно вогнутыми. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Функция* $f(r) = \mathrm{cap}_n C(r)$ *мультипликативно выпукла на области определения* $(0, d)$, *то есть*
$$2\mathrm{cap}_n C(\sqrt{r_1 r_2}) \leqslant \mathrm{cap}_n C(r_1) + \mathrm{cap}_n C(r_2).$$

Непосредственно из Теоремы 1 и (2) вытекает, что $\gamma_n(s)$ мультипликативно выпукла. Напомним, что емкость кольца Греча связана с емкостью кольца Тейхмюллера $\tau_n(s) = \mathrm{cap}_n([-[\mathbf{e}_1, 0], [s\mathbf{e}_1, \infty)]))$ формулой
$$\gamma_n(s) = 2^{n-1}\tau_n(s^2 - 1).$$

Таким образом, мультипликативно выпуклой является и функция $\tau_n(s^2-1)$. При $n=2$ известно [3, c.66], что
$$\tau_2(t) = \frac{2\mathbf{K}(1/\sqrt{1+t})}{\mathbf{K}(\sqrt{t/(1+t)})}, \quad \gamma_2(s) = \frac{4\mathbf{K}(1/s)}{\mathbf{K}(\sqrt{1-s^{-2}})},$$

где $\mathbf{K}(x) = \int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-x^2u^2)}}$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Следовательно, мы получаем выпуклость на промежутке $-(\infty;0)$ функции
$$\varphi(x) = \frac{\mathbf{K}(e^x)}{\mathbf{K}(\sqrt{1-e^{2x}})}.$$

Наряду с емкостями колец Греча и Тейхмюллера γ_n, τ_n рассмотрим еще несколько специальных функций, применявшихся нами в предыдущих работах. Для фиксированных α, s, $0 < \alpha < \pi$, $r < s < 1$ определим
$$u_n(r) = \mathrm{cap}_n((l_\alpha, \partial K_r; K_r)), \tag{3}$$
$$v_n(r) = \mathrm{cap}_n([s\mathbf{e}_1, s^{-1}\mathbf{e}_1], \partial K_r; K_r)), \tag{4}$$

где $0 < r < 1$, $K(r) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : r < \|\mathbf{x}\| < 1/r\}$ — концентрическое кольцо, $l_\alpha = \{\mathbf{x} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n : |\varphi| \leqslant \alpha/2\}$ — дуга единичной окружности на плоскости

Oe_1e_2, соединяющая $\mathbf{x_1}=(\cos(\alpha/2),-\sin(\alpha/2),0,...,0)$ и $\mathbf{x_2}=(\cos(\alpha/2),\sin(\alpha/2),0,...,0)$. Функции $u_n(r)$, $v_n(r)$ используются [8] при исследовании квазирегулярных отображений, заданных в кольце $K(r)$. При $n=2$ формулы вычисления $u_2(r)$, $v_2(r)$ выглядят следующим образом [8, с. 240]:

$$u_2(r) = 2\tau_2\left(\frac{2(\zeta k+k+1)}{\zeta(1-k)}\right), \quad v_2(r) = 2\tau_2\left(\frac{(1+k)(1+\eta)}{(1-\eta)(1-k)}\right).$$

Здесь параметры k, ζ, η определяются из уравнений

$$q = \exp\left(\frac{4\pi^2}{\log r}\right), \quad k = \frac{4\sum\limits_{v=0}^{\infty} q^{(v+0.5)^2}}{1+2\sum\limits_{v=1}^{\infty} q^{v^2}}, \quad \int\limits_1^{1+\zeta}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = \alpha\frac{2\mathbf{K}(k)}{\log(1/r)},$$

$$\log s - 0.5\log r = \frac{\log(1/r)}{4\mathbf{K}(k)}\int\limits_0^{\eta}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Различные функционалы, зависящие от области G, (такие, как емкость, энергия, гармонический радиус), имеют большое количество приложений в геометрической теории функций. Представляет интерес информация о поведении этих функционалов при изменении границы области [9–11]. В [12] изучались свойства выпуклости p-гармонического радиуса кольцевого сектора как функции от угла раствора. Подобного сорта задачи связаны с оценками дискретной энергии Грина в круговом кольце [13, 14]. Сейчас при $p=n$ мы рассмотрим p-гармонический радиус кольцевого сектора как функцию от радиуса сектора. Понятие p-гармонического радиуса введено в работе [5]. Нам понадобится связь n-гармонического радиуса $R_n(G,\mathbf{a})$ области G в точке $\mathbf{a}\in G$ с емкостью конденсатора $C(\tau)=C(\tau;G,\{\mathbf{a}\},\{\tau\})$ [12, формула (6)]:

$$\operatorname{cap}_n C(\tau) = \left(\frac{w_{n-1}}{\log(1/\tau)}\right)^{n-1}\left(1-\log(R_n(G,\mathbf{a}))\frac{(n-1)}{\log(1/\tau)} + o\left(\frac{1}{\log(1/\tau)}\right)\right), \quad \tau\to 0. \quad (5)$$

Введем цилиндрические координаты $(\|\mathbf{x}\|,\theta,\mathbf{x}')$ точки $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$ в $\mathbf{R}^n$, связанные с декартовыми координатами соотношениями $x_1=\|\mathbf{x}\|\cos\theta$, $x_2=\|\mathbf{x}\|\sin\theta$, $\mathbf{x}'\in J$, где J — $(n-2)$-мерная плоскость $\{\mathbf{x}=(0,0,x_3,...,x_n)\}$. Для $0<\varphi\leqslant\pi$, $0\leqslant t<T\leqslant\infty$ обозначим кольцевой сектор $\{\mathbf{x}=(\|\mathbf{x}\|,\theta,\mathbf{x}'): t<\|\mathbf{x}\|<T, |\theta|<\varphi\}$ через $S(\varphi,t,T)$. Зафиксировав точку $\mathbf{a}\in S(\varphi,t,T)$ определим функции $q_n(r)$, $w_n(r)$:

$$q_n(r) = -\log(R_n(S(\varphi,r,T),\mathbf{a})),\ t<r<\|\mathbf{a}\|, \quad (6)$$

$$w_n(r) = -\log(R_n(S(\varphi,t,r),\mathbf{a})),\ \|\mathbf{a}\|<r<T. \quad (7)$$

Теорема 2. *Каждая из функций* (3), (4), (6), (7) *мультипликативно выпукла на области определения.*

Заметим, что согласно [5, Теорема 1] величины $-q_n(r)$ и $-w_n(r)$ совпадают с вычисленными в точке $\mathbf{a}$ приведенными модулями секторов $S(\varphi,r,T)$, $S(\varphi,t,r)$ соответственно. Таким образом, приведенный модуль кольцевого сектора в случае $p=n$ является мультипликативно вогнутой функцией от радиуса сектора.

2. Доказательства

Пусть $r_1 > r_2$. Примем обозначения $B_k^1 = B(\mathbf{x}_k, \mu_k r_1^{\nu_k})$, $B_k^2 = B(\mathbf{x}_k, \mu_k r_2^{\nu_k})$, $B_k^0 = B(\mathbf{x}_k, \mu_k (\sqrt{r_1 r_2}^{\nu_k}))$, $F_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{m} B_k^1$, $F_2 = \bigcup\limits_{k=1}^{m} B_k^2$, $F_0 = \bigcup\limits_{k=1}^{m} B_k^0$. Рассмотрим допустимые метрики ρ_1, ρ_2 для семейств кривых $\Delta(\partial G, F_1, G\setminus F_1)$, $\Delta(\partial G, F_2, G\setminus F_2)$ соответственно. Замкнутое ограниченное гиперсферами ∂B_k^1 и ∂B_k^0 кольцо обозначим V_k. На состоящем из непересекающихся колец множестве $V = \bigcup\limits_{k=1}^{m} V_k$ определим функцию

$$\rho_2^*(\mathbf{x}) = \rho_2(f_k(\mathbf{x}))|f_k'(\mathbf{x})|,\ \mathbf{x} \in V_k,$$

где $f_k(\mathbf{x})$ означает инверсию относительно гиперсферы ∂B_k^0. Вне множества V доопределим функцию ρ_2^* нулем. Построим метрику

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{\rho_1(\mathbf{x}) + \rho_2(\mathbf{x}) + \rho_2^*(\mathbf{x})}{2}.$$

Для каждой кривой γ из семейства $\Delta(\partial G, F_0, G\setminus F_0)$ найдется такое p, $1 \leqslant p \leqslant m$, что γ соединяет ∂G и гиперсферу ∂B_p^0. Из геометрических соображений ясно, что тогда γ содержит некоторую кривую γ^+, соединяющую гиперсферы ∂B_p^0 и ∂B_p^1 по кольцу $B_p^1 \setminus B_p^0$ (либо $B_p^0 \setminus B_p^1$ в случае $\mathbf{x}_p = \infty$.) Кроме того, в γ найдется и подкривая γ_1, связывающая ∂G с F_1 по множеству $G \setminus F_1$. Следовательно,

$$\begin{gathered} 2\int\limits_{\gamma} \rho(\mathbf{x})ds = \int\limits_{\gamma} \rho_1(\mathbf{x})ds + \int\limits_{\gamma} \rho_2(\mathbf{x})ds + \int\limits_{\gamma} \rho_2^*(\mathbf{x})ds \geqslant \\ \geqslant \int\limits_{\gamma_1} \rho_1(\mathbf{x})ds + \int\limits_{\gamma} \rho_2(\mathbf{x})ds + \int\limits_{\gamma_+} \rho_2^*(\mathbf{x})ds \geqslant 1 + \int\limits_{\gamma} \rho_2(\mathbf{x})ds + \int\limits_{\gamma_+} \rho_2^*(\mathbf{x})ds. \end{gathered} \tag{8}$$

В силу конформности инверсии

$$\int\limits_{\gamma_+} \rho_2^*(\mathbf{x})ds = \int\limits_{(\gamma_+)^*} \rho_2(\mathbf{x})ds,$$

где $(\gamma_+)^*$ означает образ γ_+ при инверсии относительно ∂B_p^0. Учитывая допустимость ρ_2 и тот факт, что $\gamma \cup (\gamma_+)^*$ соединяет ∂G и F_2, получим

$$\int\limits_{\gamma} \rho_2(\mathbf{x})ds + \int\limits_{\gamma_+} \rho_2^*(\mathbf{x})ds \geqslant 1.$$

Из (8) теперь вытекает допустимость метрики ρ для $\Delta(\partial G, F_0, G\setminus F_0)$.

Из определения емкости и выпуклости функции $f(x) = x^n$ получим неравенство

$$\begin{gathered} 2\mathrm{cap}_n C(\sqrt{r_1 r_2}) \leqslant 2\int\limits_{G\setminus F_0} \rho^n(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 2\int\limits_{G\setminus F_0} \left(\frac{\rho_1(\mathbf{x}) + \rho_2(\mathbf{x}) + \rho_2^*(\mathbf{x})}{2}\right)^n d\mathbf{x} \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{G\setminus F_0} (\rho_1(\mathbf{x}) + \rho_2^*(\mathbf{x}))^n d\mathbf{x} + \int\limits_{G\setminus F_0} \rho_2(\mathbf{x})^n d\mathbf{x}. \end{gathered} \tag{9}$$

Так как носитель ρ_1 лежит в замыкании $G\setminus F_1$, а носитель ρ^* в замыкании V, то

$$\int\limits_{G\setminus F_0} (\rho_1(\mathbf{x}) + \rho_2^*(\mathbf{x}))^n d\mathbf{x} = \int\limits_{G\setminus F_1} \rho_1(\mathbf{x})^n d\mathbf{x} + \int\limits_{V} (\rho_2^*(\mathbf{x}))^n d\mathbf{x}.$$

Из определения ρ_2^* с учетом конформности инверсии вытекает равенство

$$\int\limits_{V} (\rho_2^*(\mathbf{x}))^n d\mathbf{x} = \int\limits_{V^*} \rho_2(\mathbf{x})^n d\mathbf{x},$$

где $V^* = \cup_{k=1}^m (B_k^0 \setminus B_k^2)$. Из (9) теперь следует, что

$$\begin{aligned} 2\mathrm{cap}_n C(\sqrt{r_1 r_2}) \leqslant \int\limits_{G\setminus F_1} \rho_1(\mathbf{x})^n d\mathbf{x} + \int\limits_{V^*} \rho_2(\mathbf{x})^n d\mathbf{x} + \int\limits_{G\setminus F_0} \rho_2(\mathbf{x})^n d\mathbf{x} = \\ = \int\limits_{G\setminus F_1} \rho_1(\mathbf{x})^n d\mathbf{x} + \int\limits_{G\setminus F_2} \rho_2(\mathbf{x})^n d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{10}$$

Переход к инфимуму по метрикам ρ_1, ρ_2 завершает доказательство Теоремы 1.

Для доказательства мультипликативной выпуклости (3), (4) достаточно применить Теорему 1 в частных случаях $C(r) = (\mathbf{R}^n \setminus l_\alpha, \{\mathbf{0},\infty\}, \{r,r\})$ и $C(r) = (\mathbf{R}^n \setminus [s\mathbf{e}_1, s^{-1}\mathbf{e}_1], \{\mathbf{0},\infty\}, \{r,r\})$. Чтобы доказать утверждение Теоремы 2 для функции (6), согласно формуле (5) нам достаточно убедиться, что

$$2\mathrm{cap}_n C(\sqrt{r_1 r_2}, \tau) \leqslant \mathrm{cap}_n C(r_1, \tau) + \mathrm{cap}_n C(r_2, \tau),$$

где $C(r,\tau)$ — конденсатор $(B(\mathbf{a},\tau), \partial S(\varphi,r,T), S(\varphi,r,T))$. Здесь мы по сути повторяем доказательство Теоремы 1, рассматривая метрики ρ_1 и ρ_2, допустимые для $C(r_1,\tau)$, $C(r_2,\tau)$, и конструируя допустимую метрику ρ для конденсатора $C(\sqrt{r_1 r_2},\tau)$ по правилу

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{\rho_1(\mathbf{x}) + \rho_2(\mathbf{x}) + \rho_2^*(\mathbf{x})}{2},$$

где $\rho_2^*(\mathbf{x}) = \rho_2(f(\mathbf{x}))|f'(\mathbf{x})|$ и $f(\mathbf{x})$ инверсия относительно $\partial B(\mathbf{0}, \sqrt{r_1 r_2})$. Доказательство мультипликативной выпуклости (7) проводится аналогично.

Автор выражает благодарность участникам “Владивостокского семинара по анализу” за полезные замечания и внимание к работе.

Список литературы

[1] V. Dubinin, *Condenser Capacities and Symmetrization in Geometric Function Theory*, Springer, Basel: Birkhauser, 2014.

[2] J. Hesse, “A p-extremal length and p-capacity equalit”, *Ark. mat.*, **13**:1 (1975), 131–144.

[3] M. Vuorinen, “Conformal geometry and quasiregular mappings”, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, 1988.

[4] В. Н. Дубинин, “Некоторые свойства внутреннего приведенного модуля”, *Сиб. матем. журн.*, **35**:4 (1994), 774—792.

[5] B. E. Levitskii, “Reduced p-modulus and the interior p-harmonic radius”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **316**:4 (1991), 812–815.

[6] V. N. Dubinin, E. G. Prilepkina, “On extremal decomposition of n-space domains”, *J.Math. Sci.*, **105**:4 (2001), 2180–2189.

[7] G. D. Anderson, M.,K. Vamanamurthy and M. Vuorinen, “Special functions of quasiconformal theory”, *Expositiones Mathematicae*, **7** (1989), 97–138.

[8] Е. Г. Прилепкина, А. С. Афанасьева-Григорьева, “О конформной метрике кругового кольца в n-мерном евклидовом пространстве”, *Дальневост. матем. журн.*, **18**:2 (2018), 233—241.

[9] R. Laugesen, “Extremal problems involving logarithmic and Green capacity”, *Duke Math. J.*, **70**:2 (1993), 445–480.

[10] S. Pouliasis, “Concavity of condenser energy under boundary variations”, *J. Geom. Anal.*, **31**:8 (2021), 7726–7740.

[11] P. R. Garabedian, M. Schiffer, “Convexity of domain functionals”, *J. Anal. Math.*, **2** (1953), 281–368.

[12] A. S. Afanaseva-Grigoreva, E. G. Prilepkina, “On the p-harmonic radii of circular sectors”, *Issues Anal.*, **10(28)**:3 (2021), 3-–14.

[13] V. N. Dubinin, “Green energy and extremal decompositions”, *Probl. Anal. Issues Anal.*, **8(26)**:3 (2019), 38–44.

[14] V. N. Dubinin, E. G. Prilepkina, “Optimal Green energy points on the circles in d-space”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **499**:2 (2021), Article 125055.

Поступила в редакцию
12 мая 2022 г.

Исследование выполнено в рамках НИОКТР № АААА-А20-120112690042-0 при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00018).

Prilepkina E. G.[1] On the conformal capacity of a spatial condenser with spherical plates. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2022. V. 22. No 1. P. 76–83.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

Condencers with spherical plates are considered, the radii of which depend on the parameter r. It is shown that the conformal capacity of such condencers is a multiplicatively convex function of r. As a corollary, it has been established that some special functions related to capacity have a similar property.

Key words: *conformal capacity, modulii of curve families, reduced modulus, quasiregular mappings.*

References

[1] V. Dubinin, *Condenser Capacities and Symmetrization in Geometric Function Theory*, Springer, Basel: Birkhauser, 2014.

[2] J. Hesse, "A p-extremal length and p-capacity equalit", *Ark. mat.*, **13**:1 (1975), 131–144.

[3] M. Vuorinen, "Conformal geometry and quasiregular mappings", *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, 1988.

[4] V. N. Dubinin, "Nekotorye svoistva vnutrennego privedennogo modulia", *Sib. matem. zhurn.*, **35**:4 (1994), 774—792.

[5] B. E. Levitskii, "Reduced p-modulus and the interior p-harmonic radius", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **316**:4 (1991), 812–815.

[6] V. N. Dubinin, E. G. Prilepkina, "On extremal decomposition of n-space domains", *J.Math. Sci.*, **105**:4 (2001), 2180–2189.

[7] G. D. Anderson, M.,K. Vamanamurthy and M. Vuorinen, "Special functions of quasiconformal theory", *Expositiones Mathematicae*, **7** (1989), 97–138.

[8] E. G. Prilepkina, A. S. Afanas'eva-Grigor'eva, "O konformnoi metrike krugovogo kol'tsa v n-mernom evklidovom prostranstve", *Dal'nevost. matem. zhurn.*, **18**:2 (2018), 233—241.

[9] R. Laugesen, "Extremal problems involving logarithmic and Green capacity", *Duke Math. J.*, **70**:2 (1993), 445–480.

[10] S. Pouliasis, "Concavity of condenser energy under boundary variations", *J. Geom. Anal.*, **31**:8 (2021), 7726–7740.

[11] P. R. Garabedian, M. Schiffer, "Convexity of domain functionals", *J. Anal. Math.*, **2** (1953), 281–368.

[12] A. S. Afanaseva-Grigoreva, E. G. Prilepkina, "On the p-harmonic radii of circular sectors", *Issues Anal.*, **10(28)**:3 (2021), 3-–14.

[13] V. N. Dubinin, "Green energy and extremal decompositions", *Probl. Anal. Issues Anal.*, **8(26)**:3 (2019), 38–44.

[14] V. N. Dubinin, E. G. Prilepkina, "Optimal Green energy points on the circles in d-space", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **499**:2 (2021), Article 125055.