Дальневосточный математический журнал. 2023. Т. 23. № 1. С. 12–15

УДК 517.583+512.742.72
MSC2020 33E05

© В. А. Быковский[1], М. Д. Монина[1]

Периодическое ультрадискретное преобразование пространства

В предыдущих работах были построены пять периодических ультрадискретных преобразований плоскости. В настоящей работе построено такого типа преобразование для трёхмерного пространства.

Ключевые слова: *нелинейные рекуррентные последовательности, нелинейные периодические преобразования, тропические последовательности.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202302

Введение

Пусть $S_4(n)$ (n — целое) — последовательность рациональных функций Сомос-4. Она определяется рекуррентным соотношением

$$S_4(n+2)S_4(n-2) = \alpha S_4(n+1)S_4(n-1) + \beta S_4^2(n) \tag{1}$$

и начальными значениями $S_4(-1), S_4(0), S_4(1), S_4(2)$.

В работе [1] (см. также [2] и [3] было доказано, что

$$S_4(n) = S_4^{a(n)}(-1)S_4^{b(n)}(0)S_4^{c(n)}(1)S_4^{d(n)}(2)P_n\Big(\alpha, \beta, S_4(-1), S_4(0), S_4(1), S_4(2)\Big),$$

где $a(n), b(n), c(n), d(n)$ — последовательность целых чисел, а P_n — полиномы с неотрицательными целыми коэффициентами, которые не делятся на входящие в них переменные.

Разделив обе части соотношения (1) на $S_4^2(n)$, получим рекуррентное соотношение

$$u_4(n+1)u_4^2(n)u_4(n-1) = \alpha u_4(n) + \beta. \tag{2}$$

где

$$u_4(n) = \frac{S_4(n+1)S_4(n-1)}{S_4^2(n)}.$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680038, г. Хабаровск, ул. Серышева, 60, оф. 312.
Электронная почта: `admin_khv@iam.dvo.ru` (В. А. Быковский).

Соотношение (2), рассматриваемое само по себе, определяет рекуррентную последовательность $u_4(n)$ с начальными значениями $u_4(0)=x$ и $u_4(1)=y$. При этом

$$u_4(n) = x^{p_4(n)} y^{q_4(n)} \frac{R_n(\alpha,\beta,x,y)}{Q_n(\alpha,\beta,x,y)},$$

где $p_4(n)$ и $q_4(n)$— последовательность целых чисел, а R_n и Q_n — взаимно простые полиномы с неотрицательными целыми коэффициентами, которые не делятся на переменные α,β,x,y.

Из соотношения (2) следует, что элементы последовательности $p_4(n)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$p_4(n+1) + 2p_4(n) + p_4(n-1) = \min\{p_4(n), 0\}.$$

Оно, после вычитания из обеих частей $2p_4(n)+p_4(n-1)$, преобразуется к виду

$$p_4(n+1) = \min\Big\{ -p_4(n-1) - p_4(n), -p_4(n-1) - 2p_4(n)\Big\}. \tag{3}$$

Последовательность $p_4(n)$ определяется однозначно соотношением (3) и начальными значениями $p_4(0)=1, p_4(1)=0$. По той же причине $q_4(n)$ определяется однозначно тем же соотношением (3) и начальными значениями $q_4(0)=0, q_4(1)=1$. Обе последовательности периодические с периодом 8.

Пусть

$$T_4(u,v) = (v,w), \quad w = \min\big\{ -u-v, -u-2v\big\},$$

— преобразование плоскости в себя. В соответствии с (3) оно переводит пару $\big(p_4(n-1), p_4(n)\big)$ в $\big(p_4(n), p_4(n+1)\big)$. В работе [3] было доказано, что T_4 периодическое преобразование с периодом 8 ($T_4^9=T_4$). Более простое доказательство этого утверждения для T_4 и четырёх других подобного типа преобразований $(u,v)\to(v,w)$ с

$$w = \min\big\{ -u-v, u-v\big\}, \min\big\{ -u, -u+v\big\},$$
$$\min\big\{ -u-v, -u+v\big\}, \min\big\{ -u-v, -u-3v\big\}.$$

Последовательность Сомос-5 определяется рекуррентным соотношением

$$S_5(n+3)S_5(n-2) = \alpha S_5(n+2)S_5(n-1) + \beta S_5(n+1)S_5(n) \tag{4}$$

и начальными значениями $S_5(-2), S_5(-1), S_5(0), S_5(1), S_5(2)$. При этом (см. [1,2])

$$S_5(n) = \left(\prod_{-2\leqslant i\leqslant 2} S_5^{a_i(n)}(i)\right) P_n\Big(\alpha,\beta,S_5(-2),S_5(-1),S_5(0),S_5(1),S_5(2)\Big),$$

где $a_i(n)$ — последовательности целых чисел, а P_n — полиномы с неотрицательными целыми коэффициентами, которые не делятся на входящие в них переменные.

После деления обеих частей соотношения (4) на $S_5(n+1)S_5(n)$ получим равенство

$$u_5(n+2)u_5^2(n+1)u_5^2(n)u_5(n-1) = \alpha u_5(n+1)u_5(n) + \beta. \tag{5}$$

Положив $v(n)=u_5(n+1)u_5(n)$ (см. [4]), получим рекуррентное соотношение

$$v(n+1)v(n)v(n-1) = \alpha v(n) + \beta,$$

которое после процедуры ультадискретизации превращается в равенство

$$p(n+1) = \min\Big\{-p(n), -p(n)-p(n-1)\Big\}.$$

Ему соответствует периодическое преобразование плоскости $U:(x,y)\to(y,z)$, $z=\min\big\{-x,-x-y\big\}$, построенное в [3] (см. также [5]).

Ультрадискретизация соотношения (5) приводит к рекуррентному равенству

$$p_5(n+2)+2p_5(n+1)+2p_5(n)+p_5(n-1) = \min\Big\{p_5(n+1)+p_5(n), 0\Big\},$$

которое преобразуется к виду

$$p_5(n+2) = \min\Big\{-p_5(n+1)-p_5(n)-p_5(n-1), -p_5(n+1)-2p_5(n)-2p_5(n-1)\Big\}.$$

Ему сопоставим преобразование пространства

$$T:(x,y,z)\to(y,z,w) \quad \text{с} \quad w = \min\Big\{-x-y-z, -x-2y-2z\Big\}.$$

Численные примеры показывают, что справедливо следующее утверждение.

Гипотеза. Преобразование T на всём пространстве периодическое с периодом 14.

Следующее утверждение подтверждает эту гипотезу.

Теорема 1. *Преобразование T на октанте*

$$\Gamma = \Big\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \;\Big|\; \alpha\geqslant 0, \beta\geqslant 0, \gamma\geqslant 0\Big\}$$

периодическое с периодом 14.

Доказательство. Вычисления показывают, что для любой точки (α,β,γ) из Γ

$$T(\Gamma)=(\beta,\gamma,-\alpha-2\beta-2\gamma), \qquad T^2(\Gamma)=(\gamma,-\alpha-2\beta-2\gamma,\alpha+\beta+\gamma),$$
$$T^3(\Gamma)=(-\alpha-2\beta-2\gamma,\alpha+\beta+\gamma,\beta), \qquad T^4(\Gamma)=(\alpha+\beta+\gamma,\beta,-\alpha-2\beta),$$
$$T^5(\Gamma)=(\beta,-\alpha-2\beta,-\gamma), \qquad T^6(\Gamma)=(-\alpha-2\beta,-\gamma,\alpha+\beta+\gamma),$$
$$T^7(\Gamma)=(-\gamma,\alpha+\beta+\gamma,-\alpha), \qquad T^8(\Gamma)=(\alpha+\beta+\gamma,-\alpha,-2\beta-\gamma),$$
$$T^9(\Gamma)=(-\alpha,-2\beta-\gamma,\beta), \qquad T^{10}(\Gamma)=(-2\beta-\gamma,\beta,\alpha+\beta+\gamma),$$
$$T^{11}(\Gamma)=(\beta,\alpha+\beta+\gamma,-2\alpha-2\beta-\gamma), \qquad T^{12}(\Gamma)=(\alpha+\beta+\gamma,-2\alpha-2\beta-\gamma,\alpha),$$
$$T^{13}(\Gamma)=(-2\alpha-2\beta-\gamma,\alpha,\beta), \qquad T^{14}(\Gamma)=(\alpha,\beta,\gamma).$$

Теорема полностью доказана. □

Список литературы

[1] R. Robinson, “Periodicity of Somos sequences”, *Proceedings of the AMS*, **116**:3 (1992), 613–619.

[2] S. Fomin and A. Zelevinsky, “The Laurent Phenomenon”, *Adv. Appl. Math.*, **28** (2002), 119–144.

[3] A. Nobe, “QRT maps and tropical elliptic curves”, *J. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **41**:12 (2008), 125205, 12 pp.

[4] Allan P. Fordy and Andrew Hone, “Symplectic Maps from Cluster Algebras”, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, **7** (2011), 091, 12 pp.

[5] В. А. Быковский, “Периодические ультрадискретные преобразования плоскости”, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **500** (2021), 23–25.

Поступила в редакцию
29 ноября 2022 г.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-11-00065, https://rscf.ru/project/19-11-00065/

Bykovskii V. A.[1], *Monina M. D.*[1] Periodic ultradiscrete transformations of the space. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2023. V. 23. No 1. P. 12–15.

[1] Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

In previous works we have constructed five periodic ultradiscrete transformations of the plane. In the present work we construct similar transformation for 3-dimensional space.

Key words: *nonlinear recurrent sequences, nonlinear periodic transformations, tropical sequences.*