Дальневосточный математический журнал. 2022. Т. 22. № 1. С. 91–99

УДК 517.583+512.742.72
MSC2020 33E05

© М. А. Романов[1]

Полиномиальные последовательности Сомоса II

В работе [1] было доказано, что при $k = 4, 5, 6, 7$ элементы последовательности Сомос-k, определенной рекуррентным соотношением

$$S_k(n+k)S_k(n) = \sum_{1\leqslant i\leqslant k/2} \alpha_i x_0 \ldots x_{k-1} S_k(n+k-i)S_k(n+i)$$

и начальными значениями $S_k(j) = x_j$ $(j = 0, \ldots, k-1)$, являются полиномами от переменных $x_0, \ldots, x_{k-1}$. Единичные показатели степеней переменных x_j в сомножителях $\alpha_i x_0 \ldots x_{k-1}$ можно уменьшить. В работе найдены минимальные значения этих показателей, при которых сохраняется полиномиальность вышеуказанной последовательности.

Ключевые слова: *последовательности Сомоса, ультрадискретные последовательности.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202209

Введение

Пусть $k \geqslant 2$ — натуральное число. Последовательность Сомос-k

$$S_k(n) = S_k(n; \alpha_1, \ldots, \alpha_{[k/2]}; x_0, \ldots, x_{k-1}) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

определяется рекуррентным соотношением

$$S_k(n+k)S_k(n) = \sum_{1\leqslant i\leqslant k/2} \alpha_i S_k(n+k-i)S_k(n+i) \tag{1}$$

и начальными значениями

$$S_k(j) = x_j \quad (j = 0, \ldots, k-1). \tag{2}$$

При $k=2$ это рекуррентное соотношение имеет вид

$$S_2(n+2)S_2(n) = \alpha_1 S_2^2(n+1),$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680038, г. Хабаровск, ул. Серышева, 60. Электронная почта: `romanov@iam.dvo.ru`

а при $k=3$
$$S_3(n+3)S_3(n)=\alpha_1 S_3(n+2)S_3(n+1).$$

С помощью математической индукции по n нетрудно доказать равенства
$$S_2(n)=\alpha_1^{\frac{n(n-1)}{2}}x_0^{1-n}x_1^n,$$

$$S_3(n)=\begin{cases}\alpha_1^{\frac{n(n-2)}{4}}x_0^{\frac{2-n}{2}}x_2^{\frac{n}{2}}, & n \text{ — чётное},\\ \alpha_1^{\frac{(n-1)^2}{4}}x_0^{\frac{1-n}{2}}x_1x_2^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ — нечётное}.\end{cases}$$

При $k\geqslant 4$ таких простых формул нет.

В работах [2, 3] было доказано, что при $k=4,5,6,7$
$$S_k(n;\alpha_1,\dots,\alpha_{[k/2]};x_0,\dots,x_{k-1})\in\mathbb{Z}_+[\alpha_1,\dots,\alpha_{[k/2]};x_0^{\pm1},\dots,x_{k-1}^{\pm1}]. \tag{3}$$

Другими словами, рациональные функции $S_k(n)$ являются обычными полиномами от переменных α_i и полиномами Лорана от переменных x_j. При этом коэффициенты у них неотрицательные целые. Вычисления показывают, что при $k=8$ это утверждение неверно.

Для целочисленной матрицы
$$A_k=(a_{ij})\quad(i=1,\dots,[k/2];j=0,\dots,k-1)$$

положим
$$\beta_i=\alpha_i\prod_{j=0}^{k-1}x_j^{a_{ij}}.$$

Определим новую последовательность Сомос-k равенством
$$P_k(n)=P_k(n;A_k)=S_k(n;\beta_1,\dots,\beta_{[k/2]};x_0,\dots,x_{k-1}).$$

Возникает вопрос: при каких наименьших a_{ij} функция $P_k(n;A_k)$ будет обычным полиномом от переменных x_j при любом целом n? Отвечая на него, мы доказываем следующий результат.

Теорема. *Пусть*
$$A_2=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix},$$
$$A_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$A_4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$
$$A_5=\begin{pmatrix}1 & 0 & \varepsilon_1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1-\varepsilon_1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$
$$A_6=\begin{pmatrix}1 & 0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1-\varepsilon_1 & 1-\varepsilon_2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\varepsilon_1 & \varepsilon_4 & 1-\varepsilon_3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-\varepsilon_2-\varepsilon_4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4 \in \{0, 1\}$, $\varepsilon_2 + \varepsilon_4 > 0$. *Тогда для* $2 \leqslant k \leqslant 7$ *и любого целого* n $P_k(n; A_k)$ *— полином от переменных* x_j.

Утверждение теоремы для $k=2,3$ следует из вышеприведённых явных формул для $S_2(n)$ и $S_3(n)$. Подобное утверждение для $k=8$ получить нельзя, поскольку в этом случае $S_k(n)$ не является полиномом Лорана от начальных переменных.

Автор благодарит В. А. Быковского за постановку задачи.

1. Ультрадискретные рекуррентные последовательности

В работе [1] было показано, что для матрицы

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

функция $P_k(n; A_k)$ является полиномом от переменных x_j для всех $k=4,5,6,7$. Из соотношения (3) следует, что это также верно при $a_{ij} \geqslant 1$ и неверно, если хотя бы одно из чисел a_{ij} отрицательно (по причине того, что $P_k(n; A_k)$ — полином от коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{[k/2]}$). Поэтому можно ограничиться рассмотрением случая, когда

$$a_{ij} \in \{0, 1\}. \tag{4}$$

Пусть $\widetilde{S}_k(n)$ — последовательность, полученная из $S_k(n)$ перестановкой начальных значений в обратном порядке. Легко проверить, что

$$\widetilde{S}_k(n) = S_k(k-1-n).$$

Иначе говоря, последовательность $\widetilde{S}_k(n)$ состоит из тех же элементов, что и $S_k(n)$. Поэтому достаточно показать, что $P_k(n)$ — полином от переменных x_j для $0 \leqslant j \leqslant \frac{k-1}{2}$.

Из соотношения (3) следует, что при $2 \leqslant k \leqslant 7$

$$P_k(n) = \left(\prod_{j=0}^{k-1} x_j^{q_{k,j}(n)}\right) Q_k(n),$$

где $Q_k(n)$ — полином от переменных α_j и x_j с неотрицательными целыми коэффициентами, который не делится ни на одну из переменных x_j, а

$$q_{k,j}(n) = q_{k,j}(n; a_{1j}, \ldots, a_{[k/2]j})$$

— последовательности целых чисел. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $q_{k,j}(n) \geqslant 0$ для всех целых n и $0 \leqslant j \leqslant \frac{k-1}{2}$.

Так как коэффициенты полиномов $Q_k(n)$ неотрицательны, то из соотношения (1) следует, что для фиксированного $2\leqslant k\leqslant 7$ элементы последовательностей $q_{k,j}(n)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$q_{k,j}(n+k)+q_{k,j}(n)=\min_{1\leqslant i\leqslant k/2}\{a_{ij}+q_{k,j}(n+k-i)+q_{k,j}(n+i)\}. \tag{5}$$

Подобного рода последовательности называются ультрадискретными (см., например, [4,5]). При этом $q_{k,j}(n)$ однозначно определяется любыми k последовательными элементами. В частности, из (2) следует равенство

$$q_{k,j}(n)=\begin{cases}1, & n=j,\\ 0, & n\neq j.\end{cases}\qquad (n=0,\ldots,k-1)$$

Пусть $a_0,\ldots,a_{t-1}$ — некоторые числа. Через $[a_0,\ldots,a_{t-1}]_n$ обозначим последовательность, для которой

$$[a_0,\ldots,a_{t-1}]_n=a_r,$$

если $n\equiv r\,(\mathrm{mod}\ t)$ $(r=0,\ldots,t-1)$.

1.1. Сомос-4

При $k=4$ соотношение (5) принимает вид

$$q_{4,j}(n+4)+q_{4,j}(n)=\min\{a_{1j}+q_{4,j}(n+3)+q_{4,j}(n+1),a_{2j}+2q_{4,j}(n+2)\}. \tag{6}$$

Последовательности $q_{4,0}(n)$ и $q_{4,1}(n)$ определяются начальными значениями

$$\begin{aligned}(q_{4,0}(0),q_{4,0}(1),q_{4,0}(2),q_{4,0}(3))&=(1,0,0,0),\\(q_{4,1}(0),q_{4,1}(1),q_{4,1}(2),q_{4,1}(3))&=(0,1,0,0).\end{aligned} \tag{7}$$

С помощью уравнения (6) находим

$$\begin{aligned}q_{4,0}(4)&=\min\{a_{10},a_{20}\}-1,\\ q_{4,1}(4)&=\min\{a_{11}+1,a_{21}\},\\ q_{4,1}(5)&=\min\{2a_{11}+1,a_{11}+a_{21},a_{21}\}-1.\end{aligned}$$

Для неотрицательности элементов последовательностей $q_{4,0}(n)$ и $q_{4,1}(n)$ необходимо выполнение неравенств $q_{4,0}(4)\geqslant 0$ и $q_{4,1}(5)\geqslant 0$ при условии (4). Из первого неравенства следует, что

$$a_{10}=a_{20}=1.$$

Второе справедливо при $a_{11}\in\{0,1\}$, $a_{21}=1$, поэтому значения

$$a_{11}=0,a_{21}=1$$

являются наименьшими, при которых оно выполняется.

Осталось показать, что для любого целого n

$$q_{4,0}(n;1,1)\geqslant 0,\quad q_{4,1}(n;0,1)\geqslant 0.$$

Первое неравенство доказано в работе [1]. Для доказательства второго с помощью соотношения (6) и начальных значений (7) составим таблицу

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q_{4,1}(n;0,1)$	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Последовательность $q_{4,1}(n;0,1)$ однозначно определяется четырьмя последовательными элементами. Поэтому из этой таблицы следует, что

$$q_{4,1}(n;0,1) = [0,1,0,0,1,0]_n = [0,1,0]_n.$$

Очевидно, что $q_{4,1}(n;0,1) \geqslant 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.

1.2. Сомос-5

Последовательности $q_{5,j}(n)$ $(j=0,1,2)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$q_{5,j}(n+5)+q_{5,j}(n) = \min\{a_{1j}+q_{5,j}(n+4)+q_{5,j}(n+1), a_{2j}+q_{5,j}(n+3)+q_{5,j}(n+2)\} \quad (8)$$

и задаются начальными значениями

$$\begin{gathered}(q_{5,0}(0), q_{5,0}(1), q_{5,0}(2), q_{5,0}(3), q_{5,0}(4)) = (1,0,0,0,0),\\ (q_{5,1}(0), q_{5,1}(1), q_{5,1}(2), q_{5,1}(3), q_{5,1}(4)) = (0,1,0,0,0),\\ (q_{5,2}(0), q_{5,2}(1), q_{5,2}(2), q_{5,2}(3), q_{5,2}(4)) = (0,0,1,0,0).\end{gathered}$$

С помощью этого соотношения находим

$$\begin{aligned} q_{5,0}(5) &= \min\{a_{10}, a_{20}\} - 1,\\ q_{5,1}(5) &= \min\{a_{11}+1, a_{21}\},\\ q_{5,1}(6) &= \min\{2a_{11}+1, a_{11}+a_{21}, a_{21}\} - 1,\\ q_{5,2}(5) &= \min\{a_{12}, a_{22}+1\},\\ q_{5,2}(6) &= \min\{2a_{12}+1, a_{12}+a_{22}+2, a_{22}\},\\ q_{5,2}(7) &= \min\{2a_{12}+a_{22}+1, a_{12}+a_{22}-1, 3a_{12}, 2a_{22}\}.\end{aligned}$$

Действуя так же, как в случае Сомос-4, выясняем, что

$$\begin{gathered} q_{5,0}(5) \geqslant 0 \text{ при } a_{10} = a_{20} = 1,\\ q_{5,1}(6) \geqslant 0 \text{ при } a_{11} \in \{0,1\},\ a_{21} = 1,\\ q_{5,2}(7) \geqslant 0 \text{ при } (a_{12}, a_{22}) \in \{(1,0),(0,1),(1,1)\}.\end{gathered}$$

Поэтому минимальными a_{ij}, при которых выполняются два последних неравенства, являются

$$(a_{11}, a_{21}) = (0,1), \quad (a_{12}, a_{22}) = (\varepsilon, 1-\varepsilon). \qquad (\varepsilon \in \{0,1\})$$

Неравенство $q_{5,0}(n;1,1) \geqslant 0$ для всех целых n доказано в работе [1]. Покажем, что для всех $n \in \mathbb{Z}$

$$q_{5,1}(n;0,1) \geqslant 0, \quad q_{5,2}(n;0,1) \geqslant 0, \quad q_{5,2}(n;1,0) \geqslant 0.$$

С помощью рекуррентного соотношения (8) составим таблицу

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$q_{5,1}(n;0,1)$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
$q_{5,2}(n;0,1)$	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
$q_{5,2}(n;1,0)$	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0		

Последовательность $q_{5,j}(n)$ однозначно определяется пятью своими последовательными элементами, поэтому для любого $n\in\mathbb{Z}$

$$\begin{gathered}q_{5,1}(n;0,1)=[0,1,0,0,0,1,0,0]_n=[0,1,0,0]_n\geqslant 0,\\ q_{5,2}(n;0,1)=[0,0,1,0,0,0,1,0]_n=[0,0,1,0]_n\geqslant 0,\\ q_{5,2}(n;1,0)=[0,0,1,0,0,1]_n=[0,0,1]_n\geqslant 0.\end{gathered}$$

1.3. Сомос-6

Последовательности $q_{6,j}(n)$ $(j=0,1,2)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{gathered}q_{6,j}(n+6)+q_{6,j}(n)=\\ =\min\{a_{1j}+q_{6,j}(n+5)+q_{6,j}(n+1),a_{2j}+q_{6,j}(n+4)+q_{6,j}(n+2),\\ a_{3j}+2q_{6,j}(n+3)\}\end{gathered}\tag{9}$$

с начальными значениями

$$\begin{gathered}(q_{6,0}(0),q_{6,0}(1),q_{6,0}(2),q_{6,0}(3),q_{6,0}(4),q_{6,0}(5))=(1,0,0,0,0,0),\\ (q_{6,1}(0),q_{6,1}(1),q_{6,1}(2),q_{6,1}(3),q_{6,1}(4),q_{6,1}(5))=(0,1,0,0,0,0),\\ (q_{6,2}(0),q_{6,2}(1),q_{6,2}(2),q_{6,2}(3),q_{6,2}(4),q_{6,2}(5))=(0,0,1,0,0,0).\end{gathered}$$

Отсюда находим

$$\begin{gathered}q_{6,0}(6)=\min\{a_{10},a_{20},a_{30}\}-1,\\ q_{6,1}(6)=\min\{a_{11}+1,a_{21},a_{31}\},\\ q_{6,1}(7)=\min\{2a_{11}+1,a_{11}+a_{21},a_{11}+a_{31},a_{21},a_{31}\}-1,\\ q_{6,2}(6)=\min\{a_{12},a_{22}+1,a_{32}\},\\ q_{6,2}(7)=\min\{2a_{12}+1,a_{12}+a_{22}+2,a_{12}+a_{32}+1,a_{22},a_{32}\},\\ q_{6,2}(8)=\min\{2a_{12}+a_{22}+1,a_{12}+a_{22}-1,a_{22}+a_{32}-1,a_{12}+a_{32}-1,2a_{12}+a_{32},\\ 3a_{12},2a_{22},a_{32}-1\}.\end{gathered}$$

Для неотрицательности при любом $n\in\mathbb{Z}$ величин $q_{6,j}(n)$ $(j=0,1,2)$ необходимо выполнение условий

$$q_{6,0}(6)\geqslant 0,\quad q_{6,1}(7)\geqslant 0,\quad q_{6,2}(8)\geqslant 0.$$

Легко проверить, что минимальными $a_{ij}\in\{0,1\}$, при которых выполняются эти неравенства, являются значения

$$\begin{gathered}a_{10}=a_{20}=a_{30}=1,\\ (a_{11},a_{21},a_{31})=(0,1,1),\\ (a_{12},a_{22},a_{32})=(\varepsilon,1-\varepsilon,1).\quad(\varepsilon\in\{0,1\})\end{gathered}$$

Осталось для любого $n\in\mathbb{Z}$ доказать выполнение неравенств

$$q_{6,0}(n;1,1,1)\geqslant 0,\quad q_{6,1}(n;0,1,1)\geqslant 0,\quad q_{6,2}(n;1,0,1)\geqslant 0,\quad q_{6,2}(n;0,1,1)\geqslant 0.$$

Первое неравенство доказано в [1]. С помощью соотношения (9) составим таблицу

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$q_{6,1}(n;0,1,1)$	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$q_{6,2}(n;1,0,1)$	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0		
$q_{6,2}(n;0,1,1)$	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0

Последовательность $q_{6,j}(n)$ однозначно определяется шестью своими последовательными элементами, поэтому для любого $n\in\mathbb{Z}$

$$\begin{gathered}q_{6,1}(n;0,1,1)=[0,1,0,0,0,0,1,0,0,0]_n=[0,1,0,0,0]_n\geqslant 0,\\ q_{6,2}(n;1,0,1)=[0,0,1,0,0,0,1,0]_n=[0,0,1,0]_n\geqslant 0,\\ q_{6,2}(n;0,1,1)=[0,0,1,0,0,0,0,1,0,0]_n=[0,0,1,0,0]_n\geqslant 0.\end{gathered}$$

1.4. Сомос-7

Последовательности $q_{7,j}(n)$ $(j=0,1,2,3)$ определяются с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{gathered}q_{7,j}(n+7)+q_{7,j}(n)=\\ =\min\{a_{1j}+q_{7,j}(n+6)+q_{7,j}(n+1),a_{2j}+q_{7,j}(n+5)+q_{7,j}(n+2),\\ a_{3j}+q_{7,j}(n+4)+q_{7,j}(n+3)\}\end{gathered}\tag{10}$$

и начальных значений

$$\begin{gathered}(q_{7,0}(0),q_{7,0}(1),q_{7,0}(2),q_{7,0}(3),q_{7,0}(4),q_{7,0}(5),q_{7,0}(6))=(1,0,0,0,0,0,0),\\ (q_{7,1}(0),q_{7,1}(1),q_{7,1}(2),q_{7,1}(3),q_{7,1}(4),q_{7,1}(5),q_{7,1}(6))=(0,1,0,0,0,0,0),\\ (q_{7,2}(0),q_{7,2}(1),q_{7,2}(2),q_{7,2}(3),q_{7,2}(4),q_{7,2}(5),q_{7,2}(6))=(0,0,1,0,0,0,0),\\ (q_{7,3}(0),q_{7,3}(1),q_{7,3}(2),q_{7,3}(3),q_{7,3}(4),q_{7,3}(5),q_{7,3}(6))=(0,0,0,1,0,0,0).\end{gathered}$$

Как и в предыдущих случаях, находим

$$q_{7,0}(7)=\min\{a_{10},a_{20},a_{30}\}-1,$$

$$\begin{gathered}q_{7,1}(7)=\min\{a_{11}+1,a_{21},a_{31}\},\\ q_{7,1}(8)=\min\{2a_{11}+1,a_{11}+a_{21},a_{11}+a_{31}\}-1,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}q_{7,2}(7)=\min\{a_{12},a_{22}+1,a_{32}\},\\ q_{7,2}(8)=\min\{2a_{12}+1,a_{12}+a_{22}+2,a_{12}+a_{32}+1,a_{22},a_{32}\},\\ q_{7,2}(9)=\min\{3a_{12},2a_{12}+a_{22}+1,2a_{12}+a_{32},a_{12}+a_{22}-1,a_{22}+a_{32}-1,a_{12}+a_{32}-1,\\ 2a_{22},a_{32}-1\}.\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
q_{7,3}(7) = \min\{a_{12}, a_{22}, a_{32}+1\}, \\
q_{7,3}(8) = \min\{a_{12}+a_{32}+1, a_{12}+a_{22}, 2a_{12}, a_{22}+1, a_{32}\}, \\
q_{7,3}(9) = \min\{2a_{12}+a_{22}+1, 2a_{12}+a_{32}+2, a_{12}+a_{22}, a_{22}+a_{32}+1, a_{12}+a_{32}+1, \\
3a_{12}+1, 2a_{22}, a_{32}\}, \\
q_{7,3}(10) = \min\{a_{12}+a_{22}+a_{32}, 3a_{12}+a_{22}, 3a_{12}+a_{32}+1, 2a_{12}+a_{32}, a_{12}+2a_{22}-1, \\
2a_{12}+a_{22}-1, a_{22}+a_{32}-1, a_{12}+a_{32}-1, 4a_{12}, 2a_{22}, 2a_{32}\}.
\end{gathered}
$$

С помощью полученных равенств убеждаемся, что наименьшими значениями $a_{ij} \in \{0,1\}$, при которых выполняются условия

$$q_{7,0}(7) \geqslant 0, \quad q_{7,1}(8) \geqslant 0, \quad q_{7,2}(9) \geqslant 0, \quad q_{7,3}(10) \geqslant 0,$$

являются следующие:

$$
\begin{gathered}
a_{10} = a_{20} = a_{30} = 1, \\
(a_{11}, a_{21}, a_{31}) = (0,1,1), \\
(a_{12}, a_{22}, a_{32}) = (\varepsilon, 1-\varepsilon, 1), \\
(a_{13}, a_{23}, a_{33}) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, 2-\varepsilon_1-\varepsilon_2),
\end{gathered}
$$

где $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0,1\}$, $\varepsilon_1+\varepsilon_2 > 0$.

Используя уравнение (10), составим таблицу

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$q_{7,1}(n;0,1,1)$	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$q_{7,2}(n;1,0,1)$	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0		
$q_{7,2}(n;0,1,1)$	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$q_{7,3}(n;1,1,0)$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0				
$q_{7,3}(n;1,0,1)$	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0		
$q_{7,3}(n;0,1,1)$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Последовательность $q_{7,j}(n)$ однозначно определяется семью своими последовательными элементами, поэтому для любого $n \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{gathered}
q_{7,1}(n;0,1,1) = [0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0]_n = [0,1,0,0,0,0]_n \geqslant 0, \\
q_{7,2}(n;1,0,1) = [0,0,1,0,0,0,0,1,0,0]_n = [0,0,1,0,0]_n \geqslant 0, \\
q_{7,2}(n;0,1,1) = [0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0]_n = [0,0,1,0,0,0]_n \geqslant 0, \\
q_{7,3}(n;1,1,0) = [0,0,0,1,0,0,0,1]_n = [0,0,0,1]_n \geqslant 0, \\
q_{7,3}(n;1,0,1) = [0,0,0,1,0,0,0,0,1,0]_n = [0,0,0,1,0]_n \geqslant 0, \\
q_{7,3}(n;0,1,1) = [0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0]_n = [0,0,0,1,0,0]_n \geqslant 0.
\end{gathered}
$$

Неравенство $q_{7,0}(n;1,1,1) \geqslant 0$ доказано в работе [1].

Список литературы

[1] В. А. Быковский, М. А. Романов, “Полиномиальные последовательности Сомоса”, *Функц. анализ и его прил.*, **55**:1 (2021), 20–32.

[2] S. Fomin and A. Zelevinsky, “The Laurent Phenomenon”, *Adv. Appl. Math.*, **28** (2002), 119–144.

[3] R. Robinson, “Periodicity of Somos sequences”, *Proceedings of the AMS*, **116**:3 (1992), 613–619.

[4] Allan P. Fordy and Andrew Hone, “Symplectic Maps from Cluster Algebras”, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, **7** (2011), 091, 12 pp.

[5] Yoichi Nakata, “The solution to the initial value problem for the ultradiscrete Somos-4 and 5 equations”, 2017, 13 pp., arXiv: 1701.04262

Поступила в редакцию
30 мая 2022 г.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-11-00065, https://rscf.ru/project/19-11-00065/

Romanov M. A.[1] Polynomial Somos sequences II. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2022. V. 22. No 1. P. 91–99.

[1] Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

It was proved in [1] that for $k = 4, 5, 6, 7$ the elements of the Somos-k sequence defined by the recurrence

$$S_k(n+k)S_k(n) = \sum_{1\leqslant i\leqslant k/2} \alpha_i x_0 \dots x_{k-1} S_k(n+k-i)S_k(n+i)$$

and initial values $S_k(j) = x_j$ $(j = 0, \dots, k-1)$ are polynomials in the variables $x_0, \dots, x_{k-1}$. The unit powers of the variables x_j in the factors $\alpha_i x_0 \dots x_{k-1}$ can be reduced. In this paper, we find the smallest values of these powers, at which the polynomiality of the above sequence is preserved.

Key words: *Somos sequences, ultradiscrete sequences.*

References

[1] V. A. Bykovskii, M. A. Romanov, “Polinomial’nye posledovatel’nosti Somosa”, *Funkts. analiz i ego pril.*, **55**:1 (2021), 20–32.

[2] S. Fomin and A. Zelevinsky, “The Laurent Phenomenon”, *Adv. Appl. Math.*, **28** (2002), 119–144.

[3] R. Robinson, “Periodicity of Somos sequences”, *Proceedings of the AMS*, **116**:3 (1992), 613–619.

[4] Allan P. Fordy and Andrew Hone, “Symplectic Maps from Cluster Algebras”, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, **7** (2011), 091, 12 pp.

[5] Yoichi Nakata, “The solution to the initial value problem for the ultradiscrete Somos-4 and 5 equations”, 2017, 13 pp., arXiv: 1701.04262