Дальневосточный математический журнал. 2023. Т. 23. № 1. С. 16–26

УДК 519,1
MSC2020 52C20

© М. Д. Дмитриев [1], Ф. Ю. Ожегов[1]

Оклеивание прямоугольника квадратами с обеих сторон

В работе приводится элементарное доказательство теоремы Кеньёна о том, что периодическое замощение плоскости квадратами с периодами $(1,0)$ и $(0,\lambda)$ возможно только тогда, когда $\lambda = p \pm \sqrt{q^2 - r^2}$ для некоторых рациональных $p \geqslant q \geqslant r \geqslant 0$. Доказывается аналогичный новый результат об оклеивании прямоугольника квадратами с двух сторон в один слой. Также в работе доказано необходимое и достаточное условие для оклеивания равными квадратами.

Ключевые слова: *периодические замощения, квадрат, прямоугольник, плоскость.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202303

Введение

В данной работе решена следущая задача:

Дан конверт в форме прямоугольника $a \times b$. При каких вещественных a и b его можно оклеить равными квадратными марками без просветов и наложений с обеих сторон? Квадраты разрешается перегибать через край прямоугольника.

Теорема 1. *Имеют место следующие утверждения:*

(a) *Прямоугольник $1\times\lambda$ можно оклеить конечным числом квадратов без просветов и наложений с двух сторон в один слой только тогда, когда $\lambda = p \pm \sqrt{q^2 - r^2}$ для некоторых рациональных $p \geqslant q \geqslant r \geqslant 0$;*

(b) *Оклеить прямоугольник $1 \times \lambda$ равными квадратами с двух сторон в один слой можно тогда и только тогда, когда $\lambda = p \pm \sqrt{p^2 - r^2}$, где $p \geqslant r \geqslant 0$ рациональны.*

Заметим, что условие для случая равных квадратов отличается от случая произвольных квадратов. Понятие оклеивания будет сформулировано в определении 1 ниже.

[1] Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, факультет математики, Россия, Москва Усачева 6
Электронная почта: `vbif434246@yandex.ru` (М. Д. Дмитриев), `Fedor057@yandex.ru` (Ф. Ю. Ожегов).

Рассматриваемая задача похожа на задачу о разрезании многоугольников на квадраты и о покрытии квадратами двумерных поверхностей [1, 2]. Она берет начало из знаменитой теоремы Дена [3]: *прямоугольник* $a \times b$ *разрезается на квадраты тогда и только тогда, когда* a/b *рационально.* Случай шестиугольников рассмотрен в [2, 4, 5].

В ходе доказательства теоремы 1 мы используем идею из работы [6] о сопоставлении оклеиванию конверта периодического замощения плоскости и идею из работы [7] о представлении этого замощения в виде объединения счетного числа полос квадратов.

Начнем с неформальной мотивировки. Покрасим стороны конверта в два цвета, положим его на плоскость и начнем его перекатывать через стороны. Таким образом получим прямоугольную решетку Λ на плоскости. Оклеивание конверта даст периодическое замощение плоскости, переходящее в себя при центральных симметриях относительно узлов решетки Λ. Тогда исходная задача сводится к поиску таких замощений. Периодические замощения изучались Кеньеном [2], мы приведем элементарное доказательство его результата.

Теорема 2 Ср. [2, теорема 10]. *Периодическое замощение плоскости квадратами с периодами* $(1, 0)$ *и* $(0, \lambda)$ *существует только тогда, когда* $\lambda = p \pm \sqrt{q^2 - r^2}$ *для некоторых рациональных* $p \geqslant q \geqslant r \geqslant 0$.

Соглашение. Если λ является рациональным числом, то утверждения теорем 1 и 2 очевидны, так как существует простой пример замощения (оклеивания). Далее мы считаем, что λ иррационально. Также в дальнейшем будем считать, что ось Ox горизонтальна, а Oy вертикальна.

Определение 1. Зафиксируем декартову систему координат на плоскости и иррациональное число λ.

Решетку $\Lambda = \{(m\lambda, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$ назовем *порожденной* прямоугольником $1 \times \lambda$. Введем два отношения эквивалентности. Назовем две точки плоскости *просто эквивалентными*, если одну можно перевести в другую паралельным переносом на вектор решётки. Назовем две точки плоскости *сложно эквивалентными*, если одну можно перевести в другую композицией центральных симметрий относительно узлов решетки Λ.

Периодическим замощением плоскости квадратами *с периодами* $(1, 0)$ *и* $(0, \lambda)$ назовем такое конечное множество Γ_1 непересекающихся по внутренним точкам квадратов на плоскости, что

1) любая точка плоскости просто эквивалентна некоторой точке объединения квадратов из множества Γ_1;

2) никакие две точки внутренности объединения квадратов из множества Γ_1 не просто эквивалентны.

Оклеиванием (с двух сторон в один слой) прямоугольника $1 \times \lambda$ квадратами назовем такое конечное множество Γ_2 непересекающихся по внутренним точкам квадратов на плоскости, что:

1) любая точка плоскости сложно эквивалентна некоторой точке объединения квадратов множества Γ_2;

2) никакие две точки внутренности объединения квадратов из множества Γ_2 не сложно эквивалентны.

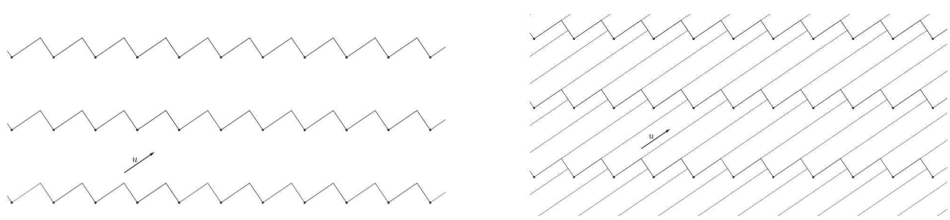
Направлением замощения (или оклеивания) назовём такой вектор u, что стороны квадратов из множества Γ_1 (или Γ_2) либо паралельны, либо перпендикулярны u.

Обозначим через $2\Lambda = \{(2m\lambda, 2n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$ подрешётку решётки Λ.

Такие определения помогают сразу рассматривать оклеивание конверта квадратами как некий объект на плоскости.

1. Доказательство теорем 2 и 1(a)

Пусть дано непараллельное оси Ox направление u замощения, или оклеивания. Между каждыми соседними по оси Ox узлами решётки Λ — соответственно, 2Λ для теоремы 1(a) — нарисуем *ступеньку* (т.е. два перпендикулярных отрезка с общим концом, ордината которого больше ординаты этих узлов), один из отрезков которой параллелен u, а другой перпендикулярен, как на рис. 1a. Далее проведём из каждой *вершины* ступеньки (т.е. общего конца двух отрезков) отрезки, параллельные u, до пересечения с другой построенной ступенькой, как на рис. 1b. Получим замощение плоскости L-образными шестиугольниками, которые могут вырождаться в прямоугольники. Назовём их *уголками, построенными по вектору u для решётки Λ (соответственно для подрешетки 2Λ)*. Отметим, что это определение имеет смысл для любого вектора u, не параллельного оси Ox, необязательно показывающего направление какого-то замощения или оклеивания.



(a) (b)

Рис. 1. (из [6]) Разбиение на уголки

Назовём уголок *разрезаемым*, если можно взять несколько квадратов (необязательно равных), как-то разрезать каждый из них на конечное число прямоугольников, а затем из всех получившихся прямоугольников составить данный уголок.

Лемма 1 [6, лемма 2]. *Выполнены утверждения:*

(a) плоскость можно периодически замостить квадратами вдоль заданного направления только тогда, когда уголок, построенный по этому направлению, разрезаем;

(b) *если прямоугольник можно оклеить квадратами вдоль заданного направления, то уголок, построенный по этому направлению, разрезаем.*

Доказательство леммы 1(a). Заметим, что уголки, которыми мы замостили плоскость, совмещаются параллельными переносами на векторы решётки Λ. Более того, *линии разреза* (т.е. множество точек плоскости, эквивалентных граничным точкам квадратов из множества Γ_1), проведённые внутри каждого уголка, также совмещаются. Это означает, что если квадрат на плоскости разбивается сторонами уголков на несколько частей, то равные этим частям лежат в каждом из уголков. То есть, разбив уголок на несколько частей, мы сможем сложить из них квадраты. И так как при этом все линии разреза будут параллельны сторонам квадратов, то и наоборот — мы сможем разбить квадраты на прямоугольники и сложить из них уголок. А это и есть определение разрезаемости. □

Доказательство леммы 1(b) получается из доказательства леммы 1(a) заменой решётки Λ на 2Λ.

Определение 2 ср. с [6]. Зафиксируем некоторый уголок и его разрезание на прямоугольники. Пусть уголок получается вырезанием прямоугольника $c \times d$ (возможно, выраждающегося в точку) из прямоугольника $a \times b$, имеющего с первым общую вершину. Пусть $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots < r_k$ – все длины сторон прямоугольников разрезания. Обозначим

$$P = \{a; \lambda a; d; \lambda d; b; \lambda b; c; \lambda c; r_1; \lambda r_1; r_2; \lambda r_2; r_3; \lambda r_3; \ldots; r_k; \lambda r_k\}.$$

Выберем специальным образом числа $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n \in P$, чтобы любое $p \in P$ единственным образом представлялось в виде $p = p_0 a + p_1 \lambda a + p_2 t_0 + \ldots + p_{n+2} t_n$ с рациональными p_i (”базис“ множества P над $\mathbb{Q}$). Сделаем это так: выпишем в строку все числа из P в указанном порядке, а потом начиная с λa будем выбирать те, которые не выражаются в виде линейной комбинации с рациональными коэффициентами через предыдущие. Это и будут искомые $t_0, t_1, t_2, ..., t_n$. В частности, либо $t_0 = d$, либо $d = d_0 a + d_1 \lambda a$ с рациональными d_0, d_1.

Обозначим $P' = \{a, \lambda a, t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}$. Назовём число *хорошим*, если оно выражается в виде линейной комбинации с рациональными коэффициентами через числа из P'. Пусть даны вещественное число x и прямоугольник с хорошими сторонами $z_0 a + z_1 \lambda a + z_2 t_0 + \ldots + z_{n+2} t_n$ и $w_0 a + w_1 \lambda a + w_2 t_0 + ... + w_{n+2} t_n$, где все z_i и w_i рациональны. *x-площадью* прямоугольника назовём число $(z_0 + z_1 x)(w_0 + w_1 x)$. Назовём *$x$-площадью* уголка сумму x-площадей прямоугольников, на которые он разрезан. Корректность определения показанна в работе [6, следствие из леммы 3].

Следующие два свойства x-площади также заимствованы из работ [6] и [3].

Лемма 2 [6, лемма 3]. *Если прямоугольник разрезан на прямоугольники с хорошими сторонами, то его x-площадь равна сумме x-площадей этих прямоугольников.*

Лемма 3 [6, лемма 4]. *Для любого действительного x верно, что x-площадь квадрата с хорошей стороной неотрицательна при любом вещественном x.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если сторона квадрата равна $z_0a+z_1\lambda a+z_2t_0+\ldots+z_{n+2}t_n$, где все z_i — рациональны, то его x-площадь равна $(z_0+z_1x)^2$, что неотрицательно. □

Используем эти леммы для доказательства следующих предложений.

Предложение 1. *Выполнены следующие утверждения:*

(a) *если плоскость можно периодически замостить с периодами $(1,0)$ и $(0,\lambda)$ квадратами вдоль вектора u, то x-площадь уголка, построенного по вектору u, неотрицательна при любом вещественном x;*

(b) *если прямоугольник $1\times\lambda$ можно оклеить конечным числом квадратов без просветов и наложений с двух сторон в один слой вдоль вектора u, то x-площадь уголка, построенного по вектору u, неотрицательна при любом вещественном x.*

Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я 1(a). По лемме 1(a), если плоскость можно замостить с периодами $(1,0)$ и $(0,\lambda)$ вдоль вектора u, то и уголок построенный по вектору u является разрезаемым.

По лемме 2, если уголок разрезаем, то его x-площадь равна сумме x-площадей квадратов, на которые он разрезан. А так как x-площадь каждого квадрата неотрицательна по лемме 3, то и сумма их x-площадей больше либо равна 0. Значит, x-площадь уголка неотрицательна. □

Аналогично с заменой леммы 1(a) на лемму 1(b) доказывается предложение 1(b).

Предложение 2. *Если x-площадь уголка, построенного в некотором направлении для прямоугольника $1\times\lambda$, неотрицательна при всех вещественных x, то $\lambda=p\pm\sqrt{q^2-r^2}$ для некоторых рациональных $p\geqslant q\geqslant r\geqslant 0$.*

Для доказательства предложения 2 введём обозначения и докажем ещё несколько лемм.

Пусть плоскость разрезана на квадраты со сторонами, параллельными заданному направлению u, так, что разрезание переходит в себя при переносе на любой вектор решётки Λ. Без ограничения общности будем считать, что вектор u лежит в первой координатной четверти, включая ось Oy, но исключая ось Ox — иначе заменим его на перпендикулярный или противоположный. Рассмотрим уголок, построенный по вектору u. Пусть вершина этого уголка с наименьшей ординатой лежит на оси Ox ближе всех к началу системы координат и отлична от него (см. рис. 2). Пусть уголок получается вырезанием прямоугольника $c\times d$ из прямоугольника $a\times b$. Введём новую прямоугольную систему координат с тем же началом, положительно ориентированную, чтобы ось ординат была параллельна вектору u, а ось абсцисс — перпендикулярна ему. Нетрудно проверить, что тогда узлы решётки Λ, в которых находятся вершины уголка, имеют координаты (a,d) и (c,b). Обозначим координаты вертикального вектора стороны прямоугольника решётки Λ через (e,f). Через d_0,d_1 и e_0,e_1 обозначим коэффициенты при a и λa соответственно в представлении d и e в виде линейной комбинации элементов множества P' с рациональными коэффициентами.

Лемма 4. *Выполнено $(e,f)=\lambda(-\,d,a)$ и $(c,b)=(e,f)+m(a,d)$ для некоторого целого m.*

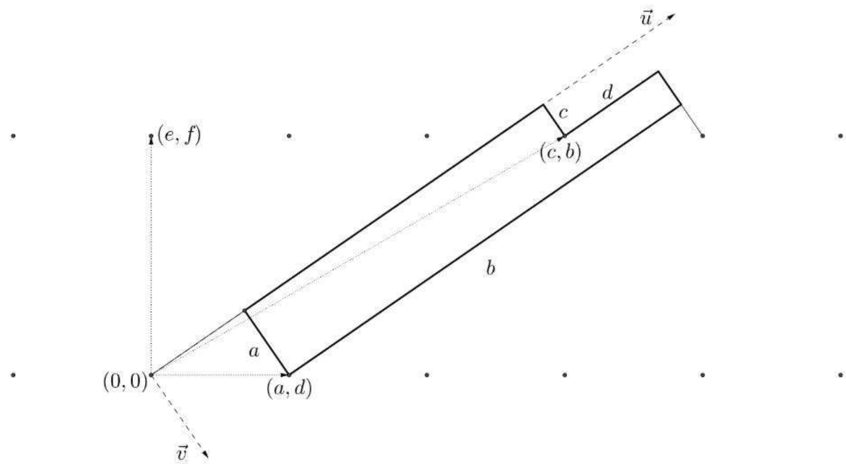


Рис. 2. (из [6]) Обозначения сторон и координат

Доказательство. Заметим, что вектор (e, f) получается из вектора (a, d) поворотом на $90°$ и растяжением в λ раз. Значит, $(e, f) = \lambda(-d, a)$. Так как вершины решётки (a, d) и (c, b) лежат на соседних горизонтальных уровнях решётки, то выполняется равенство между координатами соответствующих этим вершинам векторов $(c, b) = (e, f) + m(a, d)$ для некоторого целого m. □

Лемма 5. *x-площадь уголка равна $x - (d_0 + d_1x)(e_0 + e_1x)$.*

Доказательство. Обозначим $\widehat{z} := z_0 + z_1x$, где z_0 и z_1 — коэффициенты при a и λa соответственно в представлении z в виде линейной комбинации элементов множества P' с рациональными коэффициентами. Так как a и λa принадлежат P', то $(a_0 + a_1x)(f_0 + f_1x) = 1 \cdot x = x$. Тогда по лемме 4 x-площадь уголка равна

$$\widehat{a}(\widehat{b} - \widehat{d}) + \widehat{d}(\widehat{a} - \widehat{c}) = \widehat{a}\widehat{b} - \widehat{c}\widehat{d} = \widehat{a}(\widehat{f} + m\widehat{d}) - (m\widehat{a} + \widehat{e})\widehat{d} = \widehat{a}\widehat{f} - \widehat{e}\widehat{d} =$$
$$= (a_0 + a_1x)(f_0 + f_1x) - (d_0 + d_1x)(e_0 + e_1x) = x - (d_0 + d_1x)(e_0 + e_1x).$$

□

Лемма 6. *Либо x-площадь уголка линейно зависит от x, либо $d_1\lambda^2 + (e_1 + d_0)\lambda + e_0 = 0$ и $d_1 \neq 0$.*

Доказательство. По лемме 5 x-площадь уголка равна $x - (d_0 + d_1x)(e_0 + e_1x)$.

Если d или e принадлежит P', то $(d_0 + d_1x)(e_0 + e_1x) = 0$, следовательно, x-площадь уголка равна x.

Если d и e не принадлежат P', то $d = d_0a + d_1\lambda a$ и $e = e_0a + e_1\lambda a$. Тогда по лемме 4 имеем $-\lambda(d_0a + d_1\lambda a) = e_0a + e_1\lambda a$, следовательно, $d_1\lambda^2 + (e_1 + d_0)\lambda + e_0 = 0$.

Если $d_1 = e_1 + d_0 = 0$, то $e_0 = 0$. Следовательно, x-площадь равна $x - e_1 d_0 x = (1 - e_1 d_0)x$. А из того, что $e_1 + d_0 = 0$, очевидно следует, что $1 - e_1 d_0 \neq 0$.

Если $d_1 = 0$, а $e_1 + d_0 \neq 0$, то λ является рациональным числом, что противоречит соглашению после теоремы 2. □

Лемма 7. *Если $\lambda \neq p \pm \sqrt{p^2 - r^2}$ ни для каких рациональных $p \geqslant r \geqslant 0$, то либо x-площадь уголка отрицательна при некотором x, либо выполнено неравенство $(e_0 d_1 - e_1 d_0 + 1)^2 - 4 d_1 e_0 < 0$.*

Доказательство. По лемме 6 можно считать, что $d_1 \lambda^2 + (e_1 + d_0)\lambda + e_0 = 0$ и $d_1 \neq 0$. Обозначим $2p = -(e_1 + d_0)/d_1$ и $q = -e_0/d_1$. Тогда $e_1 = -2d_1 p - d_0$ и $e_0 = -d_1 q$. Тогда по лемме 5 x-площадь уголка равна

$$S(x) = x - (d_0 + d_1 x)(e_0 + e_1 x) = x - (d_0 + d_1 x)((-2d_1 p - d_0)x - d_1 q) =$$
$$= x + (d_0 + d_1 x)(2d_1 p x + d_0 x + d_1 q) =$$
$$= x^2(2d_1^2 p + d_1 d_0) + x(2d_1 d_0 p + d_0^2 + d_1^2 q + 1) + d_1 d_0 q.$$

Запишем дискриминант квадратного трёхчлена $S(x)$:

$$D := (2d_1 d_0 p + d_0^2 + d_1^2 q + 1)^2 - 4(2d_1^2 p + d_1 d_0) d_1 d_0 q = (2d_1 d_0 p + d_0^2 - d_1^2 q + 1)^2 + 4 d_1^2 q.$$

Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1: $D > 0$. В этом случае существует x, при котором x-площадь отрицательна.

Случай 2: $D = 0$. В этом случае $-q = (2d_1 d_0 p + d_0^2 - d_1^2 q + 1)^2 / 4d_1^2 := r^2$, следовательно, $\lambda = p \pm \sqrt{p^2 + q} = p \pm \sqrt{p^2 - r^2}$, что противоречит условию леммы.

Случай 3: $D < 0$. В этом случае $q < 0$. Тогда сделаем обратную замену $2p = -(e_1 + d_0)/d_1$ и $q = -e_0/d_1$. Получим, что

$$D = (2d_1 d_0 2p + d_0^2 - d_1^2 q + 1)^2 + 4 d_1^2 q = (e_0 d_1 - e_1 d_0 + 1)^2 - 4 d_1 e_0 < 0.$$

□

Доказательство предложения 2. Из леммы 6 мы получаем, что для некоторого направления u

$$d_1 \lambda^2 + (e_1 + d_0)\lambda + e_0 = 0.$$

Обозначим $e_1' = e_0 d_1/(e_1 + d_0)$ и $d_0' = e_1 + d_0 - e_1'$. Тогда $e_0 d_1 - e_1' d_0' = (e_1')^2$ и

$$(e_1 + d_0)^2 - 4 e_0 d_1 = (e_1' + d_0')^2 - 4 e_1' d_0' - 4 e_1'^2 = (e_1' - d_0')^2 - 4 e_1'^2.$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{-(e_1 + d_0) \pm \sqrt{(e_1 + d_0)^2 - 4 e_0 d_1}}{2d_1} = \frac{-(e_1' + d_0') \pm \sqrt{(e_1' - d_0')^2 - 4 e_1'^2}}{2d_1} =$$
$$= -\frac{e_1' + d_0'}{2d_1} \pm \sqrt{\left(\frac{e_1' - d_0'}{2d_1}\right)^2 - \left(\frac{e_1'}{d_1}\right)^2} = p \pm \sqrt{q^2 - r^2},$$

где мы обозначили $p = -\frac{e_1'+d_0'}{2d_1}$, $q = |\frac{e_1'-d_0'}{2d_1}|$ и $r = |\frac{e_1'}{d_1}|$.

Докажем, что $p \geqslant q \geqslant r \geqslant 0$. Неравенство $q \geqslant r$ очевидно следует из того, что λ — вещественный корень квадратного уравнения. Докажем, что $p \geqslant q$. Из леммы 7 следует, что $(e_0 d_1 - e_1 d_0 + 1)^2 - 4d_1 e_0 < 0$. Значит, $d_1 e_0 > 0$. Так как уравнение $d_1\lambda^2 + (e_1 + d_0)\lambda + e_0 = 0$ имеет вещественное решение, то $(e_1' + d_0')^2 = (e_1 + d_0)^2 \geqslant 4d_1 e_0 > 0$. Заметим, что $4d_1 e_0 = 4e_1'(e_1' + d_0')$. Значит, $|e_1' + d_0'| \geqslant 4|e_1'|$. Значит, e_1' и d_0' одного знака и $|e_1' + d_0'| \geqslant |e_1' - d_0'|$. Значит, $|p| \geqslant q$, а так как λ — положительный корень, то $p > 0$. Получаем, что $p \geqslant q \geqslant r \geqslant 0$. $\square$

Теперь мы готовы доказать теоремы 1(a) и 2.

Доказательство теорем 2 и 1(a). Теорема 2 следует из предложений 1(a) и 2. Теорема 1(a) следует из предложений 1(b) и 2.

2. Доказательство теоремы 1(b)

Лемма 8. *Рассмотрим оклеивание Γ_2, состоящее из равных квадратов $K_1 \ldots K_g$. Рассмотрим множество M_j квадратов на плоскости, получаемых из квадрата K_j композициями центральных симметрий относительно узлов решетки Λ. Тогда $\bigcup\limits_{i=1}^{g} \bigcup\limits_{K \in M_i} K$ является замощением плоскости квадратами. При этом оно переходит в себя при любой композиции центральных симметрий относительно узлов решетки Λ.*

Доказательство. В множестве Γ_2 присутствуют представители всех классов сложной эквивалентности. Тогда для любой точки плоскости существует сложно эквивалентная ей точка оклеивания, а значит, $\mathbb{R}^2 = \bigcup\limits_{i=1}^{g} \bigcup\limits_{K \in M_i} K$. Покажем, что любые два квадрата из $\bigcup\limits_{i=1}^{g} M_i$ либо совпадают, либо не имеют общих внутренних точек. Пусть квадраты K и K' из $\bigcup\limits_{i=1}^{g} M_i$ имеют общую внутреннюю точку. Так как внутренние точки несовпадающих множеств M_i и M_j являются представителями разных классов сложной эквивалентности, то K и K' лежат в одном множестве M_l. Тогда, если K не совпадает с K', то в K найдутся две внутренние сложно эквивалентные точки, что невозможно из определения оклеивания. Тогда $\mathbb{R}^2$ представлено в виде объединения счетного числа непересекающихся по внутренним точкам квадратов.

Так как при композиции центральных симметрий относительно узлов решетки Λ квадраты, принадлежащие M_i, переходят в квадраты, принадлежащие M_i, то и замощение переходит в себя при композиции центральных симметрий относительно узлов решетки Λ. $\square$

Определение 3. *Полосой квадратов* назовем такую бесконечную в обе стороны последовательность квадратов на плоскости, что любые два соседних члена этой последовательности имеют общую сторону и любые два не соседних члена последовательности не имеют общих вершин.

Лемма 9. *Замощение из леммы 8 является объединением счетного числа полос квадратов.*

Доказательство. Будем обозначать вершины квадратов, начиная с левого нижнего угла, идя по часовой стрелке.

Рассмотрим два случая.

Случай 1*:* найдутся два квадрата $A_0B_0C_0D_0$ и $A_1B_1C_1D_1$ замощения из леммы 8, пересекающиеся только по части стороны (но не только по вершине). Без ограничения общности можно считать, что $A_1 \in B_0C_0, C_0 \in A_1D_1$ (рис. 3).

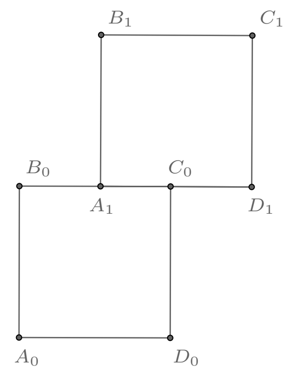


Рис. 3.

Ясно, что точки A_0, B_1 лежат по разные стороны от прямой A_1C_0. Тогда так как все квадраты замощения равны, то квадрат $D_0C_0C_2D_2$, прилегающий к углу $D_1C_0D_0$, восстановится однозначно, так как одной стороной он прилегает к прямой C_0D_0, а другой — к A_1D_1. Аналогично построим квадрат, прилегающий к стороне C_0C_2 квадрата $D_0C_0C_2D_2$ и стороне C_1D_1 квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Таким образом построим полосу L_0 квадратов, содержащую $A_0B_0C_0D_0$, и полосу L_1 квадратов, содержащую $A_1B_1C_1D_1$. Теперь рассмотрим такой квадрат $A_2B_2C_2D_2$, что $A_2 \in B_1C_1$. Ясно, что квадрат, прилегающий к стороне C_2D_2 квадрата $A_2B_2C_2D_2$, восстановится однозначно, а значит, восстановится и полоса L_2, содержащая квадрат $A_2B_2C_2D_2$. Аналогично построим счетное число полос.

Случай 2*:* любые два квадрата замощения, имеющих хотя бы две общие точки, имеют общую сторону. Ясно, что тогда равные квадраты образуют квадратную сетку на плоскости, в частности, образуют объединение счетного числа полос. □

Доказательство теоремы 1(b). *Необходимость.* Рассмотрим некоторое оклеивание Γ_2, состоящее из g равных квадратов. Тогда, из леммы 8, существует некоторое замощение плоскости квадратами, полученное из оклеивания Γ_2. В силу действия леммы 9 это замощение является объединением счетного числа полос квадратов. Пусть α — такой угол, что вектор $\overline{n} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$ перпендикулярен направлению полос. Так как замощение переходит в себя при переносах на векторы вида $(2\lambda t_1, 2t_2)$, где $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$, то проекции векторов $(-2\lambda, 0)$ и $(0,2)$ на $\overline{n}$ имеют длину, кратную стороне a квадрата. Обозначим $2\lambda\sin\alpha =: aq_1, 2\cos\alpha =: aq_2$, где $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$. Тогда из равенства $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ получаем $a^2(\frac{q_1^2}{4\lambda^2} + \frac{q_2^2}{4}) = 1$. Заметим, что прямоугольник $1 \times 2\lambda$ содержит представителей всех классов сложной эквивалентности и не содержит внутри себя эквивалентных точек. Тогда площадь прямоугольника $1 \times 2\lambda$ равна площади оклеивания, то есть $\mathrm{g}a^2$. Если $q_2 = 0$, то $2\lambda = \mathrm{g}a^2 = \mathrm{g}(\frac{2\lambda}{q_1})^2$, а значит, λ рационально. Тогда можно взять $r = 0, p = \frac{\lambda}{2}$. Если же $q_2 \neq 0$, то, так как $a^2 = \frac{\lambda}{\mathrm{g}}$, получаем $\lambda^2 - \lambda\frac{4\mathrm{g}}{q_2^2} + (\frac{q_1}{q_2})^2 = 0$. Обозначив $p := \frac{2\mathrm{g}}{q_2^2}$, $r := (\frac{q_1}{q_2})^2$, получаем $\lambda = p \pm \sqrt{p^2 - r^2}$, где $r, p \in \mathbb{Q}$.

Достаточность. Пусть известно, что $\lambda = p \pm \sqrt{p^2 - r^2}$, где $p \geqslant r \geqslant 0$ рациональны. Пусть $r = \frac{n}{m}$, где $m, n \geqslant 0$ — взаимно простые целые числа. Рассмотрим прямоугольник K с вершинами в точках $(\lambda m, n)$,

$$\left(\lambda m + \frac{\lambda n}{\lambda^2 m^2 + n^2}, n - \frac{\lambda^2 m}{\lambda^2 m^2 + n^2}\right), \left(-\lambda m + \frac{\lambda n}{\lambda^2 m^2 + n^2}, -n - \frac{\lambda^2 m}{b\lambda^2 m^2 + n^2}\right),$$

$(-\lambda m, -n)$. Стороны прямоугольника K равны $2\sqrt{\lambda^2 m^2 + n^2}$ и $\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 m^2 + n^2}}$, а их отношение —

$$2\frac{\lambda^2 m^2 + n^2}{\lambda} = 2\frac{\lambda^2 + r^2}{\lambda} m^2 = 2\frac{2p^2 \pm 2\sqrt{p^2 - r^2}}{p \pm \sqrt{p^2 - r^2}} m^2 = 4m^2 p \in \mathbb{Q}.$$

Разрежем K на некоторое количество квадратов и получим множество Γ_2 непересекающихся по внутренним точкам квадратов. Докажем, что Γ_2 — искомое оклеивание. Обозначим через K' объединение прямоугольника K и его симметрии относительно точки $(0,0)$.

Покажем, что никакие две внутренние точки прямоугольника K не являются сложно эквивалентными (а значит, никакие две внутренние точки объединения квадратов из множества Γ_2 тоже не эквивалентны). Предположим обратное: существуют две внутренние эквивалентные точки прямоугольника K. Тогда они либо совмещаются параллельным переносом на вектор вида $(2\lambda t_1, 2t_2)$, где $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ не равны нулю одновременно, либо центрально симметричны относительно некоторого узла A решетки Λ. В последнем случае рассмотрим композицию центральной симметрии относительно узла A с симметрией относительно точки $(0,0)$. Эта композиция — снова параллельный перенос на вектор вида $(2\lambda t_1, 2t_2)$, который совмещает две внутренние точки уже прямоугольника K'. Рассмотрим два случая.

Случай 1*:* пусть $mt_2 \neq nt_1$. Проекция вектора $(2\lambda t_1, 2t_2)$ на сторону прямоугольника K', перпендикулярную прямой $y = \frac{xn}{bm}$, равна

$$\left|2(\lambda t_1, t_2) \cdot \left(-\frac{n}{\sqrt{\lambda^2 m^2 + n^2}}, \frac{\lambda m}{\sqrt{\lambda^2 m^2 + n^2}}\right)\right| = 2\lambda \frac{|mt_2 - nt_1|}{\sqrt{\lambda^2 m^2 + n^2}} \geqslant \frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda^2 m^2 + n^2}},$$

что не меньше длины этой стороны при $mt_2 \neq nt_1$.

Случай 2*:* Пусть $mt_2 = nt_1$. Так как m и n взаимно просты, то $t_1 = km, t_2 = kn$, где $k \in \mathbb{Z}$. Тогда проекция вектора $(2\lambda t_1, 2t_2)$ на сторону прямоугольника K', параллельную прямой $y = \frac{xn}{\lambda m}$, равна

$$\left|2(\lambda km, kn) \cdot \left(\frac{m\lambda}{\sqrt{\lambda^2 m^2 + n^2}}, \frac{n}{\sqrt{\lambda^2 m^2 + n^2}}\right)\right| = 2|k|\sqrt{\lambda m^2 + n^2} \geqslant 2\sqrt{\lambda m^2 + n^2},$$

что не меньше этой стороны при $k \neq 0$. Тогда внутренние точки прямоугольника K или K' переносом на такой вектор совместить нельзя. В обоих случаях 1 и 2 получаем противоречие, значит, никакие две внутренние точки прямоугольника K не эквивалентны.

Заметим, что площадь прямоугольника K равна 2λ, что равно площади прямоугольника $1 \times 2\lambda$, в котором присутствуют все классы эквивалентности. Тогда в K присутствуют представители всех классов эквивалентности. А значит, Γ_2 — оклеивание. □

3. Благодарности

Работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики "Базис" № 21-7-2-19-1.

Список литературы

[1] E. Chien, F. Luo, "Rectangle tilings of closed surfaces from discrete harmonic 1-chains", https://pdfs.semanticscholar.org/47a9/0f45fb72847f8caac69c924fd30c7aa74901.pdf.

[2] R. Kenyon, "Tiling with squares and square-tileable surfaces", preprint, https://www.math.brown.edu/ rkenyon/papers/squares.ps.Z.

[3] Ф. А. Шаров, "Прямоугольник из квадратов", *Квант*, 2019, № 3, 10–14..

[4] M. Prasolov, M. Skopenkov, "Tiling by rectangles and alternating current", *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **118**:3 (2011), 920–937, arXiv: http://arxiv.org/abs/1002.1356.

[5] S. Shirokovskikh, "Transformations of 2-port networks and tiling by rectangles", preprint, arXiv: https://arxiv.org/abs/2110.02558.

[6] А. А. Балакин, "Оклеивание тетраэдра квадратами", *Математическое просвещение*, **3**:23 (2018), 134–144.

[7] М. Петкова, "Салфетки "Кванта" и теорема Пифагора", *Квант*, 2012, № 3, 26–27.

Работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики "Базис" № 21-7-2-19-1.

Dmitriev M. D. [1], *Ozhegov F. Yu.*[1] Covering of a rectangle with squares from both sides. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2023. V. 23. No 1. P. 16–26.

[1] Math department, Higher School of economics

ABSTRACT

The paper provides an elementary proof of Kenyon's theorem that periodic tiling of a plane by squares with periods $(1, 0)$ and $(0, \lambda)$ is possible only if $\lambda = p \pm \sqrt{q^2 - r^2}$ for some rational $p \geqslant q \geqslant r \geqslant 0$. A similar new result is proved about covering of a rectangle with squares from both sides in one layer. The paper also proves a necessary and sufficient condition for covering with equal squares.

Key words: *periodic tilings, square, rectangle, plane.*