Дальневосточный математический журнал. 2022. Т. 22. № 1. С. 125–137

УДК 517.5

© М. Ш. Шабозов[1], К. К. Палавонов[1,2]

Неравенства типа Джексона – Стечкина и значение поперечников некоторых классов функций в L_2

В работе найдены точные значения экстремальной характеристики специального вида на классах $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$, содержащей не только обобщённый модуль непрерывности, но также и усреднённое с весом $u(t-u)/t,\ 0 \leqslant u \leqslant t$ значение указанного модуля непрерывности. Полученный результат является распространением одной известной теоремы С. Б. Вакарчука для рассматриваемого обобщённого модуля непрерывности. Даны приложения указанной характеристики гладкости к решению одной экстремальной задачи и вычислены значения n-поперечников некоторых классов функции из L_2.

Ключевые слова: *наилучшие приближения, обобщённый модуль непрерывности, функции Стеклова, экстремальная характеристика, n-поперечники.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202213

Введение

Всюду далее $L_2 := L_2[0,2\pi]$ — пространство суммируемых с квадратом по Лебегу 2π-периодических функций, у которых норма

$$\|f\|_2 : = \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Через $\mathcal{T}_{2n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$:

$$\mathcal{T}_{2n-1} : = \left\{T_n : T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right\}.$$

[1] Таджикский национальный университет, 734025, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17.
[2] Таджикский государственный университет коммерции, 734061, г. Душанбе, ул. Дехоти, 1/2.
Электронная почта: shabozov@mail.ru (М. Ш. Шабозов), kurbonazar-1987@mail.ru (К. К. Палавонов).

Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\Big), \tag{1}$$

величина её наилучшего приближения элементами подпространства $\mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 = \inf\Big\{\|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}\Big\} = \\ = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right\}^{1/2}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $S_{n-1}(f)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье (1) функции f, а $\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $a_k(f), b_k(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции f.

Символом $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2.

В последнее время при решении экстремальных задач теории приближения часто используются обобщённые модули непрерывности (см., например, [1–13]), в которых вместо оператора сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$ используются различные усредняющие операторы. Так, например, в случае аппроксимации периодических функций тригонометрическими полиномами в работах [9–13] вместо обычного оператора сдвига использована функция Стеклова. Здесь мы продолжим указанную тематику. Для произвольной функции $f \in L_2$ вводим в рассмотрение функцию (оператора) Стеклова

$$S_h(f; x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+h)dt$$

и полагаем $S_{h,k}(f) := S_h(S_{h,k-1}(f))$, $k \in \mathbb{N}$, $S_{h,0}(f) \equiv f$.

Следуя [9], определим конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\begin{aligned} \Delta_h^1(f,x) :&= S_h(f,x) - f(x) = (S_h - E)(f,x), \\ \Delta_h^m(f,x) :&= \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f,\cdot),x) = (S_h - E)^m(f,x) = \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} S_{h,k}(f,x), \quad k = 2, 3, \ldots, \end{aligned}$$

где E — единичный оператор в L_2. Равенством

$$\Omega_m(f,t) \stackrel{def}{=} \sup\{\|\Delta_h^m(f)\|_2 : \quad 0 < h \leqslant t\} \tag{3}$$

определим обобщённый модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$. Введём обозначение

$$\operatorname{sinc} t := \left\{\frac{\sin t}{t},\ t \neq 0; \quad 1,\ \text{если } t = 0\right\}.$$

Легко показать, что для произвольной функции $f \in L_2$ [13, 14]

$$\|\Delta_h^m(f)\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \mathrm{sinc}\,(kh))^{2m} \rho_k^2(f), \tag{4}$$

используя которого запишем (3) в виде

$$\Omega_m^2(f,t) :\, = \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \mathrm{sinc}\,(kh))^{2m} \rho_k^2(f) : \quad 0 < h \leqslant t\right\}. \tag{5}$$

1. Нахождение констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина

Напомним, что под неравенствами типа Джексона – Стечкина в рассматриваемом нормированном пространстве понимают соотношения, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается через заданную характеристику гладкости самой функции или некоторой её производной.

При решении задач теории полиномиальной аппроксимации функций $f \in L_2$, связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leqslant \chi n^{-r} \Omega_m(f^{(r)}, t/n), \quad t > 0,$$

где $f \in L_2^{(r)}$ $\left(r \in \mathbb{Z}_+, f^{(0)} \equiv f\right)$, рассматривались различные экстремальные характеристики, приводящие к уточнению оценок сверху постоянных χ. С этой целью в серии работ [10–13] рассматривались экстремальные характеристики

$$\chi_{n,r,m,p}(q,t) :\, = \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{n^r \cdot E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t) q(t) dt\right)^{1/p}} \tag{6}$$

при различных значениях $n, m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, 0 < p \leqslant \infty$ и заданной весовой функции $q(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant h)$.

В данной заметке вводится в рассмотрение экстремальная характеристика вида

$$\mathscr{L}_{n,r,m}(t) :\, = \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{n^r \cdot E_{n-1}(f)}{\left(\Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t) + \dfrac{n^2}{t} \int\limits_0^t u(t-u) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, u) du\right)^m}, \tag{7}$$

содержащая, в отличие от характеристики (6), модуль непрерывности m-го порядка как под знаком интеграла с весом $t^{-1} \cdot u(t-u)$ $(0 \leqslant u \leqslant t)$, так и вне интеграла. Для характеристики (7) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пуст $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для любых чисел t, удовлетворяющих условию $0 < t \leqslant 3\pi/(4n)$, выполняется равенство*

$$\mathscr{L}_{n,r,m}(t) = \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m}. \tag{8}$$

Доказательство. В [9] доказано, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}^2(f) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin kh}{kh} \rho_k^2(f) + (E_{n-1}(f))^{2-\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{n^{r/m}} \cdot \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}; h). \tag{9}$$

Умножая обе части неравенства (9) на h и интегрируя по h в пределах от 0 до τ, будем иметь

$$\frac{\tau^2}{2} E_{n-1}^2(f) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1-\cos k\tau}{k^2} \rho_k^2(f) + (E_{n-1}(f))^{2-\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{n^{r/m}} \cdot \int_0^\tau h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}; h) dh.$$

Полученное неравенство снова проинтегрируем по τ в пределах от 0 до t. В итоге приходим к неравенству

$$\frac{t^3}{6} E_{n-1}^2(f) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{kt - \sin kt}{k^3} \rho_k^2(f) + (E_{n-1}(f))^{2-\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{n^{r/m}} \cdot \int_0^t \int_0^\tau h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}; h) dh d\tau. \tag{10}$$

Пользуясь формулой Дирихле, интеграл в правой части неравенства (10) запишем в виде

$$\int_0^t \int_0^\tau h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}; h) dh d\tau = \int_0^t \tau(t-\tau) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}; \tau) d\tau. \tag{11}$$

С учётом равенства (11), неравенство (10) приобретает вид

$$\begin{gathered} \frac{t^3}{6} E_{n-1}^2(f) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{kt - \sin kt}{k^3} \rho_k^2(f) \\ + (E_{n-1}(f))^{2-\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{n^{r/m}} \cdot \int_0^t \tau(t-\tau) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}; \tau) d\tau. \end{gathered} \tag{12}$$

Поделив обе части неравенства (12) на t и заменив под суммой число $1/k^2$, $(k \geqslant n)$ на $1/n^2$, будем иметь

$$\begin{gathered} \frac{t^2}{6} E_{n-1}^2(f) \leqslant \frac{1}{n^2} \left(E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin kt}{kt} \rho_k^2(f) \right) + \\ + (E_{n-1}(f))^{2-\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{t n^{r/m}} \cdot \int_0^t \tau(t-\tau) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}; \tau) d\tau. \end{gathered} \tag{13}$$

Применив к выражению в круглых скобках в правой части (13) неравенство (9) и выполнив простые операции, получаем

$$\frac{t^2}{6} E_{n-1}^2(f) \leqslant (E_{n-1}(f))^{2-\frac{1}{m}} \frac{1}{n^{2+r/m}} \left(\Omega_m^{1/m}(f^{(r)}; t) + \frac{n^2}{t} \int_0^t \tau(t-\tau) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}; \tau) d\tau \right),$$

откуда вытекает соотношение

$$\frac{t^2}{6}(E_{n-1}(f))^{1/m} \leqslant \frac{1}{n^{2+r/m}} \left(\Omega_m^{1/m}(f^{(r)};t) + \frac{n^2}{t} \cdot \int\limits_0^t \tau(t-\tau)\Omega_m^{1/m}(f^{(r)};\tau)d\tau \right).$$

Из последнего неравенства сразу следует, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$

$$\frac{n^r \cdot E_{n-1}(f)}{\left(\Omega_m^{1/m}(f^{(r)},t) + \dfrac{n^2}{t} \displaystyle\int\limits_0^t \tau(t-\tau)\Omega_m^{1/m}(f^{(r)},\tau)d\tau \right)^m} \leqslant \left(\frac{\sqrt{6}}{nt} \right)^{2m}. \tag{14}$$

Оценка сверху для величины (7) сразу следует из неравенства (14):

$$\mathscr{L}_{n,r,m}(t) \leqslant \left(\frac{\sqrt{6}}{nt} \right)^{2m}. \tag{15}$$

Для получения оценки снизу той же величины введём в рассмотрение функцию $f_0(x) = \cos nx$, принадлежащую классу $L_2^{(r)}$. Так как в силу равенств (2) и (5)

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \Omega_m(f_0^{(r)},t) = n^r \left(1 - \operatorname{sinc}(nt)\right)^m, \tag{16}$$

то мы имеем

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{n,r,m}(t) &\geqslant \frac{n^r \cdot E_{n-1}(f_0)}{\left(\Omega_m^{1/m}(f_0^{(r)},t) + \dfrac{n^2}{t} \displaystyle\int\limits_0^t \tau(t-\tau)\Omega_m^{1/m}(f_0^{(r)},\tau)d\tau \right)^m} = \\ &= \frac{n^r \cdot 1}{\left(n^{r/m}\left(1 - \operatorname{sinc}(nt)\right) + \dfrac{n^{2+r/m}}{t} \displaystyle\int\limits_0^t \tau(t-\tau)\left(1 - \operatorname{sinc}(n\tau)\right)d\tau \right)^m} = \\ &= \frac{n^r \cdot}{\left(n^{r/m}\left(1 - \operatorname{sinc}(nt)\right) + \dfrac{n^{2+r/m}t^2}{6} - n^{r/m}\left(1 - \operatorname{sinc}(nt)\right) \right)^m} = \left(\frac{\sqrt{6}}{nt} \right)^{2m}. \end{aligned} \tag{17}$$

Сопоставляя оценки сверху (15) с оценкой снизу (17), получаем требуемое равенство (8), чем и завершаем доказательство теоремы 1. □

Отметим, что результат теоремы 1 является распространением и обобщением хорошо известного результата С. Б. Вакарчука и А. Н. Щитова [3], доказанного для классического модуля непрерывности m-го порядка $\omega_m(f^{(r)},t)_2$ на случай обобщённого модуля непрерывности $\Omega_m(f^{(r)},t)_2$ функций f, принадлежащих множеству $L_2^{(r)}$. Из доказанной теоремы 1 вытекает следствие.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 для любых чисел $t \in (0, 3\pi/(4n)]$ справедливы неравенства*

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m} \leqslant \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\Omega_m(f^{(r)}, t)_2} \leqslant \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m} \left(1 + \frac{(nt)^2}{6}\right)^m. \tag{18}$$

В частности, из (18) при $t = \pi/(2n)$ следует двусторонняя оценка для константы в неравенстве Джексона – Стечкина

$$\left(\frac{2\sqrt{6}}{\pi}\right)^{2m} \leqslant \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\Omega_m(f^{(r)}, \pi/(2n))_2} \leqslant \left(\frac{2\sqrt{6}}{\pi}\right)^{2m} \left(1 + \frac{(\pi)^2}{24}\right)^m. \tag{19}$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (14), пользуясь тем, что $\Omega_m(f^{(r)}, t)$ возрастает для $t \in (0, 3\pi/(4n)]$, получаем

$$E_{n-1}(f)_2 \leqslant \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m} \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \Omega_m(f^{(r)}, t)_2 \left(1 + \frac{(nt)^2}{6}\right)^m,$$

откуда и следует оценка сверху

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r \cdot E_{n-1}(f)_2}{\Omega_m(f^{(r)}, t)_2} \leqslant \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m} \cdot \left(1 + \frac{(nt)^2}{6}\right)^m. \tag{20}$$

Выше при доказательстве оценки снизу для функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$ мы доказали равенства (16), пользуясь которыми запишем оценку снизу

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r \cdot E_{n-1}(f)_2}{\Omega_m(f^{(r)}, t)_2} \geqslant \frac{n^r \cdot E_{n-1}(f_0)_2}{\Omega_m(f_0^{(r)}, t)_2} = (1 - \operatorname{sinc}(nt))^{-m}. \tag{21}$$

Но так как при $t \in (0, 3\pi/(4n)]$, $\sin t > t - \dfrac{t^3}{6}$, то очевидно, что $(1 - \operatorname{sinc} t)^{-1} \geqslant \dfrac{6}{t^2}$, поэтому

$$(1 - \operatorname{sinc}(nt))^{-m} \geqslant \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m}, \quad 0 < nt \leqslant 3\pi/(4n), \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Пользуясь этим неравенством, из (21) получаем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r \cdot E_{n-1}(f)_2}{\Omega_m(f^{(r)}, t)_2} \geqslant \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m}. \tag{22}$$

Требуемое двойное неравенство получаем из (20) и (22). □

2. Значение поперечников некоторых классов периодических функций в L_2

Прежде чем привести другие результаты, напомним необходимые понятия и определения. Пусть S — единичный шар в L_2, $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2, $\Lambda_n \subset L_2$ — произвольное n-мерное подпространство, $\Lambda^n \subset L_2$ — подпространство коразмерности n, $\mathscr{L}: L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства L_2 в Λ_n; $\mathscr{L}^{\perp}: L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\right\},$$
$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - \mathrm{g}\| : \mathrm{g} \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$
$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}f\| : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$
$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_2\right\},$$
$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}^{\perp}f\| : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}^{\perp}L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским и проекционным n-поперечниками. В гильбертовом пространстве L_2 между перечисленными n-поперечниками справедливы следующие соотношения [14, 15]:

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leqslant d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leqslant d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \tag{23}$$

Также для $r \in \mathbb{Z}_+$ и $t \in (0, \infty)$ полагаем

$$\mathscr{F}_m^{(r)}(t) :\ = \left\{ f \in L_2^{(r)} :\ \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_2 + \frac{n^2}{t}\int\limits_0^t \tau(t-\tau)\Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, \tau)_2 d\tau \leqslant 1 \right\}.$$

Следуя [10], полагаем при $t=0$ значение функции $sinct$ равным 1, обозначим через t_* величину её аргумента, при котором эта функция достигает на полусегменте $[0, \infty]$ своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* есть минимальный положительный корень уравнения $t = \mathrm{tg}\, t$, $4{,}49 < t_* < 4{,}51$. Для $\mathfrak{M} \subset L_2$ полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}) = \sup\left\{E_{n-1}(f) :\ f \in \mathfrak{M}\right\},$$

и пусть

$$(1 - \operatorname{sinc} t)_* :\ = \begin{cases} 1 - \operatorname{sinc} t, & \text{если}\ \ 0 \leqslant t \leqslant t_*, \\ 1 -\ \operatorname{sinc} t_* & \text{если}\ t \geqslant t_*. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть $nt \leqslant t_*$. Тогда при любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства*

$$\gamma_{2n}(\mathscr{F}_m^{(r)}(t); L_2) = \gamma_{2n-1}(\mathscr{F}_m^{(r)}(t); L_2) = E_{n-1}(\mathscr{F}_m^{(r)}(t)) = \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m} \cdot \left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (14) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ получаем

$$E_{n-1}(f) \leqslant \left(\Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t) + \frac{n^2}{t}\int\limits_0^t \tau(t-\tau)\Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, \tau)d\tau\right)^m \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m} \cdot \frac{1}{n^r}.$$

Используя определение класса $\mathscr{F}_m^{(r)}(t)$ и соотношения (23), из последнего неравенства получим

$$\begin{aligned} \gamma_{2n}(\mathscr{F}_m^{(r)}(t); L_2) \leqslant \gamma_{2n-1}(\mathscr{F}_m^{(r)}(t); L_2) \leqslant d_{2n-1}(\mathscr{F}_m^{(r)}(t); L_2) \leqslant \\ \leqslant E_{n-1}(\mathscr{F}_m^{(r)}(t)) \leqslant \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m} \cdot \frac{1}{n^r}. \end{aligned} \tag{25}$$

С целью получения оценок снизу вышеперечисленных n-поперечников введём в рассмотрение $(2n+1)$-мерный шар полиномов $S_{2n+1} \in L_2$:

$$S_{2n+1} := \left\{T_n \in \mathcal{T}_{2n+1} : \ \|T_n\| \leqslant \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m} \cdot \frac{1}{n^r}\right\}.$$

Учитывая ограничение $nt \leqslant t_*$ и используя неравенство (см. [10], формула (17))

$$\Omega_m^{1/m}(T_n^{(r)}, t) \leqslant n^{r/m}(1 - \operatorname{sinc}(nt))_* \cdot \|T_n\|^{1/m},$$

для любого полинома $T_n \in S_{2n+1}$ после некоторых простых вычислений получим

$$\begin{aligned} \Omega_m^{1/m}\left(T_n^{(r)}, t\right) + \frac{n^2}{t}\int\limits_0^t \tau(t-\tau)\Omega_m^{1/m}\left(T_n^{(r)}, \tau\right)d\tau \leqslant \\ \leqslant \left\{(1 - \operatorname{sinc}(nt)) + \frac{n^2}{t}\int\limits_0^t \tau(t-\tau)(1 - \operatorname{sinc}(n\tau))d\tau\right\} \cdot n^{r/m} \cdot \|T_n\| = \\ = \left\{(1 - \operatorname{sinc}(nt)) + \frac{(nt)^2}{6} - (1 - \operatorname{sinc}(nt))\right\} \cdot \frac{6}{(nt)^2} = 1. \end{aligned}$$

Этим доказано, что $S_{2n+1} \subset \mathscr{F}_m^{(r)}(t)$. В силу определения бернштейновского n-поперечника и неравенств (23) запишем оценку снизу

$$\gamma_{2n}(\mathscr{F}_m^{(r)}(t); L_2) \geqslant b_{2n}(\mathscr{F}_m^{(r)}(t); L_2) \geqslant b_{2n}(S_{2n+1}, L_2) \geqslant \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m} \cdot \frac{1}{n^r}. \tag{26}$$

Сопоставляя оценки сверху (25) и снизу (26), получим требуемые равенства (24), чем и завершим доказательство теоремы 2. □

Хорошо известно, что для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ $(r\in\mathbb{Z}_+;\ L_2^{(0)}\equiv L_2)$ все её промежуточные производные $f^{(\nu)}$ $(\nu=1,2,\ldots,r-1;\ r\geqslant 2)$ также принадлежат пространству L_2. Поэтому имеет смысл наравне с величиной наилучшего полиномиального приближения $E_{n-1}(f)_2$ выяснить также поведение величины $E_{n-1}(f^{(\nu)})_2$ $(\nu=1,2,\ldots,r-1;\ r\geqslant 2,\ r\in\mathbb{N})$ на некотором подклассе функций $\mathfrak{M}^{(r)}\subseteq L_2^{(r)}$ или на самом классе $L_2^{(r)}$, то есть требуется найти точные значения величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(\nu)}\left(\mathfrak{M}^{(r)}\right)_2 : = \sup\{E_{n-1}(f^{(\nu)})_2 : f\in\mathfrak{M}^{(r)}\}. \tag{27}$$

С этой целью при любых $n,m,r\in\mathbb{N}$, $0\leqslant\nu\leqslant r$, $0<t\leqslant 3\pi/(4n)$, положим

$$\mathscr{L}_{n,r-\nu,m}(t) : = \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}} \frac{n^{r-\nu}\cdot E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\left(\Omega_m^{1/m}(f^{(r)},t)_2+\dfrac{n^2}{t}\displaystyle\int_0^t u(t-u)\Omega_m^{1/m}(f^{(r)},u)du\right)^m}. \tag{28}$$

Имеет место следующее утверждение, являющееся также следствием теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть $n,m,r\in\mathbb{N}$, $0\leqslant\nu\leqslant r$. Тогда для любых чисел t, удовлетворяющих условию $0<t\leqslant 3\pi/(4n)$, справедливо равенство*

$$\mathscr{L}_{n,r-\nu,m}(t) = \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m} \tag{29}$$

и, в частности,

$$\mathscr{L}_{n,r-\nu,m}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \left(\frac{2\sqrt{6}}{\pi}\right)^{2m}. \tag{30}$$

Доказательство. В правой части равенства (28) положим $f^{(\nu)}\equiv \mathrm{g}$. Тогда из того, что $f^{(r)}\in L_2$, следует, что $\mathrm{g}^{(r-\nu)}\in L_2$, то есть $\mathrm{g}\in L_2^{(r-\nu)}$. Поэтому учитывая равенство (8), получаем

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{n,r-\nu,m}(t) : = \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq \mathrm{const}}} \frac{n^{r-\nu}\cdot E_{n-1}(f^{(\nu)})_2}{\left(\Omega_m^{1/m}(f^{(r)},t)_2+\dfrac{n^2}{t}\displaystyle\int_0^t u(t-u)\Omega_m^{1/m}(f^{(r)},u)du\right)^m} = \\ = \sup_{\substack{\mathrm{g}\in L_2^{(r-\nu)}\\ \mathrm{g}\neq \mathrm{const}}} \frac{n^{r-\nu}\cdot E_{n-1}(\mathrm{g})_2}{\left(\Omega_m^{1/m}(\mathrm{g}^{(r-\nu)},t)_2+\dfrac{n^2}{t}\displaystyle\int_0^t u(t-u)\Omega_m^{1/m}(\mathrm{g}^{(r-\nu)},u)_2\,du\right)^m} :\equiv \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m},\end{aligned} \tag{31}$$

откуда и следует требуемое равенство (29). Полагая в (29) $t=\pi/(2n)$, получаем (30). Теорема 3 доказана. □

3. Решение экстремальной задачи в L_2

Приводим решение экстремальной задачи (27) для введенного выше класса $\mathscr{F}_m^{(r)}(t)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $r \geqslant \nu$. Тогда для любого $t \in (0, 3\pi/(4n)]$ имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(\nu)}(\mathscr{F}_m^{(r)}(t))_2 = \sup\left\{E_{n-1}(f^{(\nu)}):\ f \in \mathscr{F}_m^{(r)}(t)\right\} = \frac{1}{n^{r-\nu}} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m}. \qquad (32)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенств (28) и (29) для произвольной функции $f \in \mathscr{F}_m^{(r)}(t)$ вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f^{(\nu)})_2 \leqslant \frac{1}{n^{r-\nu}} \cdot \left(\Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t) + \frac{n^2}{t}\int_0^t u(t-u)\Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, u)\, du\right)^m \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m}. \qquad (33)$$

Если теперь предположить, что $f \in L_2^{(r)} \cap \mathscr{F}_m^{(r)}(t)$, то из неравенства (33) сразу получаем

$$E_{n-1}(f^{(\nu)})_2 \leqslant \frac{1}{n^{r-\nu}} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m},$$

откуда и следует оценка сверху для величины, расположенной в левой части равенства (32):

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(\nu)}(\mathscr{F}_m^{(r)}(t))_2 \leqslant \frac{1}{n^{r-\nu}} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m}. \qquad (34)$$

Для получения аналогичной оценки снизу вводим в рассмотрение функцию

$$f_0(x) = \frac{1}{n^r} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m} \cdot \cos nx. \qquad (35)$$

Функция f_0 является элементом шара S_{2n+1}, введенного при доказательстве теоремы 2, и, следовательно, является элементом класса $\mathscr{F}_m^{(r)}(t)$. Дифференцируя ν раз функцию (35), получаем

$$f_0^{(\nu)}(x) = \frac{1}{n^{r-\nu}} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m} \cdot \cos\left(nx + \frac{\nu\pi}{2}\right),$$

откуда

$$E_{n-1}(f_0^{(\nu)})_2 = \frac{1}{n^{r-\nu}} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m}, \qquad (36)$$

но тогда, учитывая равенство (36), запишем оценку снизу

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{n-1}^{(\nu)}\left(\mathscr{F}_m^{(r)}(t)\right)_2 &= \sup\left\{E_{n-1}(f^{(\nu)}) : f \in \mathscr{F}_m^{(r)}(t)\right\} \geqslant \\ &\geqslant E_{n-1}\left(f_0^{(r)}\right) = \frac{1}{n^{r-\nu}} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{nt}\right)^{2m}.\end{aligned} \qquad (37)$$

Требуемое равенство (32) получаем из сопоставления оценки сверху (34) с оценкой снизу (37), чем и завершаем доказательство теоремы 4. □

Список литературы

[1] Z. Ditzian, V. Totik, *Moduli of smoothness*, NY:Springer-Verlag Springer set. Comput. Math., Berlin, 1987.

[2] К. В. Руновский, “О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_{p,}$ $(0 < p < 1)$”, *Матем. сб.*, **185**:8 (1994), 81–102.

[3] С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, “Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций”, *Укр. мат. журн.*, **56**:11 (2004), 1458–1466.

[4] С. Н. Васильев, “Точное неравенство Джексона–Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденными произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами”, *Докл. РАН.*, **385**:1 (2002), 11–14.

[5] А. И. Казко, А. В. Рождественский, “О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности”, *Мат. заметки*, **73**:5 (2003), 783–788.

[6] А. В. Иванов, В. И. Иванов, “Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом”, *Мат. заметки*, **94**:3 (2013), 338–348.

[7] М. К. Потапов, “О свойствах и о применении в теории приближений одного свойства операторов обобщенного сдвига”, *Мат. заметки*, **69**:3 (2001), 412–426.

[8] Н. П. Пустовойтов, “Оценка наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами через усредненные разности и многомерная теорема Джексона”, *Матем. сб.*, **188**:10 (1997), 95–108.

[9] В. А. Абилов, Ф. В. Абилова, “Некоторые вопросы приближения $2\pi -$ периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$”, *Мат. заметки*, **76**:6 (2004), 803–811.

[10] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, “Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2”, *Мат. заметки*, **92**:4 (2012), 497–514.

[11] М. Ш. Шабозов, К. Тухлиев, “Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2”, *Мат. заметки*, **94**:6 (2013), 908–917.

[12] М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, “Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2”, *Сибир. матем. журнал.*, **52**:6 (2011), 1414–1427.

[13] К. Тухлиев, “Наилучшие приближения и поперечники некоторых классов свёрток в L_2”, *Труды ИМ и М УрО РАН*, **22**:4 (2016), 284–294.

[14] A. Pinkus, “n-Widths in Approximation Theory.”, *Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo.*, 1985, 252.

[15] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976.

Shabozov M. Sh.[1], *Palavonov K.K.*[1,2] Jackson – Stechkin Inequality and Values of Widths of Some Classes of Functions in L_2. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2022. V. 22. No 1. P. 125–137.

[1] Tajik National University, Dushanbe, Tajikistan
[2] Tajik State University of Commerce, Dushanbe, Tajikistan

ABSTRACT

The sharp values of extremal characteristic of special form for classes $L_2^{(r)}$, $(r \in \mathbb{Z}_+)$ containing not only averaged module of continuity but also the averaged with weight $u(t-u)/t$, $0 \leqslant u \leqslant t$ of given modulus continuity is calculated. The obtained result is the spreading of well-known S.B. Vakarchuk theorem about averaged module of continuity. For the given characteristic of smoothness, is given an application for the solution of one extremal problem and the values of n-widths for some classes of functions in L_2 is calculated.

Key words: *best approximations, generalized modulus of continuity, Steklov functions, extreme characteristic, n-widths.*

References

[1] Z. Ditzian, V. Totik, *Moduli of smoothness*, NY:Springer-Verlag Springer set. Comput. Math., Berlin, 1987.

[2] K. V. Runovskiy, "About the approach families of linear polynomial operators in the spaces L_p $(0 < p < 1)$", *Math. col.*, **185**:8 (1994), 81–102.

[3] S. B. Vakarchuk, A. N. Shitov, "Best polynomial approximations in L_2 and widths some classes of functions", *Ukr. math. journ.*, **56**:11 (2004), 1458–1466.

[4] S. N. Vasilev, "Exact inequality Jackson-Stechkin in L_2 with modulus of continuity generated by an arbitrary finite-difference operator with constant coefficients", *Dokl. RAN.*, **385**:1 (2002), 11–14.

[5] A. I. Kazko, A. V. Rozhdestvenskiy, "On Jackson's inequality with generalized modulus of continuity", *Math notes*, **73**:5 (2003), 783–788.

[6] A. V. Ivanov, V. I. Ivanov, "Optimal arguments in Jackson's inequality in space $L_2(\mathbb{R}^d)$ with power weight", *Math notes*, **94**:3 (2013), 338–348.

[7] M. K. Patapov, "About properties and about application in approximation theory of one property of the operators generalized shift", *Math notes*, **69**:3 (2001), 412–426.

[8] N. P. Pustovoytov, "Grade best approximations of periodic functions by trigonometric polynomials in terms of the averaged differences and the multidimensional Jackson theorem", *Math. col.*, **188**:10 (1997), 95–108.

[9] V. A. Abilov, F. V. Abilova, "Some questions of approximation of 2π-periodic functions by sums Fourier in the space $L_2(2\pi)$", *Math notes*, **76**:6 (2004), 803–811.

[10] S. B. Vakarchuk, B. I. Zabutnaya, "Jackson-Stechkin type inequalities for special modules continuities and diameters of functional classes in space L_2", *Math notes*, **92**:4 (2012), 497–514.

[11] M. Sh. Shabozov, K. Tukhliev, "Best polynomial approximations and widths of some functional classes in L_2", *Math notes*, **94**:6 (2013), 908–917.

[12] M. Sh. Shabozov, G. A. Usupov, "Sharp constants in Jackson-type inequalities and sharp

the values of the diameters of some classes of functions in L_2”, *Sbir. math. journal*, **52**:6 (2011), 1414–1427.

[13] K. Tukhliev, “Best approximations and diameters of some classes of convolutions in L_2”, *Trudi IM i M UrO RAN*, **22**:4 (2016), 284–294.

[14] A. Pinkus, “n-Widths in Approximation Theory.”, *Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo.*, 1985, 252.

[15] V. M. Tikhomirov, *Some approximation theory*, MGU, M, 1976.