Дальневосточный математический журнал. 2023. Т. 23. № 1. С. 34–54

УДК 517.927
MSC2020 34C05

© И. Б. Краснюк[1]

Волновые пакеты в граничных задачах квантовой механики

Рассматривается система двух независимых линейных квантовых уравнений с символами, которые представляют собой полиномы n-го порядка. Граничные условия являются нелинейными и связывают функциональным образом амплитуды прямой и обратной волновых функций с помощью отображения $\Phi : I \mapsto I$. Показано, что: 1) если отображение Φ линейно, то амплитуда падающей волны при $t \to \infty$ сходится к нулю или бесконечности; 2) если Φ нелинейна, но однозначна, то амплитуда падающей волны сходится при $t \to \infty$ к 2-периодической кусочно-постоянной функции с единственной точкой разрыва на периоде; 3) если Φ многозначна, то возможны асимптотически периодические кусочно-постоянные распределения квадрата амплитуды волновой функции с конечным или бесконечным множествами точек разрыва на периоде. Такие предельные решения мы будем называть распределениями предтурбулентного или турбулентного типа. Даны приложения к исследованию возникновения пространственно-временных светлых и темных асимптотических солитонов в ограниченном резонаторе с нелинейной обратной связью между амплитудами двух встречных оптических лучей на поверхности резонатора.

Ключевые слова: *линейные квантовые уравнения, граничные условия, солитоны.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202305

Введение

Ниже мы рассмотрим начально-краевую задачу для системы двух линейных уравнений квантовой механики n-го порядка с символами-полиномами [1] и нелинейными динамическими граничными условиями. Известно [2], что при вторичном квантовании уравнений в частных производных с малым параметром (внутренней постоянной Планка) используются асимптотические при $h \to 0$ решения этих уравнений. Построение таких решений проводится с помощью редукции исходного уравнения к системе уравнений классической механики (Гамильтона–Якоби и уравнения переноса). Мы не получим точного решения задачи, однако правая часть таких

[1] Донецкий физико-технический институт им. А. А. Галкина, 83114, г. Донецк, ул. Р. Люксембург, 72 Электронная почта: `krasnyukigr@rambler.ru`

уравнений обращается в нуль с точностью до членов порядка $O(h^2)$. Чтобы получить дальнейшие члены асимптотического разложения, нужно искать решение $\varphi(x,t)$ в виде формального степенного ряда по переменной h:

$$\varphi(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} h^l \varphi_l(x,t). \tag{1}$$

Из (1) следует, что для $\varphi(x,t)$ мы получим уравнение переноса, а $\varphi_l(x,t)$ можно последовательно определить таким образом, чтобы правая часть в соответствующем уравнении (см. ниже) имела порядок $O(h^s)$ для любого целого $s>0$, если в разложении (1) взять достаточно большую сумму [2, с. 16]. Первая процедура известна как анзатц Мищенко – Стернина – Шаталова [3]. Эта процедура позволяет свести линейное уравнение квантовой механики к бесконечной цепочке транспортных уравнений переноса. Поскольку выражение $|u(x,t,h)|^2 = |\varphi(x,t)|^2 + O(h)$ в квантовой механике рассматривается как плотность, то $|\varphi(x,t)|^2$ в классической механике имеет смысл меры, отвечающей рассматриваемому уравнению. В случае, когда мнимая часть фазы $\mathfrak{J} S = S_2 \neq 0$, мера зависит от малого параметра h (или большого параметра $\sim 1/h$) так, что $|u|^2 \approx \exp^{-2S_2/h} |\varphi|^2$ [2, с. 34]. Как показал Маслов [3], зависимость меры от малого параметра приводит к тому, что малый параметр (неявно) возникает при решении канонической системы уравнений Лиувилля (переноса) и Гамильтона – Якоби, и поэтому для рассматриваемых уравнений постановка задачи классической механики (в гамильтоновой форме) должна измениться. Действительно, пусть задан ВКБ-анзатц вида

$$u(x,t,h) = \exp iS/h \sum_{j=0}^{M} \varphi_j(x,t), \tag{2}$$

где $S = S(x,t)$ и $\varphi_j(x,t)$ — решения канонических систем уравнений (см. ниже), причем $S_2(x,t) = \mathfrak{J} S_2 \geqslant 0$,

$$S(x,t) = S_1(x,t) + iS_2(x,t) \tag{3}$$

Тогда функция (3) равна $O(h^\infty)$ вне некоторой (не зависящей от h) окрестности Δ множества нулей функции $S_2(x,t)$. Следовательно, функции $S(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ достаточно найти лишь в окрестности Δ. Итак, на языке оптики сам предельный луч должен распространяться согласно уравнениям Гамильтона классической механики. За неимением места в данной работе мы ограничимся исследованием случая вещественной фазы, однако сформулированные результаты допускают обобщение и на более интересный случай комплексной фазы. Следует также отметить, что разложение в ряд (2) неоднозначно из-за произвола в выборе фаз для φ_j. Если бы в сумме было только одно слагаемое, то этот произвол привел бы к фазовому множителю. Однако если в сумме несколько слагаемых, то выбор относительных фаз имеет существенное значение. Трудность в выборе фаз усугубляется также выбором нелинейных граничных условий. Мы покажем, что можно добиться разумного сдвига фаз (например, на $\pi/2$, как в случае темных и светлых оптических солитонов [4–6]). Далее мы покажем, что редукция исходных квантовых уравнений приводит в линейном приближении по h к простой системе гиперболических уравнений с нелинейными граничными условиями, которая рассматривалась ранее Шарковским [7, 8]. Такая краевая задача, в свою очередь, сводится к решению начальной задачи для разностного уравнения (РУ) с непрерывным временем. Если РУ порождается так называемым унимодальным отображением [9, 10] (такие отображения гомеоморфны известному логистическому уравнению [7]), то решениями РУ являются асимптотически периодические кусочно-постоянные функции с конечным или бесконечным множествами точек разрыва на периоде. Разностные уравнения формализуют описание таких явлений, как хаос, каскадный процесс образования структур, перемешивание, формирование фракталов. Для решений РУ типичны свойства, которые являются нестандартными с точки зрения дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и уравнений с отклоняющимся аргументом [7]). Подчеркнем следующую особенность решений разностных уравнений — существование так называемых автостохастических решений, которые представляют собой детерминированные сколь угодно гладкие функции, асимптотически описываемые стохастическими процессами [11]. Такое явление называется автостохастичностью. Общую концепцию автостохастичности предложил Шарковский. В частности, Шарковский и Романенко показали [12, 13], что автостохастичность имеет место в динамических системах, порождаемых разностных вида

$$u(t+1) = f(u(t)), t \in R^{+}, \tag{4}$$

где $f \in C(I, I)$ представляет собой необратимое отображение открытого ограниченного интервала I в себя. Так, в [12] показано, что при определенных условиях (основным требованием является существование у непрерывного отображения эргодической гладкой инвариантной меры) непредсказуемые решения уравнения (4) можно описать с помощью определенных случайных процессов, которые называются приближенными стохастическими прообразами решений.

1. Постановка задачи

Мы рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$P_n(p) = \sum_{j\,=\,0}^{n} a_j p^j, \tag{5}$$

где $P_n(p)$ — полином от переменной $p \in R^1$ степени $n = 1, 2, \ldots$. Формальная замена переменной на оператор $\hat{p} = {}^{-}h\frac{d}{dx}$ позволяет из алгебраического выражения (5) получить дифференциальный оператор

$$P_n(\hat{p}) = P_n(-\,ih\frac{d}{dx}) = \sum_{j\,=\,0}^{n} a_j(-\,ih)^j \frac{d^j}{(dx)^j}$$

с постоянными (зависящими от h) коэффициентами. Ниже рассматривается система уравнений

$$\left[-\,\hat{E}_k + P_n^k\,(\hat{p})\right] \phi(x,t) = 0, \quad k = 1, 2, \tag{6}$$

где

$$\hat{E} = ih\frac{\partial}{\partial t}. \tag{7}$$

Для решений системы (6) рассматриваются функциональные граничные условия

$$\phi_1(0,t,h) = S_1(\phi_2(0,t,h)), \quad \phi_2(0,t,h) = S_2(\phi_1(0,t,h)) \tag{8}$$

и начальные условия

$$\phi_1(x,0,h) = h_1(x,h), \quad \phi_2(x,0,h) = h_2(x,h). \tag{9}$$

Здесь $S_1, S_2 : R \to R$ — заданные функции, определяющие закон, по которому падающая волна преобразуется в отраженную. Уравнения (6) имеют вещественные характеристики, поэтому мы можем искать решения в виде [1]

$$u = u_1 \exp i\tau S_1 + \ldots + u_k \exp i\tau S_k, \tag{10}$$

где $\tau = h_{-1}$ — большой параметр. Выражение (10) неоднозначно из-за произвола в выборе фаз для S_j. Если бы в сумме был только один член, то этот произвол привел бы лишь к фазовому множителю (довольно безобидному). Однако если в сумме несколько слагаемых, то выбор относительных фаз для задачи Коши имеет существенное значение. Согласование фаз S_j в нелинейных граничных условиях также требует особого внимания. Будем искать решения задачи (6)–(9) в виде

$$u(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} h^l \phi_l(x,t).$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\left[\hat{E} + P_n()\right]\psi(x,t) = 0, \qquad \psi(x,0) = \exp\left(ih(\lambda_1 x + \lambda_2 t)\right)\phi_0(x).$$

Будем искать решение в виде

$$y(x,t) = \exp\left(ih(\lambda_1 x + \lambda_2 t)\right)\phi(x,t). \tag{11}$$

Проведем подстановку функции (11) в уравнение

$$\left(-ih\frac{\partial}{\partial t} + P_n\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)y(x,t) = 0.$$

В результате получим уравнение

$$\left[\left(\lambda_2 - ih\frac{\partial}{\partial t}\right) + P_n\left(\lambda_1 - ih\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\phi\left(x,t\right) = 0.$$

Начальные условия системы дают

$$y(x,0) = \exp\left(\frac{i}{h}\lambda_1 x\right)\phi(x,0) = \exp\left(\frac{i}{h}\alpha x\right)\phi_0(x),$$

а следовательно, нужно потребовать, чтобы были выполнены соотношения

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \phi\,(x,0) \,= \phi_0\,(x)\,.$$

Заметим теперь, что рассматриваемое выражение

$$\left(\lambda_2 - ih\frac{\partial}{\partial t}\right) + P_n\left(\lambda_1 - ih\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

можно получить из функции

$$(\lambda_2 - ihE') + P_n(\lambda_1 - ihp') \tag{12}$$

формальной заменой E' на $\frac{\partial}{\partial x}$. Разложим теперь функцию (12) в ряд Тейлора по переменной h. Поскольку P_n — полином степени n, полученный ряд Тейлора обрывается на n-ом члене:

$$F\,(h) \,=\, \sum_{k\,=\,0}^{n}\frac{h^k}{k!}\frac{d^k}{dh^k}F\,(h)\,|_{h\,=\,0} =$$

$$=\,(\lambda_2 + P_n(\lambda_1)) + h(-\,iE' - \frac{dP_n}{dp}\,(\lambda_1)\,p') + \sum_{k\,=\,2}^{n}\frac{h^k}{k!}\,(-\,i)^k\,\frac{d^kP_n}{dp^k}\,(\lambda_1)\,(P')^k.$$

Если в выражении (12) произвести замену E' на $\frac{\partial}{\partial t}$ и p' на $\frac{\partial}{\partial x}$, то получится равенство

$$\left(\lambda_2 - ih\frac{\partial}{\partial t} + P_n\left(\lambda_1 - ih\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) \,=$$

$$=\,(\lambda_2 - P_n\,(\lambda_1)) - ih\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial P_n}{\partial p}\,(\lambda_1)\,\frac{\partial}{\partial x}\right) + \sum_{k\,=\,2}^{n}\frac{h^k}{k!}\,(-\,i)^k\,\frac{d^kP_n}{dp^k}\,(\lambda_1)\,\frac{\partial^k}{\partial x^k}.$$

С учетом последней формулы соотношение (12) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}(\lambda_2 - P_n\,(\lambda_1))\,\phi\,(x,t) - ih\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial P_n}{\partial p}\,(\lambda_1)\,\frac{\partial\phi\,(x,t)}{\partial x}\right) + \\ + \sum_{k\,=\,2}^{n}\frac{h^k}{k!}\,(-\,i)^k\,\frac{d^kP_n}{dp^k}\,(\lambda_1)\,\frac{\partial^k\phi\,(x,t)}{\partial x^k} = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

Точное решение задачи не может быть получено с помощью выбора констант λ_1,λ_2 и функции $\phi(x,t)$. Однако, приравнивая к нулю возможно большее число членов в разложении (13), мы получаем асимптотическое по $h(h\to 0)$ решение задачи. Таким образом, получаем уравнение

$$\lambda_2 + P_n\,(\lambda_1) \,= 0$$

(уравнение Гамильтона – Якоби) и уравнение

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial P_n}{\partial p}\,(\lambda_1)\,\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \tag{14}$$

которое называется уравнением переноса. Уравнение Гамильтона – Якоби имеет решение

$$S(x,t) = \alpha x - P_n(\alpha)t, \quad \lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = - P_n(\alpha).$$

Уравнение переноса можно переписать в более удобной форме, эквивалентной (14). Рассмотрим на плоскости (x,t) векторное поле, координаты которого не зависят от x, t и равны

$$v = \left(\frac{\partial P_n}{\partial p} (\lambda_1), 1 \right).$$

Тогда в левой части уравнения (14) стоит производная вдоль траекторий векторного поля v. Уравнение переноса может быть при этом записано в виде

$$\frac{d\phi}{dt} = 0, \tag{15}$$

где $\frac{d}{dt}$ — производная вдоль поля v (см. [2, с. 16]). Функция ϕ должна быть постоянной вдоль траекторий векторного поля v: это обстоятельство объясняет название “уравнение переноса”. Амплитуда $\phi(x,t)$ волновой функции переносится вдоль траекторий векторного поля v. Уравнение переноса позволяет получить решение с точностью до $O\left(h^2\right)$. Чтобы получить члены асимптотического разложения более высокого порядка, нужно найти функцию $\phi(x,t)$ в виде формального степенного ряда по переменной h. Для функции ϕ_0 мы снова получим уравнение переноса. Можно показать, что функция $\phi_1(x,t)$ последовательно определяется таким образом, что правая часть исходного уравнения имеет порядок $O(h^s)$ для любого целого $S > 0$, если в разложении взять достаточно большую частичную сумму ряда.

Рассмотрим, например, уравнение для функции $\phi_1(x,t)$. Выделяя в исходном уравнении члены порядка h^2, получаем

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{\partial P_n}{\partial p}(\lambda_1)\frac{\partial}{\phi_1}\partial x = - \frac{i}{2}\frac{\partial^2 P_n}{\partial p^2}(\lambda_1)\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2},$$

которое (с учетом определения производной $\frac{\partial}{\partial t}$) может быть записано в виде

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = - \frac{i}{2}\frac{\partial^2 P_n}{\partial p^2}(\lambda_1)\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} \tag{16}$$

Уравнение (16) позволяет вычислить $\phi_1(x,t)$ интегрированием вдоль траекторий векторного поля v. Рассмотрение членов исходного уравнения, имеющих порядки $h^3, h^4, \ldots$, позволяет получить рекуррентную систему для определения $\phi_l(x,t)$, причем каждая следующая функция получается из предыдущей с помощью интегрирования вдоль траекторий векторного поля v. Такого типа подход известен в литературе как анзатц Мищенко – Стернина – Шаталова [2], а система рекуррентных уравнений называется цепочкой транспортных уравнений [1]. В литературе рассматривается так называемая проблема сходимости цепочки транспортных уравнений [1]; однако такая проблема рассматривается для задачи Коши. Для рассматриваемой нами начально-краевой задачи эта проблема решается положительно: поскольку уравнения линейны, то проблема расходимости (и локализации решений) решается нелинейными граничными условиями, которые на каждом шаге эволюции системы ”поджимают“амплитуды (и носители) решения.

2. Редукция к цепочке транспортных уравнений

Рассмотрим систему уравнений [8]

$$- h\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + H_k\left(x,p,t\right)\psi_k = 0, \quad k = 1,2 \tag{17}$$

с начальными условиями

$$\psi_k\left(x,0\right) \,=\, \exp\left(i/h\right)S_0^k\left(x\right)\psi_0\left(x\right) \tag{18}$$

и граничными условиями

$$\psi_1\bar{\psi_1} = \Phi_1\left(\psi_2\bar{\psi_2}\right)\big|_{x\,=\,0}, \quad \psi_2\bar{\psi_2} = \Phi_2\left(\psi_1\bar{\psi_1}\right)\big|_{x\,=\,1}, \tag{19}$$

где Φ_1, Φ_2 — заданные функции. Здесь $\bar{\psi}$ означает величину, сопряженную ψ. Гамильтониан задачи $H_k\left(x,p,t\right)$ удовлетворяет оценке

$$\left|D_x^\alpha D_p^\beta H_k\left(x,p,t\right)\right| \leqslant C_{\alpha,\beta}\left(1 + |x| + |p|\right)^m,$$

где $m > 0$ — фиксированное число, α, β — произвольные мультииндексы (в многомерном случае), $C_{\alpha,\beta}$ — некоторая постоянная. Если $H_k = P_n^{(k)}$, то с точностью до $O\left(h^2\right)$ задача сводится к системе уравнений

$$\frac{\partial \psi_1^0}{\partial t} + \frac{\partial P_n^1}{\partial p}\left(\lambda_1\right)\frac{\partial \psi_1^0}{\partial x} = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \psi_2^0}{\partial t} + \frac{\partial P_n^2}{\partial p}\left(\lambda_2\right)\frac{\partial \psi_2^0}{\partial x} = 0 \tag{21}$$

с граничными условиями

$$\left|\psi_1^0\right|^2 \,=\, \Phi_1\left(\left|\psi_2^0\right|^2\right)\big|_{x\,=\,0}, \quad \left|\psi_2^0\right|^2 \,=\, \Phi_2\left(\left|\psi_1^0\right|^2\right)\big|_{x\,=\,1} \tag{22}$$

и начальными условиями

$$\psi_k^0\left(x,0\right) \,=\, h_k\left(x\right), \quad k = 1,2. \tag{23}$$

Решения задачи (20)–(23) известны при условии, что выполняется неравенство

$$\frac{\partial P_n^1}{\partial x}\left(\lambda_1\right) \times \frac{\partial P_n^2}{\partial x}\left(\lambda_2\right) < 0. \tag{24}$$

Свойства решений задачи (20)–(23) зависят от того, как устроено отображение $\Phi: I \to I$, где I — открытый ограниченный интервал. Решение задачи имеет вид

$$u_1^0\left(x,t\right) \,=\, y\left(t - \hat{P_n^{(1)}}\left(\lambda_1\right)x\right), \quad u_2^0\left(x,t\right) \,=\, y\left(t - \hat{P_n^{(2)}}\left(\lambda_2\right)x\right), \tag{25}$$

где $\hat{P}_n^{(1)} = P_n^{(1)}/2$ и $\hat{P}_n^{(2)} = P_n^{(1)}/2$, причем $P_n^{(k)}\left(\lambda_k\right) > 0, k = 1,2$, и $v_k^0 = \left|\phi_k^0\right|^2$. Здесь $y(t)$ — решение разностного уравнения с непрерывным временем

$$y\left(t+2\right) \,=\, \Phi\left(y\left(t\right)\right), \quad t \in [-\,1, \infty),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y\,(t)\,|_{[-1,1)} = h\,(t)\,,$$

где $h\,(t) = \phi_1\,(-t)$ при $t \in [-1,0)$ и $h\,(t) = \phi_2\,(t)$ при $t \in [0,1)$. РУ получается простой подстановкой представления решения в форме (25) в граничные условия. Здесь отображение Φ принадлежит классу $C^2\,(I,I)$ и является структурно устойчивым (грубым). Структурно устойчивыми, например, являются унимодальные отображения [11], которые гомеоморфны "перевернутой" параболе [7]. Тогда множество $Per\Phi$ периодических точек Φ распадается в объединение множества P^+-точек притягивающих циклов и множества P^--точек отталкивающих циклов отображения Φ: так, что $Per\Phi = P^+ \bigcup P^-$, причем множество P^+ конечно,а множество P^- конечно или счетно. Разделитель D отображения Φ в структурно устойчивом случае определяется по формуле

$$D = \bigcup_{n\geqslant 0} h^{-n}\bar{P^-}$$

и представляет собой нигде не плотное в I замкнутое множество меры нуль: конечное (в частности, пустое), счетное или несчетное. Здесь $\bar{P^-}$ — замыкание P^-.

Свойства разделителя имеют большое значение для характеристики поведения решений разностного уравнения и, следовательно, решений исходной начально-краевой задачи. Например, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. *D несчетно тогда и только тогда, когда Φ имеет циклы, периоды которых отличны от $2^i, i = 0, 1, \ldots$ Если Φ имеет циклы периодов, отличных от 1 и 2, и не имеет циклов периодов, отличных от 2^i, $i = 0, 1, \ldots$, то D счетно.*

По начальной функции $h(t)$ и разделителю D построим множество

$$\Gamma = h^{-1}\,(D)\,.$$

Предположим, что $h(t)$ удовлетворяет условию трансверсальности

$$h\,(t)\, \neq 0, \quad t \in \Gamma.$$

Тогда, как и разделитель D, множество Γ замкнутое и нигде не плотное в $[0,1]$, и, кроме того, $\text{mes}\Gamma{=}0$. Из указанных свойств вытекает, что условие трансверсальности выполняется для открытого всюду плотного подмножества функций $h \in C^2\,([0,1],I)$, то есть условие трансверсальности, как и условие структурной устойчивости, для отображения Φ выполняется почти для всех h.

Заметим, что пространство C^Δ содержит в качестве подпространства C^0, однако, в отличие от C^0, пространство C^Δ обладает свойством компактности. Поэтому C^Δ уже содержат функции, к которым наши решения сходятся при $t \to \infty$.

Определение 1. Решение $v = (v_1, v_2)$ задачи назовем устойчивым в метрике Хаусдорфа (метрике Скорохода) к возмущениям начальных и граничных условий, если сколь угодно малые C^2 возмущения функций Φ и $h_i = 1, 2$ приводят к сколь угодно малым изменениям v в метрике Хаусдорфа (метрике Скорохода).

Напомним, что метрика Скорохода определяется так:

$$s\,(v,\tilde{v})\;=\;\sup_{\alpha\in\Lambda}\left\{\|v\circ\alpha\|_{C^0(\Pi,I\times I)}+\|\alpha-Id\|_{C^0(\Pi,\Pi)}\right\},$$

где Λ — множество гомеоморфизмов $\Pi\mapsto\Pi$, $Id\in\Lambda$ — тождественный гомеоморфизм.

Определение 2. Скажем, что функция $\psi\in C^{\Delta}\,(\Pi,I)$ сходится при $t\to\infty$ к функции $\tilde{\psi}\in C^{\Delta}\,(\Pi,I)$, если

$$\triangle_{\Pi_T^\infty}\,\left(\psi,\tilde{\psi}\right)\to 0, t\to\infty.$$

Аналогично определяется сходимость для функций из $C^{\Delta}\,(I,I)$.

Обозначим через m — наименьшее общее кратное периодов притягивающих циклов отображения Φ, то есть периодов циклов из P^+, и рассмотрим функцию $\Phi^{\Delta}\in C^{\Delta}\,(I,I)$. Определим по Φ отображение $\Phi^{\Delta}:I\mapsto 2^I$ по правилу

$$\Phi^{\Delta}=\lim_{n\to\infty}\Phi^{n!},$$

где символ lim понимается как предел в пространстве C^{Δ}, и рассмотрим последовательность отображений

$$\Phi^n\circ\Phi^{\Delta}\in C^{\Delta}\left(2^I,2^I\right),\quad n=0,1,\ldots.$$

В [13] показано, что при достаточно общих условиях отображение Φ^{Δ} существует, коммутирует с Φ и удовлетворяет соотношению $\Phi^{\Delta}\circ\Phi^{\Delta}=\Phi^{\Delta}$, и тогда $\Phi^{\Delta}\circ\Phi^{\Delta}$ представляет собой полугруппу отображений с образующей $\Phi\circ\Phi^{\Delta}$ и единицей Φ^{Δ}.

При наложенных на Φ и h условиях решение $y(t)$ РУ с начальным условием сходится при $t\to\infty$ в метрике Хаусдорфа к $4m$-периодическому обобщенному решению

$$p\,(t)\;=\Phi^{4m-1}\circ\Phi^{\Delta}\circ h\,(t-2\,(2m-1))\,,\quad t\in[4m-3,4m-1),\,m=1,2,\ldots\qquad(26)$$

с множеством точек многозначности

$$\Gamma_{R^+}=\bigcup_{n\,=\,1}^{\infty}\{t:t-2n\in\Gamma\}\,,$$

где Γ имеет вид $\Gamma=h^{-1}\,(D)$, где $D=\bigcup\limits_{n\geqslant 0}h^{-n}P^-$, P^- — замыкание отталкивающих неподвижных точек отображения, порождаемого соответствующим разностным уравнением. $h(t),t\in[0,l/v)$ — начальная функция краевой задачи.

Лемма 1. *Решение* $\left(v_1^0,v_2^0\right)$ *задачи устойчиво в метрике Хаусдорфа и в метрике Скорохода к* C^2 *— возмущениям функций* Φ *и* h *и сходится при* $t\to\infty$ *в метрике Хаусдорфа к* $4m$*-периодическому по* t *обобщенному решению* p^0 *задачи вида*

$$p^0\,(x,t)\;=\;\left(p\left(t-P_n^1\,(\tilde{\lambda}_1)\,x\right),\,p\left(t-P_n^2\,(\tilde{\lambda}_1)\,x\right)\right),$$

где $p(t)$ *определено формулой* (26), $\Pi=\{x,t:0<x<1,t>0\}$.

Учет последующих приближений

Рассмотрим, например, уравнение для функции $\phi_1(x,t)$. Выделяя в исходных квантовых уравнениях члены порядка h^2, получаем

$$\frac{\partial \phi_1^1}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{P}_n^1}{\partial x}(\lambda_1)\frac{\partial \phi_1^1}{\partial x} = -\frac{i}{2}\frac{\partial^2 \tilde{P}_n^1}{\partial p^2}(\lambda_1)\frac{\partial^2 \phi_0^1}{\partial x^2}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial \phi_2^1}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{P}_n^2}{\partial x}(\lambda_2)\frac{\partial \phi_2^1}{\partial x} = -\frac{i}{2}\frac{\partial^2 \tilde{P}_n^2}{\partial p^2}(\lambda_2)\frac{\partial^2 \phi_0^2}{\partial x^2}. \tag{28}$$

Граничные условия при этом имеют вид

$$\phi_1^1 = \phi_2^1\big|_{x=0}, \quad \phi_1^1 = \Phi'\left(\phi_2^0\right)\phi_2^1\big|_{x=1}.$$

Действительно, граничные условия можно записать в виде

$$\phi_1^0 + h\phi_1^1 = \Phi\left(\phi_2^0 + h\phi_2^0\right)\big|_{x=0}, \quad \phi_2^0 + h\phi_2^1 = \Phi\left(\phi_1^0 + h\phi_1^0\right)\big|_{x=1}. \tag{29}$$

Разлагая правые части соотношений (29) в ряд Тейлора по h, получаем

$$\phi_1^0 + h\phi_1^1 = \Phi\left(\phi_2^0\right) + h\Phi_1'\left(\phi_2^0\right)\big|_{x=0}, \quad \phi_2^0 + h\phi_2^1 = \Phi\left(\phi_1^0\right) + h\Phi_2'\left(\phi_1^0\right)\big|_{x=1}. \tag{30}$$

Нетрудно показать, что если $\phi_2^0(0,0)\in O_\nu(P^+)$, где $O_\nu(p)$ — некоторая v-окрестность точки p, то по лемме о продолжимости решений системы гиперболических уравнений с нелинейными граничными условиями [7] из включения $\phi_2^0(0,0)\in O_\nu(P^+)$ вытекает включение $\phi_2^0(0,t)\in O_\nu(P^+)$ при всех $t>0$. Аналогичное включение справедливо для компоненты $\phi_1^0(0,0)$. Далее, поскольку функции $\phi_2^0(0,t)$ и $\phi_1^0(l,t)$ ограниченны при всех $t>0$, то для заданного $v>0$ существует $h_0>0$ такое, что при всех $h\leqslant h_0(v)$ существуют включения

$$\phi_k^0 + h\phi_k^0 \in O_v(p), \quad k=1,2, \quad p = P^+(\phi).$$

Тогда с точностью до $O(h)$ (и, следовательно, с точностью до $O(h^2)$) граничные условия (30) можно заменить приближенными граничными условиями

$$\phi_1^1 = \Phi_1'\left(\phi_2^0\right)\phi_1^1\big|_{x=0}, \quad \phi_2^1 = \Phi_2'\left(\phi_1^0\right)\phi_1^1\big|_{x=l}. \tag{31}$$

Поскольку $\phi_1^0, \phi_2^0 \in O_v(p)$, то выполняются неравенства $\left|\Phi_1'\left(\phi_2^0(0,t)\right)\right| < 1$ и $\left|\Phi_2'\left(\phi_1^0(l,t)\right)\right| < 1$ при всех $t>0$.

Выполним замену $\phi_k^1 \mapsto i\phi_k^1, r=1,2$. Тогда систему (27), (28) можно записать в виде

$$\frac{\partial \phi_1^1}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{P}_n^1}{\partial p}(\lambda_1)\frac{\partial \phi_1^1}{\partial x} = -\frac{i}{2}\frac{\partial^2 \tilde{P}_n^1}{\partial p^2}(\lambda_1)\frac{\partial^2 \phi_0^1}{\partial x^2}, \tag{32}$$

$$\frac{\partial \phi_2^1}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{P}_n^2}{\partial p}(\lambda_2)\frac{\partial \phi_2^1}{\partial x} = -\frac{i}{2}\frac{\partial^2 \tilde{P}_n^2}{\partial p^2}(\lambda_2)\frac{\partial^2 \phi_0^2}{\partial x^2}. \tag{33}$$

Предположим на время, что правые части системы (32), (33) равны нулю, то есть рассмотрим систему

$$\frac{\partial \phi_1^1}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{P}_n^1}{\partial p}\left(\lambda_1\right)\frac{\partial \phi_1^1}{\partial x} = 0, \tag{34}$$

$$\frac{\partial \phi_2^1}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{P}_n^2}{\partial p}\left(\lambda_2\right)\frac{\partial \phi_2^1}{\partial x} = 0 \tag{35}$$

с граничными условиями (31). Краевая задача (34)–(31) допускает редукцию к разностному уравнению с непрерывным временем [7]

$$\phi_1^1\left(l, t+2\right) = \lambda \Phi\left(\phi_1^1\left(l,t\right)\right),$$

где $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$, $\lambda = \Phi_1'(p)\Phi_2'(p)$. Поскольку $p = P^+$, то $|\lambda| < 1$. Действительно, решения невозмущенной задачи (34), (35) представимы в виде

$$\phi_1\left(x,t\right) = \phi_0^1\left(t - \left(P_n^1\left(\lambda_1\right)\right)' x\right), \quad \phi_2\left(x,t\right) = \phi_0^2\left(t - \left(P_n^2\left(\lambda_2\right)\right)' x\right). \tag{36}$$

Из (36) следует, что решения возмущенной задачи (32), (33) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\phi_1\left(x,t\right) &= \phi_0^1\left(t - \left(P_n^1\left(\lambda_1\right)\right)' x\right) + ih\phi_1^1\left(t - \left(P_n^1\left(\lambda_1\right)\right)' x\right),\\ \phi_2\left(x,t\right) &= \phi_0^2\left(t - \left(P_n^2\left(\lambda_2\right)\right)' x\right) + ih\phi_2^1\left(t - \left(P_n^2\left(\lambda_2\right)\right)' x\right).\end{aligned}$$

Здесь функции ϕ_1^0, ϕ_2^0 и ϕ_1^1, ϕ_2^1 имеют одно и то же множество точек разрыва Γ_Φ. Функции ϕ_1^0, ϕ_2^0 сходятся в метрике Хаусдорфа при $t \to \infty$ к кусочно постоянным асимптотически периодическим функциям, которые почти всюду принимают значения из множества P^+ притягивающих неподвижных точек отображения Φ. Множество точек разрыва Γ_Φ имеет меру Лебега нуль. Ниже мы покажем, что возмущения ϕ_1^1, ϕ_2^1 при $h < 1$ сходятся к нулю равномерно в норме непрерывных функций.

В следующем приближении (с точностью до $O(h^3)$) мы получаем аналогичную систему уравнений

$$\frac{\partial \phi_1^2}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{P}_n^1}{\partial p}\left(\lambda_1\right)\frac{\partial \phi_1^2}{\partial x} = -\frac{i}{2!}\frac{\partial^2 \tilde{P}_n^1}{\partial p^2}\left(\lambda_1\right) - \frac{\partial^2 \phi_1^1}{\partial x^2} - \frac{i}{3!}\frac{\partial^3 \tilde{P}_n^1}{\partial p^3}\frac{\partial^3 \phi_0^1}{\partial x^3}, \tag{37}$$

$$\frac{\partial \phi_2^2}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{P}_n^2}{\partial p}\left(\lambda_2\right)\frac{\partial \phi_2^2}{\partial x} = -\frac{i}{2!}\frac{\partial^2 \tilde{P}_n^2}{\partial p^2}\left(\lambda_2\right) - \frac{\partial^2 \phi_2^2}{\partial x^2} - \frac{i}{3!}\frac{\partial^3 \tilde{P}_n^2}{\partial p^3}\frac{\partial^3 \phi_0^2}{\partial x^3} \tag{38}$$

Напомним, что для общей задачи граничные условия записываются в виде

$$\phi_1^0 + h\phi_1^1 + h^2\phi_2^1 = \Phi_1\left(\phi_2^0 + h\phi_1^1 + h^2\phi_2^1\right)\big|_{x=0}, \tag{39}$$

$$\phi_2^0 + h\phi_2^1 + h^2\phi_2^2 = \Phi_2\left(\phi_1^0 + h\phi_1^1 + h^2\phi_1^2\right)\big|_{x=0}. \tag{40}$$

Граничные условия (39), (40) в окрестности точки $p = P^{+}(\Phi)$ допускают редукцию к граничным условиям

$$\phi_1^1 = \Phi_1'(p)\,\phi_2^1\big|_{x=0}, \quad \phi_2^1 = \Phi_2'(p)\,\phi_1^1\big|_{x=l}. \tag{41}$$

Выполним замену $\phi_1^2 \mapsto i\phi_1^2, \phi_2^2 \mapsto i\phi_2^2$. В результате, как и выше, для невозмущенной системы (37), (38) получаем разностное уравнение

$$\phi_1^2(1, t+2) = \Phi_1'(p)\,\Phi_2'(p)\,\phi_1^2(1,t).$$

Поскольку выполняется неравенство $|\Phi_1'(p)\,\Phi_2'(p)| < 1$, то функция $\phi_1^2(1,t) \to 0$ при $t \to \infty$. Аналогичным свойством обладает и функция Φ_1^1 для невозмущенной системы. Покажем, что для возмущенной системы функции $\phi_1^k(x,t), k = 1,2$ обладают этим же свойством, поскольку в правой части возмущенной системы присутствует множитель $\frac{\partial^2 \phi_0^k(x,t)}{\partial x^2}, k = 1,2$, который стремится к нулю при $t \to \infty$. Из сказанного следует, что общее решение невозмущенной задачи можно искать в виде

$$\begin{aligned}
\phi_1(x,t) &= \phi_0^1(\zeta) + ih^2\phi_1^1(\zeta) + ih^3\phi_2^1(\zeta) + O(\phi_1),\\
\phi_2(x,t) &= \phi_0^2(\zeta) + ih^2\phi_1^2(\zeta) + ih^3\phi_2^2(\zeta) + O(\phi_2).
\end{aligned}$$

Решение возмущенной задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_1(x,t) &= \exp\left(\frac{i}{h}\left(\lambda_1^1 x + \lambda_1^2 t\right)\right)\phi_1(x,t) + O(\phi_1),\\
\tilde{\phi}_2(x,t) &= \exp\left(\frac{i}{h}\left(\lambda_2^1 x + \lambda_2^2 t\right)\right)\phi_2(x,t) + O(\phi_2).
\end{aligned}$$

Здесь функции $O(\phi_1)$ и $O(\phi_2)$ определяются правыми частями гиперболических уравнений.

Введем обозначения

$$\begin{gathered}
F_k^1 = -\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 P_n^k}{\partial p^2}(\lambda_k)\frac{\partial^2 \phi_k^1}{\partial x^2} + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 P_n^k}{\partial p^3}(\lambda_k)\frac{\partial^3 \phi_0^1}{\partial x^3},\\
F_k^0 = -\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 P_n^k}{\partial p^2}(\lambda_k)\frac{\partial^2 \phi_k^0}{\partial x^2}, \quad k = 1,2.
\end{gathered}$$

Тогда с точностью до $O(h^2)$ получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial P_n^1}{\partial p}(\lambda_1)\frac{\partial u_1}{\partial x} = F_1\left(\phi_0^1\right),\\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial P_n^2}{\partial p}(\lambda_2)\frac{\partial u_2}{\partial x} = F_2\left(\phi_0^2\right),
\end{aligned}$$

где ввели обозначения $u_1 = \phi_1^1$ и $u_2 = \phi_2^1$, с граничными условиями

$$u_1 = \Phi_1'(p)\,u_2|_{x=0}, \quad u_2 = \Phi_2'(p)\,u_1|_{x=l}.$$

Вопросы существования и единственности решений нелинейных краевых задач для полулинейных систем гиперболического типа с одной пространственной переменной рассмотрены в работе [7]. Из результатов, полученных в [7], в частности следует, что если существует такое $\epsilon_0>0$, что при всех $(x,t)\in\Pi$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_0^k\right|\leqslant\epsilon_0,$$

то при достаточно малых $\epsilon_0>0$ задача (17)–(19) в нулевом приближении имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение. Интегрированием вдоль характеристик можно показать, что это решение удовлетворяет системе интегро-разностных уравнений:

$$u_1(x,t+2) =$$
$$=\lambda_1\left\{\lambda_2\left[u_1(x,t)+\int\limits_t^{t+1-\left(P_n^1\right)'(\lambda_1)x}F_1\Big(s+\left(P_n^1\right)'(\lambda_1)\,x-t,s\Big)ds\right]+\int\limits_{t+1-(P_n^2)'(\lambda_2)x}^{t+2-\left(P_n^2\right)'(\lambda_2)x}F_2\Big(s+\left(P_n^2\right)'(\lambda_2)\,x,s\Big)\,ds\right\}+$$
$$=\int\limits_{t+2}^{t+2-\left(P_n^2\right)'(\lambda_1)x}F_1\Big(s-t-2+\left(P_n^2\right)'(\lambda_1)\,x,s\Big)\,ds, \tag{42}$$

$$u_2(x,t+2) =$$
$$=\lambda_2\left\{\lambda_1\left[u_2(x,t)+\int\limits_t^{t+1-\left(P_n^2\right)'(\lambda_2)x}F_2\Big(s+\left(P_n^2\right)'(\lambda_1)\,x-t,s\Big)ds\right]+\int\limits_{t-(P_n^1)'(\lambda_1)x}^{t+1-\left(P_n^1\right)'(\lambda_2)x}F_1\Big(s-t-\left(P_n^1\right)'(\lambda_1)\,x,s\Big)ds\right\}+$$
$$+\int\limits_{t+1+(P_n^1)'(\lambda_1)x}^{t+2}F_2\Big(t+2+\left(P_n^2\right)'(\lambda_2)\,x-s,s\Big)\,ds. \tag{43}$$

Введем обозначения

$$M_k=\sup_{(x,t,s\in\Pi)}F_k(x,t,s)\,,k=1,2.$$

Тогда из (42), (43) вытекают неравенства

$$|u_1(x,t+2)|\leqslant\lambda_1\Big\{\lambda_2\Big(|\phi_1(x,t)|+M_1\Big|1-\left(P_n^1\right)'(\lambda_1)\,x\Big|\Big)+M_2\Big\}+M_2\Big|\left(P_n^1\right)'(\lambda_1)\,x\Big|, \tag{44}$$

$$|u_2(x,t+2)|\leqslant\lambda_2\Big\{\lambda_1\Big(|\phi_2(x,t)|+M_2\Big|1-\left(P_n^2\right)'(\lambda_2)\,x\Big|\Big)+M_1\Big\}+M_2\Big|\left(P_n^1\right)'(\lambda_1)\,x\Big|. \tag{45}$$

Используя неравенство треугольника из (44), (45) нетрудно получить неравенства

$$|u_1(x,t+2)|\leqslant\lambda_1\lambda_2\,|u_1(x,t)|+\lambda_1\rho_1, \tag{46}$$

$$|u_1(x,t+4)| \leqslant (\lambda_1\lambda_2)^2 |u_1(x,t)| + (1+\lambda_1\lambda_2)\lambda_1\rho_1, \tag{47}$$

$$|u_1(x,t+2n)| \leqslant (\lambda_1\lambda_2)^n |u_1(x,t)| + \lambda_1\rho_1 \left(1+\lambda_1\lambda_2+\ldots+(\lambda_1\lambda_2)^n\right); \tag{48}$$

и аналогичные неравенства — для компоненты решения $u_2(x,t+2n)$. В (46)–(48) введено обозначение

$$\rho_1 = \lambda_2 \left(M_1 \left(1 + \left| \left(P_n^1\right)'(\lambda_1) \right| \right) + M_2 \right) + M_1 \left| \left(P_n^1\right)'(\lambda_1) \right|.$$

Из (46)–(48) вытекает неравенство

$$|u_1(x,t+2n)| \leqslant (\lambda_1\lambda_2)^n |u_1(x,t)| + \frac{\lambda_1\rho_1\left(1-(\lambda_1\lambda_2)^n\right)}{1-\lambda_1\lambda_2}. \tag{49}$$

Поскольку $\lambda_1<1$ и $\lambda_2<1$, то из (49) вытекает неравенство

$$|u_1(x,t+2n)| \leqslant \frac{\lambda_1\rho_1}{1-\lambda_1\lambda_2}. \tag{50}$$

Поскольку $\rho_1(x,t)\to 0$ при $t\to\infty$ при всех $0<x<1$ (так как $\left|\frac{\partial^2\phi_0^k}{\partial x^2}\right|\to 0, k=1,2,$ если $t\to\infty$), то из (50) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} |u_1(x,t+2n)| \to 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} |u_2(x,t+2n)| \to 0. \tag{51}$$

Напомним, что $u_1=\phi_1^1$ и $u_2=\phi_2^1$ учитывают поправку к решению с точностью до $O(h^2)$.

Для любого $\epsilon>0$ существует такое $t_0(\epsilon)>0$, что при всех $t\geqslant t_0$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial^2\phi_1^k}{\partial x^2}\right| \leqslant \epsilon, \quad \left|\frac{\partial^3\phi_0^k}{\partial x^3}\right| \leqslant \epsilon. \tag{52}$$

Указанные в неравенствах (52) величины стремятся к нулю при $t\to\infty$. Это позволяет доказать, что для решений уравнений (37), (38) с линейными граничными условиями (41) выполняются неравенства

$$\lim_{n\to\infty} \left|\phi_2^k(x,t+2n)\right|_{x,t\in\Pi} \to 0. \tag{53}$$

Из (51) и (53) следует, что при всех $h<h_0$ решения искомой краевой задачи асимптотически устойчивы в метрике Хаусдорфа и с точностью до $O(h^2)$ решение определяется нулевым приближением и имеет вид

$$\tilde{\phi}_k(x,t) = \exp\left(\frac{i}{h}\left(\lambda_1^k t + \lambda_2^k x\right)\right) p_k \left(t - \frac{x}{\left(P_n^k\right)'\left(\lambda_1^k\right)} \right) + O\left(h^2\right), \quad k=1,2. \tag{54}$$

Докажем асимптотическую устойчивость решений краевой задачи [7].

Теорема 1. *Пусть отображения* $\Phi_1, \Phi_2 \in C^2(I, I)$, *где* I *— открытый ограниченный интервал, являются структурно устойчивыми, а начальные функции удовлетворяют условию трансверсальности. Тогда решение краевой задачи* (17)–(19) *является асимптотически устойчивым в метрике Хаусдорфа.*

Доказательство. Если отображения Φ_1, Φ_2 структурно устойчивы, то их суперпозиция $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$ структурно устойчива. Если $\Phi_1, \Phi_2 \in C^2(I, I)$, то по известной теореме Шуба отображение Φ структурно устойчиво. Отсюда вытекает, что решение устойчиво к возмущениям начальных и граничных условий в нулевом приближении. Покажем, что это решение устойчиво относительно возмущений произвольного вида $u(x, t, h)$. При этом условия непрерывного и гладкого согласования начальных и граничных условий предполагаются выполненными во всех приближениях. Зададим произвольное $v > 0$ и покажем, что найдется такое $h_0 = h_0(v)$, что при всех $0 \leqslant h \leqslant h_0$ справедливо неравенство

$$\Delta_\Pi\left(\Phi^h, \phi^0\right) \leqslant \sqrt{3v},$$

где Δ — расстояние в метрике Хаусдорфа для графиков. Тогда устойчивость будет доказана. Пусть Γ_{p_0} — нигде не плотное в области Π множество характеристик системы. Поэтому по $v>0$ всегда можно указать $v^*>0$ такое, что $v^*>0$-окрестность Γ_{p_0} (обозначим ее $U_{v^*}(\Gamma_{p_0})$ состоит из полос, ширина каждой из которых не превосходит v. Для доказательства теоремы покажем вначале, что при достаточно малых $h \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\left|\phi^h(x,t) - \phi^0(x,t)\right| \leqslant \frac{v}{2}$$

при всех $(x,t) \in \Pi \setminus U_{v^*}\left(\Gamma_{p^0}\right)$. Так как u^0 сходится к p^0 (это доказано в [10]), то найдется такое $T = T(v) > 0$, что

$$|\phi_0(x,t) - p_0(x,t)| < \frac{v}{2}$$

при всех $(x,t) \in \Pi_T^\infty \setminus U_{v^*}\left(\Gamma_{p^0}\right)$, где $\Pi_T^\infty = \{0 < x < 1, T < t < \infty\}$. С другой стороны,

$$\left|\phi^h(x,t) - \phi^0(x,t)\right| < v$$

при всех $(x,t) \in \Pi_T^\infty \setminus U_{v^*}\left(\Gamma_{p^0}\right)$. Действительно,

$$\left|\phi^h(x,t) - \phi^0(x,t)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} h^n \phi_n\right|.$$

Частичная сумма ряда допускает оценку

$$|h\phi_1 + \ldots + h^n\phi_n| \leqslant hM_n \frac{1 - h^{n-1}}{1 - h}, \tag{55}$$

где $M_n = \sup\limits_{(x,t)\in\Pi} |\phi_n(x,t)|$. Для любого $v_n > 0$ существует $t_0(n)$ такое, что при всех $t > t_0(n)$ выполняется неравенство

$$M_n < \frac{1-h}{h} \frac{1}{1 - h^{n-1}} = v_n. \tag{56}$$

Выберем $v=2\max\limits_{n=1,2,\ldots} v_n$. Тогда из (55) и (56) вытекает неравенство

$$\left|\phi^h(x,t)-\phi^0(x,t)\right|<\frac{nu}{2}, \tag{57}$$

$(x,t)\in\Pi_T^\infty\setminus U_{v^*}\left(\Gamma_{p^0}\right)$. Тогда из (55) и (56) в силу действия неравенства треугольника следует, что при всех $t>T(v)$ и при всех $0<h<h_0$ выполняется неравенство

$$\left|\phi^h(x,t)-p^0(x,t)\right|<v,\quad (x,t)\in\Pi_T^\infty\setminus U_{v^*}\left(\Gamma_{p^0}\right).$$

Чтобы завершить доказательство, оценим расстояния между графиками решений ϕ^h и ϕ^0 на множеетве $U_{v^*}\left(\Gamma_{p^0}\right)$. Покажем, что

$$\Delta\left(U_{v^*}\left(\Gamma_{p^0}\right)\right)\leqslant\sqrt{3}v. \tag{58}$$

Множество $U_{v^*}\left(\Gamma_{p^0}\right)$ состоит из пересекающихся под некоторым углом полос; угол пересечения определяется векторными полями $x'_t=\left(P_n^1\right)'(\lambda_1)$ и $x'_t=\left(P_n^2\right)'(\lambda_2)$. Пусть (x^*,t^*) — произвольная точка на одной из таких полос, где $t^*>T(v)$. Рассмотрим отрезок $\{x=x^*,t^*<t<t^*+v^*\}$, пересекающий эту полосу параллельно оси t. Так как ширина рассматриваемых полос не более v, то $v'\leqslant\sqrt{2}v$. Для доказательства неравенства (58) достаточно показать, что

$$\left|\sup_{t\in(t^*,t^*+v')}\phi^h(x^*,t)-\sup_{t\in(t^*,t^*+v')}\phi^0(x^*,t)\right|<v,$$

$$\left|\inf_{t\in(t^*,t^*+v')}\phi^h(x^*,t)-\inf_{t\in(t^*,t^*+v')}\phi^0(x^*,t)\right|<v,$$

то есть, что

$$\Delta\Big(\phi^h(x^*,t+v')-\phi^0(x^*,t+v')\Big)<v$$

где Δ — расстояние Хаусдорфа между интервалами $\phi^h(x^*,t+v')$ и $\phi^0(x^*,t+v')$.

Чтобы доказать последнее неравенство, воспользуемся тем, что, во-первых,

$$\Delta\Big(\Phi^m\left(\phi^h(x^*,t^*+v')\right),\Phi^n\left(\phi^h(x^*,t^*+v')\right)\Big)<(1-\delta_2)\,v, \tag{59}$$

где $0<h<h_0$. Это неравенство вытекает из свойств отображения Φ и неравенства

$$\left|\Phi^m(y')-\Phi^m(y'')\right|<(1-\sigma_1)\left|y'-y''\right|, \tag{60}$$

которое справедливо при любых $y',y''\in U_{\sigma_2}(P^+)$. Неравенство (60) выполняется для y' и y" в концах рассматриваемого интервала. Во-вторых,

$$\left|\phi^h(x',t)-\Phi^m\left(\phi^h(x^*,t-2m)\right)\right|\delta_1 v \tag{61}$$

при $t\in(t^*,t^*+v')$, $0\leqslant h<h_0$. Тогда (60) получается из (59), (61) простым использованием неравенства треугольника и того факта, что расстояние в метрике Хаусдорфа не превышает расстояния в равномерной метрике. Таким образом, максимальные и

минимальные значения ϕ^h и ϕ^0 на рассматриваемом отрезке отличаются не более чем на v. Поэтому

$$\Delta\Big(\phi^h\left(x^*, t^* + v'\right), \phi^0\left(x^*, t^* + v'\right)\Big) < \sqrt{v^2 + 2v^2} = \sqrt{3}v. \qquad (62)$$

Неравенство (62) верно для любого отрезка, пересекающего множество $U_{v^*}\left(\Gamma_{p^0}\right)$ в вертикальном направлении. Поэтому верно и неравенство (56), а из (56) и (55) следует неравенство $\Delta\left(\phi^h, \phi_0\right) \leqslant \sqrt{3}v$. Теорема доказана. □

3. Приложение к некогерентным оптическим солитонам

Феномен возникновения оптических (пространственных) солитонов определяется динамическим балансом между конкуренцией двух факторов: 1) стремлением оптического луча расширить собственный носитель в силу дифракции; 2) стремлением луча сжать собственный носитель в силу самофокусировки. Эксперименты [6] доказали возможность существования солитонов, которые являются пространственно некогерентными и квазимонохроматическими. Теоретические работы [5, 6] ограничивались исследованием случая солитонов, некогерентных одновременно по пространствнной и временной переменной. Однако предложенная теория не могла моделировать, например, некогерентный белый свет, то есть не позволяла описать пространственно-временные когерентные свойства солитонов и дальнейшую эволюцию спектральной плотности. В данном пункте мы рассмотрим пространственно-временной (по обеим переменным) свет. Предположим, что пространственный профиль света принадлежит интервалу частот $[\omega, \omega + d\omega]$ и пространственная корреляционная длина (поперек солитона) всегда больше при низких частотах и меньше при высоких частотах (см. [6]).

Начнем исследование уравнения

$$i\left(\frac{\partial f^\omega}{\partial z} + \theta\frac{\partial f^\omega}{\partial x}\right) + \frac{1}{2k_\omega}\frac{\partial^2 f^\omega}{\partial x^2} + \frac{k_\omega}{n_0}\delta n\left(I\right) f^\omega\left(x, z, \theta\right) = 0.$$

Здесь f^ω — когерентная плотность (на заданной частоте) оптического луча; $k_\omega = \frac{n_0\omega}{c}$, где n_0 — показатель преломления, ω — частота, c — скорость света; параметр θ определяет угол между направлением движения луча в плоскости (z, x) и осью OZ. Пространственно-временные когерентные свойства луча могут быть исследованы в терминах спектральной плотности

$$B_\omega\left(x_1, x_2, z\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\theta \exp\left(ik_\omega\left(x_1 - x_2\right)\right) f_\omega\left(x_1, z, \theta\right) f_\omega\left(x_2, z, \theta\right).$$

Предположим, что оптическая среда является дисперсной, $n_0 = n_0(\omega)$. Рассмотрим более естественное нестационарное уравнение Шредингера (в лабораторной системе координат) с оптическим источником-стоком. Ограничимся одномерным оптическим стержнем [9]. Уравнение имеет вид

$$i\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \theta\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{h^2}{2k}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{k}{n_0}\delta n\left(I\right) f = 0,$$

где индекс ω в обозначениях мы опускаем.

4. Метод ВКБ

Будем искать решение уравнения в виде $f:=\varphi(\zeta,t)$, где $\zeta=t-x/V$. На каждом сечении $\zeta=\zeta_0$ луч распространяется по прямой $t-x=\zeta_0$. Тогда

$$-ih\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{h^2}{2k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}-\frac{k}{n_0}\delta n\left(I\right)f=0.$$

Выполним замену $\bar{x}=\sqrt{k}x$ и запишем уравнение в виде

$$-ih\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}-\frac{k}{n_0}\delta n\left(I\right)f=0.$$

При этом мы рассмотрим идеальный оптический стержень, который имеет поглощающие или излучающие центры только на концах, что приводит к линейному уравнению Шредингера

$$-ih\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}=0. \tag{63}$$

Рассмотрим для решений уравнения начальное условие

$$\varphi\left(x,0\right)=\varphi_0\exp\left(iS_0\left(x,t\right)/h\right),$$

где V,S_0,φ_0 суть гладкие функции, причем V и S_0 вещественны. Функция Гамильтона имеет вид

$$H\left(p,q\right)=\frac{p^2}{2}+V\left(q\right).$$

Асимптотическое решение задачи Коши записывается в виде

$$\varphi\left(x,t\right)=\exp\left(iS_0\left(x,t\right)/h\right)\varphi\left(x,t\right), \tag{64}$$

где неизвестные функции $S(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ предполагаются гладкими и вещественными. Из (63), (64) следует, что

$$\left[S_t+V\left(x\right)+\frac{1}{2}\left(S_x\right)^2\right]\varphi+\left(-ih\right)\left[S_x\varphi_x+\varphi_t+\frac{1}{2}\varphi S_{xx}\right]+\left(-\frac{ih}{2}\right)\varphi_{xx}=0.$$

Для того чтобы $\varphi(x,t)$ являлась асимптотическим решением уравнения Шредингера с точностью до $O\left(h^2\right)$, достаточно, чтобы $S(\zeta,t)$ являлась решением задачи Коши для уравнения Гамильтона – Якоби

$$S_t+V\left(x\left(\zeta,t\right)\right)+\frac{1}{2}S_\zeta^2=0,\quad S\left(\zeta,0\right)=S_0\left(\zeta\right),$$

а функция $\varphi(\zeta,t)$ удовлетворяла задаче Коши для уравнения переноса

$$\varphi_t+\varphi_\zeta S_\zeta+\frac{1}{2}\varphi S_{\zeta\zeta}=0,\quad \varphi\left(\zeta,0\right)=\varphi_0\left(\zeta\right).$$

Это известный анзатц Маслова, который позволяет свести задачу нахождения асимптотического решения дифференциального уравнения второго порядка к более простой задаче отыскания точного решения системы канонических уравнений первого порядка.

Мы рассмотрим предельный полупроводниковый стержень, который является идеальным в том смысле, что не содержит центров поглощения или испускания оптического излучения. Это означает, что при $0<x<l$, где l — длина стержня, мы можем положить $V(x)\equiv 0$. В результате получим уравнение Гамильтона–Якоби

$$S_t + \frac{1}{2}S_\zeta^2 = 0.$$

Будем искать решения уравнения в виде $S(\zeta,t)=\lambda_1 t+\lambda_2\zeta$, что приводит к алгебраическому соотношению $\lambda_1+\lambda_2^2=0$. Отсюда вытекает, что

$$S(\zeta,t) = \lambda_2\left(\zeta - \frac{1}{2}\lambda_2 t\right),$$

где постоянная λ_2 находится из соотношения

$$S(\zeta_{t=0},0) = \lambda_2\zeta_{t=0} = -\frac{\lambda_2}{\theta}x = S_0(x).$$

Фаза определена и в исходных переменных имеет вид

$$S(x,t) = \lambda_1 t + \lambda_2\left(t - \frac{x}{\theta}\right).$$

Так как фаза линейна, то $S_{\zeta\zeta}=0$, и $S_\zeta=0$. Следовательно, уравнение можно записать в виде

$$\varphi(\zeta,t) := \varphi\left(t - \frac{\zeta}{\lambda_2}\right).$$

Теперь рассмотрим в исходных переменных граничные условия

$$\varphi_t(0,t) = F_1[\varphi(0,t)], \quad \varphi_t(l,t) = F_2[\varphi(l,t)], \quad t>0,$$

где F_1 и F_2 — заданные функции. Предположим, что система обыкновенных дифференциальных уравнений является вполне интегрируемой, то есть имеет общий интеграл

$$W[\varphi(0,t)\,\varphi(l,t)] = \mu, \mu\in R. \tag{65}$$

Предположим, что существует открытый ограниченный интервал $I\subset R^+$ такой, что для всех $\varphi(0,t),\varphi(l,t)\in I$ при каждом фиксированном $t>0$ соотношение (65) разрешимо таким образом, что

$$\varphi(l,t) = \Phi_\mu[\varphi(0,t)],$$

где $\Phi_\mu : I\mapsto I$ — унимодальное отображение класса C^2. Тогда

$$\varphi(l,t) = \varphi\left[\left(1-\frac{1}{\lambda_2}t\right)+\frac{l}{\lambda_2\theta}\right], \quad \varphi(0,t) = \varphi\left[\left(1-\frac{1}{\lambda_2}t\right)\right].$$

Пусть $\lambda{=}1-\lambda_2^{-1}$, $t{\mapsto}\lambda t$ и $L{=}l/\lambda_2\theta$. Тогда функциональное равенство можно записать в виде

$$\varphi\left(t+L\right)\,=\Phi_\mu\left(\varphi\left(t\right)\right).$$

В результате мы получаем разностное уравнение с непрерывным временем. Если отображение Φ_μ является унимодальным, структурно устойчивым и гиперболическим, то множество неподвижных точек такого отображения конечно. Тогда существует такой достаточно общий класс начальных функций $h\left(t\right), t\in\left[-\,L,0\right)$, что решения РУ можно найти с помощью последовательных итераций функции $h(t)$ отображением Φ_μ. В результате при $t\to\infty$ начальная функция $H(t)$ сходится к некоторой периодической кусочно-постоянной функции с конечным или бесконечным множествами точек разрыва Г на периоде. Если Г конечно, то мы говорим о наличии колебаний релаксационного типа, если счетно — предтурбулентного. Если Г несчетно, то мы имеем колебания турбулентного типа. Следовательно, то же можно сказать об огибающей волнового пакета исходной краевой задачи для уравнения Шредингера.

Список литературы

[1] В. Гийемин, С. Стернберг, *Геометрические асимптотики*, Мир, Москва, 1981.

[2] А. С. Мищенко, Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов, *Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора*, Наука, Москва, 1978.

[3] В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Наука, Москва, 1978.

[4] R. Pezer, H. Buljan, G. Bavtal, O. Cohen, M. Segal, "Gap random-phase lattice solitons", *OSA Technical Digest*, **13**:13 (2005), 5013–5023.

[5] А. Н. Маймнстров, "Оптические солитоны", *Соросовский образовательный журнал*, 1999, № 11, 97–102.

[6] H. Buljan, M. Segev, M. Soljaci?, N. K. Efremidis, D. N. Christodoulides, "White-light solitons", *Opt. Lett.*, **28**:14 (2003), 1239–1241.

[7] А. Н. Шарковский, Ю. А. Майстренко, Е. Ю. Романенко, *Разностные уравнения и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1986.

[8] E. Yu. Romanenko, A. N. Sharkovsky, "From Boundary Value Problems to Difference Equations: A Method of Investigation of Chaotic Vibrations", *Intern. J. Bif. and Chaos*, **9**:07 (1999), 1285–1306.

[9] E. Yu. Romanenko, "Randomness in deterministic difference equations", *Journal of Difference Equations and Applications*, **16**:1 (2010), 243–268.

[10] A. N. Sharkovsky, E. Yu. Romanenko, "Turbulence: Ideal", *Encyclopedia of Nonlinear Science*, Rontedge, New York, 2005, 955–957.

[11] A. Avila, M. Lyubich, W. de Melo, "Regular or stochastic dynamics in real analytic families of unimodal maps", *Inventiones mathematicae*, **154** (2003), 451–550.

[12] E. Yu. Romanenko, "On attractors of continuous difference equations and long-time behaviour of solutions", *J. Difference equations and Appl.*, **9**:3-4 (2003), 263–280.

[13] A. N. Sharkovsky, E. Yu. Romanenko, "Ideal turbulence: Attractors of deterministic systems may lay in the space of random fields", *Intern. J. Bif. and Chaos*, **2**:1 (1982), 31–36.

Поступила в редакцию
13 марта 2022 г.

Krasnyuk I. B.[1] Wave packets in boundary problems of quantum mechanics. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2023. V. 23. No 1. P. 34–54.

[1] Galkin Donetsk Institute for Physics and Engineering, Donetsk, Russia

ABSTRACT

System of two independent linear quantum equations with symbols representing polynoms of the n-th order is considered. Boundary conditions are non-linear. They functionally connect amplitudes of the direct and inverse wave functions by mapping $\Phi : I \mapsto I$. It is demonstrated that 1) if mapping Φ is linear, the amplitude of the falling wave at $t \to \infty$ tends to zero or infinity; 2) if Φ is nonlinear but single-valued, at $t \to \infty$, the amplitude of the falling wave tends to a double-periodic — constant function with one singular point per a period; 3) if Φ is multi-valued, asymptotically periodic — constant distributions of square amplitude of the wavefunction with finite or infinite number of singularities per a period are possible. The limiting solutions of this type we shall call distributions of pre-turbulent or turbulent type. Applications to the study of the emergence of spatial-temporal bright and dark asymptotic solitons in a limited resonator with non-linear feedback between the amplitudes of two optical beams on the resonator surface are presented.

Key words: *linear quantum equations, boundary conditions, solitons.*