Дальневосточный математический журнал. 2022. Т. 22. № 1. С. 84–90

УДК 517.965+517.583
MSC2020 39B32+33E05

© В. Я. Прудников[1], А. Г. Подгаев[1]

Критерий аппроксимации полунепрерывного функционала липшицевыми функционалами

В работе приведен критерий аппроксимации в метрическом пространстве полунепрерывного снизу функционала липшицевыми функционалами.

Ключевые слова: *полунепрерывный снизу функционал, метрическое пространство.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202208

Введение

В работах [1, 2] доказано, что полунепрерывный снизу и ограниченный снизу в метрическом пространстве X функционал представим в виде предела неубывающего семейства липшицевых функционалов. В лемме из [3] приведено достаточное условие такого представления для полунепрерывной снизу по одной из переменных функции в конечномерном пространстве. Данная работа содержит критерий аппроксимации полунепрерывного снизу в метрическом пространстве функционала липшицевыми функционалами.

1. Основной результат и некоторые его приложения

Пусть X – метрическое пространство, $d: X\times X \to R^+$ — метрика в X, T — некоторое множество, f — функционал на $X\times T$, удовлетворяющий условиям:

1) $f: X\times T \longrightarrow (-\infty, +\infty]$;
2) для всех $t\in T \quad f(\cdot,t)$ — полунепрерывный снизу по переменной $x\in X$;
3) для любого $t\in T$ найдется такой элемент $x\in X$, что $f(x,t)\neq +\infty$.

Зафиксируем некоторое число a из $[0,+\infty)$.

[1] Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136. Электронная почта: prvitja@yandex.ru, 000211@pnu.edu.ru (В. Я. Прудников), 000210@pnu.edu.ru (А. Г. Подгаев).

Теорема 1. *При указанных условиях 1)–3) для существования семейства функционалов f_m, $m \geqslant a$, таких, что*
i. для любых $(x,t) \in X \times T$: $f_m(x,t) \uparrow f(x,t)$ при $m \to \infty$, и $f_m(x,t) >- \infty$;
ii. для любых элементов $x, y \in X$, всех $t \in T$ и для любого $m \geqslant a$

$$|f_m(x,t) - f_m(y,t)| \leqslant md(x,y),$$

необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$f(x,t) \geqslant - ad(x,x_0) + b(t),\ (x,t) \in X \times T \tag{1}$$

для некоторого элемента $x_0 \in X$ и некоторой величины $b(t)$, конечной для всех $t \in T$.

Доказательство. *Необходимость.* Из условий i, ii следует конечность всех величин $f_m(x,t)$. В самом деле, $f_m(x,t) >- \infty$ согласно i. А если бы $f_n(x,t) = +\infty$ при некоторых фиксированных n, x, t, то из i следовало бы, что $f_m(x,t) = +\infty$ для всех $m \geqslant n$, но тогда из ii получим, что для таких m и для всех $y \in X$ $f_m(y,t) \equiv +$ $+\infty$. Из монотонности выводим $f(y,t) \equiv +\infty$, что противоречит 3).

Полагая в условии ii $m = a$, $y = x_0$, $b(t) = f_a(x_0,t)$ и используя монотонность f_m, выводим неравенство

$$f_m(x,t) \geqslant f_a(x,t) \geqslant - ad(x,x_0) + b(t),\ \ (x,t) \in X \times T.$$

Устремляя m к ∞, получим требуемое неравенство.

Достаточность. Согласно (1) для любых элементов x, z из X, $t \in T$ и $m \geqslant a$, некоторого элемента $x_0 \in X$ и некоторой $b(t)$ выполнено

$$f(z,t) + md(x,z) \geqslant - ad(z,x_0) + b(t) + md(x,z) \geqslant$$
$$\geqslant - ad(x,x_0) + b(t) + (m-a)d(x,z) \geqslant - ad(x,x_0) + b(t),$$

поэтому

$$f_m(x,t) \overset{\text{опр}}{=} \inf_z (f(z,t) + md(x,z)) \geqslant - ad(x,x_0) + b(t) >- \infty.$$

Но тогда для всех элементов x,y,z из X, для всех $t \in T$ и $m \geqslant a$ из неравенства $f(z,t) + md(x,z) \leqslant f(z,t) + md(y,z) + md(x,y)$ следует $f_m(x,t) \leqslant f_m(y,t) + md(x,y)$.

Если бы при некотором (x,t) $f_m(x,t) = +\infty$, то из последнего неравенства получили бы, что $f_m(y,t) \equiv +\infty$ при всех y и для данного t, но, так как функция $m \to f_m(y,t)$ неубывающая на полуинтервале $[a, +\infty)$ и для всех $(y,t) \in X \times T$, $f_m(y,t) \leqslant f(y,t)$, то $f(y,t) \equiv +\infty$, что противоречит 3). Поэтому для всех элементов x,y,z из X, для всех $t \in T$ и $m \geqslant a$, выполнено неравенство $f_m(x,t) - f_m(y,t) \leqslant md(x,y)$, $m \geqslant a$. Меняя местами x и y, получим равномерную по t липшицевость f_m

$$|f_m(x,t) - f_m(y,t)| \leqslant md(x,y),\ \ m \geqslant a.$$

Неубывание f_m очевидно. Докажем, что

$$\lim_{m \to +\infty} f_m(x,t) = f(x,t).$$

Рассмотрим вспомогательное семейство функционалов

$$\mathrm{g}_m(x,t) \overset{\text{опр}}{=} \inf_z(\min(f(z,t);\sqrt{m}) + md(x,z)),\ m \geqslant a.$$

Фиксируем элемент (x,t). Конечность $\mathrm{g}_m(x,t)$ следует из неравенств

$$\mathrm{g}_m(x,t) \leqslant \min(f(x,t);\sqrt{m}) < +\infty,$$
$$\mathrm{g}_m(x,t) \geqslant \mathrm{g}_a(x,t) = \inf_z(\min(f(z,t);\sqrt{a}) + ad(x,z)) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_z(\min(-\,ad(z,x_0) + b(t);\sqrt{a}) + ad(x,z)) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_z(\min(-\,ad(x,x_0) + b(t) - ad(x,z);\sqrt{a}) + ad(x,z)) \geqslant$$
$$\geqslant (\min(-\,ad(z,x_0) + b(t);\sqrt{a}) >-\,\infty.$$

Функция $m\to\mathrm{g}_m(x,t)$ неубывающая, поэтому существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{m\to+\infty}\mathrm{g}_m(x,t) \overset{\text{опр}}{=} \mathrm{g}(x,t),$$

причем

$$\mathrm{g}(x,t) \leqslant f(x,t), \quad (x,t)\in X\times T.$$

Для любого натурального числа $n\geqslant a$ существует элемент z_n такой, что

$$1/n + \mathrm{g}_n(x,t) > \min(f(z_n,t);\sqrt{n}) + nd(x,z_n). \tag{2}$$

Так как

$$\mathrm{g}_n(x,t) \leqslant \min(f(z,t);\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n},$$
$$\min(f(z_n,t);\sqrt{n}) \geqslant (\min(-\,ad(z_n,x_0) + b(t);\sqrt{n}) \geqslant$$
$$\geqslant \min(-\,ad(x,x_0) + b(t) - ad(x,z_n);\sqrt{n}) \geqslant \min(-\,ad(x,x_0) + b(t);\sqrt{n}) - ad(x,z_n),$$

то из (2) получим неравенство для всех $n\geqslant a$

$$1 + \sqrt{n} \geqslant \min(-\,ad(x,x_0) + b(t);\sqrt{n}) + (n-a)d(x,z_n),$$

откуда следует сходимость последовательности z_n к элементу x.

Так как функционал $x\to f(x,t)$ полунепрерывен снизу в x, то из (2) получим

$$\mathrm{g}(x,t) \geqslant \liminf_{n\to+\infty}\min(f(z_n,t);\sqrt{n}) \geqslant f(x,t).$$

Но тогда, учитывая (1), приходим к равенству $\mathrm{g}(x,t)=f(x,t)$, $(x,t)\in X\times T$. А из неравенства $\mathrm{g}_m(x,t)\leqslant f_m(x,t)\leqslant f(x,t)$ следует равенство ниже, заканчивающее доказательство теоремы.

$$\lim_{m\to+\infty} f_m(x,t) = f(x,t), \quad (x,t)\in X\times T.$$

□

В статье [2] доказано, что положительно однородный полунепрерывный снизу функционал в нормированном пространстве представим в виде предела неубывающей последовательности положительно однородных липшицевых функционалов. В Следствии 1 мы докажем этот результат существенно короче, чем в [2], сформулировав его в конструктивной форме.

Следствие 1. *Пусть $p : X \to (-\infty; +\infty]$ — положительно однородный полунепрерывный снизу функционал в нормированном пространстве X, $p(0) = 0$. Тогда функционалы*

$$p_m(x) \overset{\text{опр}}{=} \inf_z (p(z) + m\|x - z\|), \quad m \geqslant a \overset{\text{опр}}{=} (\inf_{\|x\|\,=\,1} p(x))^-, \text{ где } (\ )^- \text{ — минус срезка,}$$

удовлетворяют условиям

1. $p_m(x) \uparrow p(x)$ для всех $x \in X$;

2. для любых элементов $x, y \in X$ и любого $m \geqslant a$

$$|p_m(x) - p_m(y)| \leqslant m\|x - y\|;$$

3. p_m — положительно однородные функционалы, $p_m(0) = 0$.

Доказательство. Из полунепрерывности снизу функционала p в нуле следует существование такого числа $r > 0$, что

$$p(x) > -1, \quad \|x\| \leqslant r,$$

поэтому

$$p(x) > -1/r, \quad \|x\| = 1,$$

но тогда

$$\inf_{\|x\|\,=\,1} p(x) > -\infty,$$

$$p(x) \geqslant -a\|x\|, \qquad a \overset{\text{опр}}{=} \big(\inf_{\|x\|\,=\,1} p(x)\big)^-$$

для всех $x \in X$. Согласно теореме 1 для функционалов

$$p_m(x) \overset{\text{опр}}{=} \inf_z (p(z) + m\|x - z\|), m \geqslant a$$

выполнены свойства 1, 2 следствия 1. Установим (2).

Для $\varepsilon \in (0, +\infty)$

$$p_m(\varepsilon x) = \inf_z (p(z) + m\|\varepsilon x - z\|) = \varepsilon \inf_z (p(z/\varepsilon) + m\|x - z/\varepsilon\|) = \varepsilon p_m(x),$$

Согласно условию 1 $p_m(0) \leqslant p(0) = 0$. Но из условия 2 для любого $\varepsilon > 0$ следует неравенство $\epsilon p_m(x) \leqslant p_m(0) + \varepsilon\|x\|$, поэтому $0 \leqslant p_m(0)$. Следовательно, $p_m(0) = 0$. □

Следствие 2. *Пусть X — нормированное пространство, а $p : X \times T \to (-\infty; +\infty]$ — функционал, который по переменной x является положительно однородным полунепрерывным снизу функционалом, удовлетворяющим для любого $t \in T$ условию $p(0, t) = 0$. Тогда, если $\inf_t \inf_{\|x\|\,=\,1} p(x, t) > -\infty$, то функционалы*

$$p_m(x, t) \overset{\text{опр}}{=} \inf_z (p(z, t) + m\|x - z\|), \qquad m \geqslant a \overset{\text{опр}}{=} \big(\inf_t \inf_{\|x\|\,=\,1} p(x)\big)^-$$

удовлетворяют условиям

1. $p_m(x,t) \uparrow p(x,t), \quad p_m(x,t) >-\infty$ *для всех* $(x,t) \in X \times T$;
2. для любых элементов $x, y \in X$, *для любого* $t \in T$ *и для всех* $m \geqslant a$

$$|p_m(x,t) - p_m(y,t)| \leqslant m\|x-y\|;$$

3. $x \to p_m(x,t)$ *— положительно однородные функционалы,* $p_m(0,t) = 0$.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

Следствие 3. *Пусть* K *— неограниченное замкнутое выпуклое множество в банаховом рефлексивном пространстве* X, *функционал* $f : K \times T \to (-\infty; +\infty]$ *— слабо полунепрерывный снизу по переменной* x *и для любого* $t \in T$ *найдется такой элемент* $x \in X$, *что* $f(x,t) \neq +\infty$. *Тогда для существования семейства функционалов* f_m, $m \geqslant a \in [0, +\infty)$ *таких, что*
1. для всех $(x,t) \in X \times T$ $f_m(x,t) \uparrow f(x,t)$ *при* $m \to \infty$;
2. для любых элементов $x, y \in K$, *для всех* $t \in T$ *и для любого* $m \geqslant a$

$$|f_m(x,t) - f_m(y,t)| \leqslant m\|x-y\|,$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\liminf_{\substack{\|x\|\to+\infty \\ x\in K}} (f(x,t) + a\|x\|) >-\infty, \qquad t \in T, \tag{3}$$

Доказательство. *Необходимость.* Из теоремы следует, что для некоторого элемента $x_0 \in K$ выполнено неравенство $f(x,t) >-a\|x-x_0\| - c(t)$. Поэтому $f(x,t) > >-a\|x\| - c_1(t)$, $c_1 = -a\|x_0\| - c(t)$. Докажем *достаточность.* Фиксируем $t \in T$. Из условия (3) следует существование положительных чисел $c(t), R(t)$ таких, что для всех x, $\|x\| > R(t)$, $x \in K$ выполнено неравенство

$$f(x,t) >-a\|x\| - c(t). \tag{4}$$

Так как функционал $x \to f(x,t)$ слабо полунепрерывен снизу на замкнутом множестве $\overline{B}(0;R(t)) \bigcap K$, то существует элемент $x_1(t) \in \overline{B}(0;R(t))$, на котором $f(x,t)$ достигает наименьшего значения, поэтому для всех x из $\overline{B}(0;R(t)) \cap K$,

$$f(x,t) \geqslant f(x_1(t),t). \tag{5}$$

Но тогда из (4), (5) следует, что для всех $(x,t) \in K \times T$ выполнено неравенство

$$f(x,t) \geqslant -a\|x\| + b(t), \qquad (x,t) \in X \times T,$$

где $b(t) := \min(-c(t); f(x_1(t),t))$. Согласно теореме 1 существуют функционалы $f_m(x,t)$, $m \geqslant a$, удовлетворяющие условиям 1, 2 Следствия 3. □

Следствие 4. *Пусть* K *— ограниченное замкнутое выпуклое множество в банаховом рефлексивном пространстве* X, *функционал* $f(x,t) : K \times T \to (-\infty; +\infty]$ *слабо полунепрерывен снизу по переменной* x *и для любого* $t \in T$ $f(x,t) \not\equiv +\infty$. *Тогда для существования семейства функционалов* $f_m(x,t)$, $m \geqslant 0$ *таких, что*

1. $f_m \uparrow f$ на $X \times T$;
2. для любых элементов $x, y \in K$, для всех $t \in T$ и для любого $m \geqslant 0$

$$|f_m(x,t) - f_m(y,t)| \leqslant m\|x - y\|,$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\inf_{t\in T}\inf_{x\in K} f(x,t) >- \infty.$$

Следствие 5. *Для полунепрерывного снизу выпуклого функционала $f \not\equiv +\infty$ в нормированном пространстве X функционалы*

$$f_m(x) \overset{\text{опр}}{=} \inf_z(f(z) + m\|x - z\|), \qquad m > a \overset{\text{опр}}{=} \left(\lim_{r\to+\infty}\inf_{\|s\|\,=\,1}\frac{f(rs)}{r}\right)^-$$

удовлетворяют условиям
1. $f_m \uparrow f$ на каждом элементе из X;
2. для любых элементов $x, y \in X$, для любого $m > a$

$$|f_m(x) - f_m(y)| \leqslant m\|x - y\|;$$

3. f_m — выпуклые функционалы.

Доказательство. Согласно теореме Фенхеля–Моро (см., например, [4])

$$f(x) = \sup_{f\geqslant l} l(x),$$

где $l(x)$ — аффинные функционалы. Если $l(x) \overset{\text{опр}}{=} \langle x^*, x\rangle + c$ — один из таких функционалов, то для всех $x \in X$ выполнено неравенство

$$f(x) \geqslant- \|x^*\| \cdot \|x\| + c.$$

Поэтому $\inf\limits_{x\in K} f(x) >- \infty$ на любом ограниченном множестве $K \subset X$ и

$$a \overset{\text{опр}}{=} \left(\lim_{r\to+\infty}\inf_{\|s\|\,=\,1}(f(rs))/r\right)^- < +\infty.$$

Фиксируя $\varepsilon > 0$, получим существование положительного числа R такого, что для всех x, $\|x\| > R$ выполнено неравенство $f(x) >- (a+\varepsilon)\|x\|$. Но тогда

$$f(x) >- (a+\varepsilon)\|x\| + \min(\inf_{\|x\|\leqslant R} f(x), 0) \ \ , x \in X.$$

Согласно установленной в работе теореме функционалы

$$f_m(x) \overset{\text{опр}}{=} \inf_z\bigl(p(z) + m\|x - z\|\bigr), \quad m > a \overset{\text{опр}}{=} \left(\lim_{r\to+\infty}\inf_{\|s\|\,=\,1}(f(rs))/r\right)^-$$

удовлетворяют условиям 1, 2 следствия 5, а так как функционал

$$(x,z) \to p(z) + m\|x - z\|$$

выпуклый, то функционалы $f_m(x)$ также выпуклые [4]. $\square$

Список литературы

[1] Ф. Хаусдорф., *Теория множеств*, Объединен. научн.-техн. изд-во НКТП СССР, Гл. ред. техн.-теорет. лит., М.-Л., 1937.

[2] В. В. Гороховик, "О представлении полунепрерывных сверху функций, определенных на бесконечномерных нормированных пространствах, в виде нижних огибающих семейств выпуклых функций", *Тр. ИММ Ур.О РАН.*, **23**:1 (2017), 88–102.

[3] В. Я. Прудников, "Неравенство Иенсена в идеальном пространстве", *Сиб. журн.индустр. матем.*, **10**:2 (2007), 119–127.

[4] Ж.-П. Обен., *Нелинейный анализ и его экономические приложения*, Мир, Москва, 1988.

Поступила в редакцию
28 марта 2022 г.

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение от 4 февраля 2022г. № 075-02-2022-879 по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

Prudnikov V. Ya.[1], *Podgaev A. G.*[1] A criterion for the approximation of a semicontinuous functional by Lipschitz functionals. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2022. V. 22. No 1. P. 84–90.

[1] Pacific National University, Khabarovsk, Russia

ABSTRACT

It is proved in [1, 2] that a functional semi-continuous from below and bounded from below in the metric space X is represented as the limit of a non-decreasing family of Lipschitz functionals. In the lemma from [3], a sufficient condition for such a representation is given for a function semi-continuous from below with respect to one of the variables in a finite-dimensional space. This paper contains a criterion for approximation of a semi-continuous functional from below in a metric space by Lipschitz functionals.

Key words: *lower semicontinuous functional, metric space.*

References

[1] F. Khausdorf., *Teoriia mnozhestv*, Ob"edinen. nauchn.-tekhn. izd-vo NKTP SSSR, Gl. red. tekhn.-teoret. lit., M.-L., 1937.

[2] V. V. Gorokhovik, "O predstavlenii polunepreryvnykh sverkhu funktsii, opredelennykh na beskonechnomernykh normirovannykh prostranstvakh, v vide nizhnikh ogibaiushchikh semeistv vypuklykh funktsii", *Tr. IMM Ur.O RAN.*, **23**:1 (2017), 88–102.

[3] V. Ia. Prudnikov, "Neravenstvo Iensena v ideal'nom prostranstve", *Sib. zhurn.industr. matem.*, **10**:2 (2007), 119–127.

[4] Zh.-P. Oben., *Nelineinyi analiz i ego ekonomicheskie prilozheniia*, Mir, Moskva, 1988.