Дальневосточный математический журнал. 2022. Т. 22. № 1. С. 100–106

УДК 517.95
MSC2020 35J61, 35Q79

© А. Ю. Чеботарев[1]

Начально-краевая задача для уравнений радиационного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения

Доказана нелокальная по времени однозначная разрешимость неоднородной начально-краевой задачи для нелинейной системы, моделирующей сложный теплообмен с условиями отражения и преломления на поверхностях разрыва коэффициента преломления.

Ключевые слова: *квазистационарные уравнения сложного теплообмена, френелевские условия сопряжения, неоднородная начально-краевая задача, нелокальная однозначная разрешимость.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202210

1. Постановка начально-краевой задачи

Нестационарный сложный теплообмен рассматривается в ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, содержащей конечное число липшицевых подобластей Ω_j, $j=1,\ldots,p$, замыкания которых не пересекаются, $\Omega_0=\Omega\setminus(\bigcup\limits_{j=1}^{p}\bar\Omega_j)$, $\Gamma=\partial\Omega\subset\Gamma_0=\partial\Omega_0$, $\Gamma_j=\partial\Omega_j\subset\Gamma_0$, $j=1,\ldots,p$.

В каждой из областей Ω_j, $j=0,\ldots,p$, при $t\in(0,T)$ нормализованная температура θ и нормализованная интенсивность теплового излучения φ, усредненная по всем направлениям, удовлетворяют системе уравнений

$$r\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b(\theta^3|\theta| - \varphi) = f, \ \ -\alpha\Delta\varphi + \beta(\varphi - \theta^3|\theta|) = \mathrm{g}. \tag{1}$$

Здесь r, a, b, α, β — положительные кусочно-постоянные параметры [1–3], f, g — источники тепла и излучения.

К уравнениям (1) добавляются краевые условия на внешней границе $\Gamma=\partial\Omega$

$$a\partial_n\theta + c(\theta-\theta_b)|_\Gamma = 0, \ \ \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: cheb@iam.dvo.ru

где через ∂_n обозначена производная в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе, θ_b — заданная граничная температура, c — коэффициент теплопередачи, $\gamma \in (0,1/2]$ — параметр, зависящий от отражающих свойств поверхности. На внутренних границах $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, $j=1,\dots,p$, ставятся следующие условия сопряжения [1] для $\theta_j = \theta|_{\Omega_j}$ и $\varphi_j = \varphi|_{\Omega_j}$:

$$\theta_0 = \theta_j, \quad a_0 \partial_n \theta_0 = a_j \partial_n \theta_j, \tag{3}$$

$$n_0^2 \alpha_0 \partial_n \varphi_0 = n_j^2 \alpha_j \partial_n \varphi_j, \quad h_j(\varphi_j - \varphi_0) = \alpha_0 \partial_n \varphi_0. \tag{4}$$

Здесь $a_j, \alpha_j, n_j = a, \alpha, n|_{\Omega_j}$, $h_j > 0$ — заданные параметры. Также задаются начальные условия для температуры

$$\theta|_{t\,=\,0} = \theta_0. \tag{5}$$

Диффузионные модели радиационного теплообмена, не учитывающие эффекты отражения и преломления, хорошо изучены. В работах [4–20] изучены краевые, обратные задачи и задачи оптимального управления. Интересные результаты анализа полной модели сложного теплообмена получены в [21–24]. В работах [1–3] представлен анализ стационарных краевых задач и однородной квазистационарной задачи сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения.

В настоящей заметке представлены новые априорные оценки решения и анонсируются результаты о нелокальной однозначной разрешимости задачи (1)–(5).

2. Задача Коши для уравнения с операторными коэффициентами

Определим следующие пространства и операторы:

$$H = L^2(\Omega),\ V = H^1(\Omega),\ W = \{w \in H,\ w_j = w|_{\Omega_j} \in H^1(\Omega_j),\ j = 0, \dots, p\}.$$

Пространство H будем отождествлять с сопряженным пространством H', $V \subset W \subset H = H' \subset W' \subset V'$. Используем далее обозначения: (f,v) — значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$ и скалярное произведение в H, если $f, v \in H$;

$$\|v\|^2 = (v,v);\ (v,w)_j = (v,w)_{L^2(\Omega_j)},\ \|v\|_j^2 = (v,v)_j;\ (v,w)_W = \sum_{j\,=\,0}^{p} (v,w)_{H^1(\Omega_j)}.$$

Пусть исходные данные таковы, что

(i) $c, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $c \geqslant c_0 > 0$, $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$, $c_0, \gamma_0 = \mathrm{const}$;

(ii) $\{a, b, r, \alpha, \beta, n|\}_{\Omega_j} = \{a_j, b_j, r_j, \alpha_j, \beta_j, n_j\} > 0$, $b = \sigma\beta n^2$, $\sigma = Const > 0$;

(iii) $0 \leqslant \theta_b \in L^\infty(\Gamma \times (0,T))$; $f \in L^2(0,T;V')$, $\mathrm{g} \in L^{5/4}(Q)$, $Q = \Omega \times (0,T)$. Операторы $A_1 \colon V \to V'$, $A_2 \colon W \to W'$ и функции $f_b \in L^2(0,T;V')$, $\mathrm{g}_b \in L^2(0,T;W')$ определяются равенствами, справедливыми для $\theta,\eta\in V$, $\varphi,w\in W$:

$$(A_1\theta,\eta)=(a\nabla\theta,\nabla\eta)+\int\limits_\Gamma c\theta\eta d\Gamma,$$

$$\frac{1}{\sigma}(A_2\varphi,w)=\sum_{j=0}^{p}\alpha_j n_j^2(\nabla\varphi,\nabla w)_j+n_0^2\int\limits_\Gamma\gamma\varphi w d\Gamma+n_0^2\sum_{j=1}^{p}h_j\int\limits_{\Gamma_j}(\varphi_0-\varphi_j)(w_0-w_j)d\Gamma,$$

$$(f_b,\eta)=\int\limits_\Gamma c\theta_b\eta d\Gamma,\quad (\mathrm{g}_b,w)=\sigma n_0^2\int\limits_\Gamma\gamma\theta_b^4 w d\Gamma,\ \ \{\varphi_j,w_j\}=\{\varphi,w\}|_{\Omega_j}.$$

Пусть

$$Y=\Big\{y\in L^2(0,T;V),\ ry'\in L^2(0,T;V')+L^{5/4}(0,T;L^{5/4}(\Omega))\Big\}\subset C([0,T],H).$$

Здесь $ry'=d(ry)/dt$.

Определение. Пара $\{\theta,\varphi\}\in Y\times L^{5/4}(0,T;W)$ называется слабым решением задачи (1)–(5), если функция θ является решением следующей задачи Коши для уравнения с операторными коэффициентами

$$r\theta'+A_1\theta+b([\theta]^4-\varphi)=f_b+f,\quad \theta(0)=\theta_0,\ \text{где } \varphi=(A_2+bI)^{-1}(\mathrm{g}_b+\sigma n^2\mathrm{g}+b[\theta]^4).\quad (6)$$

Для возрастающей степенной функции используем обозначение $[s]^q=|s|^q\operatorname{sign}s$, $s\in\mathbb{R}$, $q>0$.

3. Разрешимость задачи (6)

Существование слабого решения задачи (1)–(5) устанавливается с помощью галеркинских приближений. Пусть $w_1,w_2,\ldots$ — ортонормированный в H базис V. Следующая задача Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений разрешима на малом временном интервале $(0,T_k)$. Оценки, ппредставленные ниже, позволяют продолжить решение на $(0,T)$.

$$\begin{gathered}\theta_k(t)\in V_k=span\{w_1,w_2,\ldots,w_k\},\ \ t\in(0,T).\\ \big(\,r\theta_k'+A_1\theta_k+b([\theta_k]^4-\varphi_k)-f_b-f,v\big)=0\quad\forall v\in V_k,\\ \theta_k(0)=\theta_{0k},\end{gathered}\qquad(7)$$

Здесь $\varphi_k=(A_2+bI)^{-1}(\mathrm{g}_b+\sigma n^2\mathrm{g}+b[\theta_k]^4)$, θ_{0k} — ортогональная проекция в H функции θ_0 на подпространство V_k.

Лемма 1. *Для галеркинских приближений θ_k,φ_k справедливы оценки*

$$\begin{gathered}\|\theta_k(t)\|\leqslant C,\ \int\limits_0^T\|\theta_k(s)\|_V^2ds\leqslant C,\ \int\limits_0^T\Big(\|\theta_k\|_{L^5(\Omega)}^5+\|\varphi_k\|_{L^{5/4}(\Omega)}^{5/4}\Big)ds\leqslant C,\\ \int\limits_0^T\|\varphi_k\|_W^{5/4}dt\leqslant C,\ \ \int\limits_0^{T-h}\|\theta_k(t+h)-\theta_k(t)\|^2dt\leqslant Ch,\end{gathered}\qquad(8)$$

где $C>0$ постоянная, не зависящая от k,h.

Оценки (8) позволяют утверждать, переходя при необходимости к подпоследовательностям, что существуют функции θ, φ такие, что

$$\begin{gathered}\theta_k \to \theta \text{ слабо в } L^2(0,T;V), L^5(Q), \ \ \text{сильно в } L^2(0,T;H),\\ \varphi_k \to \varphi \text{ слабо в } L^{5/4}(0,T;W), L^{5/4}(Q).\end{gathered} \tag{9}$$

Результатов (9) достаточно для предельного перехода при $k\to\infty$ в системе (7) и доказательства того, что предельные функции $\{\theta,\varphi\}\in Y\times L^{5/4}(0,T;W)$ и выполняются равенства (6). Предельный переход в нелинейных членах гарантируется неравенством

$$\|\theta_k-\theta\|^4_{L^4(Q)} \leqslant \|\theta_k-\theta\|^{2/3}_{L^2(Q)}\|\theta_k-\theta\|^{10/3}_{L^5(Q)}.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда существует слабое решение задачи* (1)–(5) *такое, что* $\theta\in L^5(Q)$, $\varphi\in L^{5/4}(Q)$.

4. Единственность решения

Пусть $\{\theta_{1,2},\varphi_{1,2}\}$ — слабые решения задачи (1)–(5), $\theta=\theta_1-\theta_2$, $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$. Тогда справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{L^6(\Omega)} \leqslant K_1\left(\|\theta_1\|^3_{L^5(\Omega)}+\|\theta_2\|^3_{L^5(\Omega)}\right)\|\theta\|^{4/5}_{L^6(\Omega)}\|\theta\|^{1/5},$$

на основе которой нетрудно получить неравенство

$$\|\theta(t)\|^2 \leqslant K_2\int\limits_0^t\left(\|\theta_1(s)\|^5_{L^5(\Omega)}+\|\theta_2(s)\|^5_{L^5(\Omega)}\right)\|\theta(s)\|^2ds,$$

где $K_1,K_2>0$ зависят только от данных задачи. Из теоремы 1 следует интегрируемость функции $s\to\left(\|\theta_1(s)\|^5_{L^5(\Omega)}+\|\theta_2(s)\|^5_{L^5(\Omega)}\right)$ на $(0,T)$, и поэтому из неравенства Гронуолла вытекает, что $\theta=0$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда существует единственное слабое решение задачи* (1)–(5) *такое, что* $\theta\in L^5(Q)$, $\varphi\in L^{5/4}(Q)$.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной математики ДВО РАН (НИОКТР № АААА-А20-120120390006-0).

Список литературы

[1] Alexander Yu. Chebotarev and Gleb V. Grenkin and Andrey E. Kovtanyuk and Nikolai D. Botkin and Karl-Heinz Hoffmann, “Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **57** (2018), 290–298.

[2] A. Yu. Chebotarev, “Inhomogeneous Boundary Value Problem for Complex Heat Transfer Equations with Fresnel Matching Conditions”, *Differential Equations*, **56**:12 (2020), 1613–1618.

[3] A. Y. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk, “Quasi-static diffusion model of complex heat transfer with reflection and refraction conditions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **507**:125745 (2022).

[4] R. Pinnau, "Analysis of Optimal Boundary Control for Radiative Heat Transfer Modelled by the SP_1-System", *Comm. Math. Sci.*, **5**:4 (2007), 951–969.

[5] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem", *J. Math. Anal. Appl.*, **409**:2 (2014), 808–815.

[6] А. Е. Ковтанюк, А. Ю. Чеботарев, "Стационарная задача сложного теплообмена", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:4 (2014), 711–719; *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:4 (2014), 719–726.

[7] А. Е. Ковтанюк, А. Ю. Чеботарев, "Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом", *Дифференциальные уравнения*, **50**:12 (2014), 1590–1597.

[8] Andrey E. Kovtanyuk, Alexander Yu. Chebotarev, Nikolai D. Botkin, and Karl-Heinz Hoffmann, "Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive convective radiative heat transfer", *J. Math. Anal. Appl.*, **412** (2014), 520–528.

[9] A. E. Kovtanyuk, A. Y. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Solvability of P1 approximation of a conductive-radiative heat transfer problem", *Appl. Math. Comput.*, **249** (2014), 247-252.

[10] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, and Karl-Heinz Hoffman, "Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model,", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **20** (2015), 776–784.

[11] A. Chebotarev, A. Kovtanyuk, G. Grenkin, N. Botkin, and K.-H. Hoffman, "Boundary optimal control problem of complex heat transfer model", *J. Math. Anal. Appl.*, **433**:2 (2016), 1243–1260.

[12] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects", *J. Math. Anal. Appl.*, **439** (2016), 678–689.

[13] Alexander Yu. Chebotarev, Andrey E. Kovtanyuk, Gleb V. Grenkin, Nikolai D. Botkin, and Karl Heinz Hoffmann, "Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model", *Applied Mathematics and Computation*, **289**:10 (2016), 371–380.

[14] A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, "Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer", *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, **51**:6 (2017), 2511–2519.

[15] A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange", *J. Math. Anal. Appl.*, **460**:2 (2018), 737–744.

[16] Alexander Yu. Chebotarev and Andrey E. Kovtanyuk and Nikolai D. Botkin, "Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **75** (2019), 262–269.

[17] A. Yu. Chebotarev, R. Pinnau, "An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer", *J. Math. Anal. Appl.*, **472**:1 (2019), 737–744.

[18] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, "Обратная задача для уравнений сложного теплообмена", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **59**:8 (2019), 1420–1430.

[19] А. Г. Колобов, Т. В. Пак, А. Ю. Чеботарев, "Стационарная задача радиационного теплообмена с граничными условиями типа Коши", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **59**:7 (2019), 1258–1263.

[20] А. Ю. Чеботарев, "Обратная задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **61**:2 (2021), 303–311.

[21] A. A. Amosov, "Unique Solvability of a Nonstationary Problem of Radiative - Conductive Heat Exchange in a System of Semitransparent Bodies", *Russian J. of Math. Phys.*, **23** (2016), 309-334.

[22] A. A. Amosov, "Unique Solvability of Stationary Radiative-Conductive Heat Transfer Problem in a System of Semitransparent Bodies", *Journal of Mathematical Sciences*, **224**:5

(2017), 618–646.

[23] A. A. Amosov, “Nonstationary problem of complex heat transfer in a system of semitransparent bodies with boundary-value conditions of diffuse reflection and refraction of radiation”, *Journal of Mathematical Sciences*, **233**:6 (201), 777-806.

[24] A. A. Amosov, N. E. Krymov, “On a Nonstandard Boundary Value Problem Arising in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems”, *Journal of Mathematical Sciences*, **244**:3 (2020), 357–377.

Поступила в редакцию
11 марта 2022 г.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-01-00113).

Chebotarev A. Yu.[1] Initial-boundary value problem for the equations of radiative heat transfer with Fresnel conjugation conditions. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2022. V. 22. No 1. P. 100–106.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

Non-local in time, unique solvability of an inhomogeneous initial-boundary value problem for a nonlinear system simulating complex heat transfer with conditions of reflection and refraction on the discontinuity surfaces of the refractive index is proved.

Key words: *quasi-static equations of complex heat transfer, Fresnel conjugation conditions, inhomogeneous initial-boundary value problem, non-local unique solvability.*

References

[1] Alexander Yu. Chebotarev and Gleb V. Grenkin and Andrey E. Kovtanyuk and Nikolai D. Botkin and Karl-Heinz Hoffmann, “Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **57** (2018), 290–298.

[2] A. Yu. Chebotarev, “Inhomogeneous Boundary Value Problem for Complex Heat Transfer Equations with Fresnel Matching Conditions”, *Differential Equations*, **56**:12 (2020), 1613–1618.

[3] A. Y. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk, “Quasi-static diffusion model of complex heat transfer with reflection and refraction conditions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **507**:125745 (2022).

[4] R. Pinnau, “Analysis of Optimal Boundary Control for Radiative Heat Transfer Modelled by the SP_1-System”, *Comm. Math. Sci.*, **5**:4 (2007), 951–969.

[5] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem”, *J. Math. Anal. Appl.*, **409**:2 (2014), 808–815.

[6] A. E. Kovtaniuk, A. Iu. Chebotarev, “Statsionarnaia zadacha slozhnogo teploobmena”, *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **54**:4 (2014), 711–719; *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:4 (2014), 719–726.

[7] A. E. Kovtaniuk, A. Iu. Chebotarev, “Statsionarnaia zadacha svobodnoi konvektsii s radiatsionnym teploobmenom”, *Differentsial’nye uravneniia*, **50**:12 (2014), 1590–1597.

[8] Andrey E. Kovtanyuk, Alexander Yu. Chebotarev, Nikolai D. Botkin, and Karl-Heinz Hoffmann, "Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive convective radiative heat transfer", *J. Math. Anal. Appl.*, **412** (2014), 520–528.

[9] A. E. Kovtanyuk, A. Y. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Solvability of P1 approximation of a conductive-radiative heat transfer problem", *Appl. Math. Comput.*, **249** (2014), 247-252.

[10] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, and Karl-Heinz Hoffman, "Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model,", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **20** (2015), 776–784.

[11] A. Chebotarev, A. Kovtanyuk, G. Grenkin, N. Botkin, and K.-H. Hoffman, "Boundary optimal control problem of complex heat transfer model", *J. Math. Anal. Appl.*, **433**:2 (2016), 1243–1260.

[12] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects", *J. Math. Anal. Appl.*, **439** (2016), 678–689.

[13] Alexander Yu. Chebotarev, Andrey E. Kovtanyuk, Gleb V. Grenkin, Nikolai D. Botkin, and Karl Heinz Hoffmann, "Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model", *Applied Mathematics and Computation*, **289**:10 (2016), 371–380.

[14] A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, "Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer", *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, **51**:6 (2017), 2511–2519.

[15] A. Yu. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange", *J. Math. Anal. Appl.*, **460**:2 (2018), 737–744.

[16] Alexander Yu. Chebotarev and Andrey E. Kovtanyuk and Nikolai D. Botkin, "Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **75** (2019), 262–269.

[17] A. Yu. Chebotarev, R. Pinnau, "An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer", *J. Math. Anal. Appl.*, **472**:1 (2019), 737–744.

[18] G. V. Grenkin, A. Iu. Chebotarev, "Obratnaia zadacha dlia uravnenii slozhnogo teploobmena", *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **59**:8 (2019), 1420–1430.

[19] A. G. Kolobov, T. V. Pak, A. Iu. Chebotarev, "Statsionarnaia zadacha radiatsionnogo teploobmena s granichnymi usloviiami tipa Koshi", *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **59**:7 (2019), 1258–1263.

[20] A. Iu. Chebotarev, "Obratnaia zadacha dlia uravnenii slozhnogo teploobmena s frenelevskimi usloviiami sopriazheniia", *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **61**:2 (2021), 303–311.

[21] A. A. Amosov, "Unique Solvability of a Nonstationary Problem of Radiative - Conductive Heat Exchange in a System of Semitransparent Bodies", *Russian J. of Math. Phys.*, **23** (2016), 309-334.

[22] A. A. Amosov, "Unique Solvability of Stationary Radiative-Conductive Heat Transfer Problem in a System of Semitransparent Bodies", *Journal of Mathematical Sciences*, **224**:5 (2017), 618–646.

[23] A. A. Amosov, "Nonstationary problem of complex heat transfer in a system of semitransparent bodies with boundary-value conditions of diffuse reflection and refraction of radiation", *Journal of Mathematical Sciences*, **233**:6 (201), 777-806.

[24] A. A. Amosov, N. E. Krymov, "On a Nonstandard Boundary Value Problem Arising in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems", *Journal of Mathematical Sciences*, **244**:3 (2020), 357–377.