Дальневосточный математический журнал. 2023. Т. 23. № 1. С. 55–80

УДК 517.55, 512.813.52, 514.763
MSC2020 32M12, 32A10, 17B66, 14H10, 13A15

© А. В. Лобода[1], Р. С. Акопян[2], В. В. Крутских[3]

О 7-мерных алгебрах голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$, имеющих 5-мерный абелев идеал

В связи с задачей описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^4$ в статье изучаются 7-мерные орбиты вещественных алгебр Ли в этом пространстве. По известной теореме Морозова, любая нильпотентная 7-мерная алгебра Ли имеет не менее чем 4-мерный абелев идеал. В статье рассматриваются нильпотентные неразложимые 7-мерные алгебры Ли, содержащие 5-мерный абелев идеал. Доказано, что в пространстве $\mathbb{C}^4$ все орбиты таких алгебр вырождены по Леви. Это утверждение охватывает 73 алгебры из полного списка 149 неразложимых 7-мерных нильпотентных алгебр Ли.

Ключевые слова: *однородное многообразие, голоморфная функция, векторное поле, алгебра Ли, абелев идеал.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202306

Введение

Настоящая статья связана с задачей описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$. Интерес к ситуации с однородностью в этом пространстве обусловлен тем, что аналогичные задачи в $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}^3$ уже решены (см. [1] — в двумерном случае и [2–5] — в трехмерном).

Как в уже исследованных случаях, так и в пространстве $\mathbb{C}^4$ один из возможных путей изучения однородных гиперповерхностей связан с рассмотрением алгебр Ли голоморфных векторных полей на таких гиперповерхностях. При этом минимально возможная размерность алгебры Ли, отвечающей однородной гиперповерхности в $\mathbb{C}^n$, равна $2n-1$. В изучаемом нами случае пространства $\mathbb{C}^4$ мы будем иметь дело только с 7-мерными алгебрами Ли.

[1] Воронежский государственный технический университет, 394006, г. Воронеж, ул. 20 лет Октября, 84.
[2] МИРЭА, Российский технологический университет, 119454, г. Москва, просп. Вернадского, 78.
[3] Воронежский государственный университет, 394018, г. Воронеж, Университетская пл. 1.
Электронная почта: `lobvgasu@yandex.ru` (А. В. Лобода), `akrim111@yandex.ru` (Р. С. Акопян), `krutskihvlad@mail.ru` (В. В. Крутских).

В настоящее время построение полного списка абстрактных 7-мерных алгебр Ли только близится к завершению (см. [6]), но его нильпотентная часть изучена. После статьи [7] и уточнения (с помощью компьютерных вычислений) результатов Сили в работе Гонга [8] список из 149 типов вещественных 7-мерных нильпотентных неразложимых алгебр Ли считается достаточно надежным.

Отметим для сравнения, что уже почти 60 лет известен и «считается корректным» (см., например, [9]) список 5-мерных алгебр Ли (см. [10]). Этот список активно используется и цитируется, он включен в библиотеку компьютерного пакета Maple, в монографии известных авторов ([11, 12]). Однако и в нем недавно обнаружены (см. [4]) значимые неточности.

Настоящая статья является одним из завершающих фрагментов изучения интегральных поверхностей (орбит) в $\mathbb{C}^4$ нильпотентных 7-мерных алгебр Ли (см. [13–15]). Орбиты полной размерности являются однородными гиперповерхностями в $\mathbb{C}^4$; естественный интерес представляют вопросы о связи свойств алгебр Ли со свойствами этих однородных поверхностей.

Так, в [14] показано (Теорема 2, с. 209), что при наличии у 7-мерной алгебры Ли абелевой подалгебры достаточно большой размерности все однородные гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$, являющиеся орбитами такой алгебры, оказываются вырожденными по Леви. При этом компьютерными алгоритмами (см. [16]) с последующей ручной проверкой установлено, что список [8] содержит 22 алгебры, имеющие в точности 5-мерный абелев идеал и удовлетворяющие формулировке процитированного результата из [14].

Всего в [8] содержится 73 алгебры, максимальный абелев идеал которых является в точности 5-мерным. Вопрос о вырожденности орбит остальных алгебр Ли из числа 73, не удовлетворяющих условиям теоремы 2 из [14], является основным в данной работе.

Важным вспомогательным инструментом нашего исследования является информация об элементах из дополнения к абелеву идеалу, которые могут коммутировать с подалгебрами такого идеала. Рассматривая $51 = (73 - 22)$ алгебру Ли, несложно установить, что в дополнении к 5-мерному абелеву идеалу любой из них имеется элемент, коммутирующий либо с 3-мерной (39 алгебр), либо с 2-мерной (12 алгебр) подалгеброй этого идеала.

В статье проведено исследование двух этих случаев с выделением в них четырех основных семейств алгебр Ли. Получено следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть 7-мерная алгебра* $\mathfrak{g}$ *голоморфных векторных полей в пространстве* $\mathbb{C}^4$ *имеет полный ранг вблизи некоторой точки этого пространства и содержит 5-мерный абелев идеал. Если* $\mathfrak{g}$ *изоморфна одной из алгебр списка [8], то ее орбита, проходящая через данную точку, вырождена по Леви.*

Отметим, что разложимые нильпотентные 7-мерные алгебры Ли (не входящие в список [8]) также могут иметь в $\mathbb{C}^4$ только вырожденные 7-мерные орбиты (см. [15]). В то же время в [13] получены примеры невырожденных несферических орбит для алгебр Ли из упомянутого списка [8]; у алгебр с такими орбитами максимальные абелевы идеалы являются 4-мерными.

1. Основные понятия и подходы к задаче

Введем несколько начальных понятий, на которых базируются обсуждения всей статьи. Основное в статье понятие однородной гиперповерхности связано с уточнениями следующего известного определения (см. [17, с. 444]).

Определение 1. Многообразие M *однородно относительно некоторой группы* (преобразований) G, если эта группа транзитивно действует на M, т.е. любую точку из M можно перевести в любую другую точку этого многообразия подходящим преобразованием из группы G.

В наших обсуждениях имеется в виду, что G — это локальная группа Ли голоморфных преобразований, определенных вблизи некоторой точки Q пространства $\mathbb{C}^4$, а M — вещественно аналитическая гиперповерхность этого пространства, содержащая точку Q. Связывая локальную группу Ли G с соответствующей ей алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ голоморфных векторных полей, естественно называть поверхность M *орбитой* группы Ли G (и алгебры Ли $\mathfrak{g}$), или *интегральной поверхностью* алгебры $\mathfrak{g}$, проходящей через точку Q.

Вещественная гиперповерхность $M = \{\Phi = 0\}$ является орбитой алгебры $\mathfrak{g}$ голоморфных векторных полей, если для каждого базисного поля e_k этой алгебры выполняется условие касания M в виде

$$\operatorname{Re}\left(e_k\ (\Phi)|_M\right) = 0. \tag{1}$$

В нашей статье обсуждаются *голоморфные реализации* абстрактных 7-мерных алгебр Ли в пространстве $\mathbb{C}^4$, т.е. алгебры Ли голоморфных векторных полей, изоморфные (в смысле совпадения совокупности коммутационных соотношений) тем или иным абстрактным алгебрам. Мы опираемся при этом на известную теорему Фробениуса в следующей версии:

орбита 7-мерной вещественной алгебры Ли голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$, имеющей (полный) ранг 7 в точке P, — это некоторая вещественно-аналитическая голоморфно однородная гиперповерхность в $\mathbb{C}^4$, проходящая через эту точку.

За счет голоморфного преобразования, переводящего точку Q в начало координат, можно задать такую поверхность M уравнением

$$\operatorname{Im} z_4 = F(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \operatorname{Re} z_4) \text{ с условиями } F(0) = 0,\ dF(0) = 0. \tag{2}$$

Если при этом матрица Гессе поверхности (2), т.е. эрмитова матрица

$$H = \left(\partial^2 F / \partial z_k \partial \bar{z}_j\right)(0), \quad k, j \in \{1, 2, 3\}, \tag{3}$$

является вырожденной (или невырожденной), то поверхность M называется *вырожденной (или невырожденной) по Леви* в обсуждаемой точке ([18, с. 177]).

В статье нас интересует вырожденность по Леви орбит 7-мерных нильпотентных алгебр Ли голоморфных векторных полей в пространстве $\mathbb{C}^4$. Напомним, что голоморфное (вблизи точки Q) векторное поле в $\mathbb{C}^4$ описывается формулой вида

$$E = a(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + b(z)\frac{\partial}{\partial z_2} + c(z)\frac{\partial}{\partial z_3} + d(z)\frac{\partial}{\partial z_4},$$

где $z=(z_1,z_2,z_3,z_4)$ — вектор координат в пространстве $\mathbb{C}^4$; $a(z),b(z),c(z),d(z)$ — голоморфные (вблизи точки Q) функции.

Мы будем использовать для векторных полей краткую координатную запись

$$E=(a(z),b(z),c(z),d(z))$$

предыдущей формулы. Сформулируем в таких обозначениях несколько достаточных условий вырожденности вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$, необходимых нам в дальнейшем.

Условие 1. Если на вещественной гиперповерхности M в $\mathbb{C}^4$ имеется пара касательных к ней векторных полей вида $e_1=(1,0,0,0)$, $e_2=(i,0,0,0)$, то эта гиперповерхность вырождена по Леви.

В самом деле, факт касания полями $e_1=\partial/\partial z_1$, $e_2=i\partial/\partial z_1$ гиперповерхности $M=\{\Phi(z,\bar z)=0\}$ означает, что для функции $\Phi(z,\bar z)$ выполняются тождества

$$\mathrm{Re}(e_1(\Phi))_{|M}=\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}\right)_{|M}\equiv 0,\quad \mathrm{Re}(e_2(\Phi))_{|M}=\mathrm{Re}\left(i\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}\right)_{|M}\equiv 0.$$

Вследствие этого функция $\Phi(z,\bar z)$ не зависит от переменной z_1. А определитель матрицы (3) для такой поверхности обращается в нуль в точках поверхности.

Условие 2. Гиперповерхность $M\subset\mathbb{C}^4$, касающаяся двух (ненулевых) полей вида $e_1=(A,B,C,D)$, $e_2=i(A,B,C,D)$, где A,B,C,D – вещественные константы, также вырождена по Леви. Эта ситуация сводится к примеру 1 за счет линейного преобразования с вещественными коэффициентами, переводящего поле (A,B,C,D) в $(1,0,0,0)$.

Условие 3. Пусть на вещественной гиперповерхности M пространства $\mathbb{C}^4$ имеется шесть $\mathbb{R}$-линейно независимых векторных полей $(a_k(z),b_k(z),c_k(z),d_k(z))$, $k=1,..,6$, касательных к M. Если все $a_k(z)\equiv 0$ вблизи точки $Q\in M$, то поверхность M является вырожденной по Леви (вблизи обсуждаемой точки).

В этом случае для каждого из шести рассматриваемых полей имеем равенство

$$\mathrm{Re}\left(b_k(z)\frac{\partial\Phi}{\partial z_2}+c_k(z)\frac{\partial\Phi}{\partial z_3}+d_k(z)\frac{\partial\Phi}{\partial z_4}\right)_{|M}=0.$$

В вещественных переменных $x_k=\mathrm{Re}\,z_k, y_k=\mathrm{Im}\,z_k$ шесть таких равенств означают систему шести линейных уравнений относительно частных производных $\partial\Phi/\partial x_k = =\mathrm{Re}(\partial\Phi/\partial z_k), \partial\Phi/\partial y_k=-\mathrm{Im}(\partial\Phi/\partial z_k), k=2,3,4$.

В силу линейной независимости полей определитель этой системы отличен от нуля. Это означает, что определяющая функция Φ поверхности M не зависит от трех комплексных переменных, и вся поверхность M вырождена по Леви.

Замечание 1. Аналогично является вырожденной вещественная гиперповерхность $M\subset\mathbb{C}^4$, на которой имеется четыре $\mathbb{R}$-линейно независимых касательных к ней векторных поля вида $(a_k(z),b_k(z),0,0)$, $k=1,..,4$ или два $\mathbb{R}$-линейно независимых поля вида $(a_k(z),0,0,0)$, $k=1,2$.

Замечание 2. Рассмотренное выше условие 1 является частным случаем последнего утверждения. При этом равенство единице (или ненулевой константе) компоненты поля e_1 из этого условия (как и постоянство всех четырех компонент поля e_1

в условии 2), разумеется, не обязательно. В последующих рассуждениях часто возникает именно ситуация постоянства таких компонент, но утверждения из условия 3 и замечания 1 справедливы и без этого ограничения.

Основным приемом нашей работы является использование техники [19] совместного упрощения нескольких голоморфных векторных полей. Следующее утверждение повторяет аналогичный результат [19], перенесенный из $\mathbb{C}^3$ в $\mathbb{C}^4$.

Лемма 1. *Пусть в пространстве $\mathbb{C}^4$ задана четверка векторных полей вида*

$$e_1 = (a_1(z_1), b_1(z_1), c_1(z_1), d_1(z_1)),\ e_2 = (0,1,0,0),\ e_3 = (0,0,1,0),\ e_4 = (0,0,0,1)$$

и в обсуждаемой точке $Q \in \mathbb{C}^4$ функция $a_1(z_1) \neq 0$. Тогда (вблизи точки Q) существует голоморфная замена координат, выпрямляющая поле e_1 до состояния $(1,0,0,0)$ и сохраняющая выпрямленный вид полей e_2, e_3, e_4.

Доказательство. Пользуясь голоморфной заменой переменной z_1, можно выпрямить вспомогательное (неособое) поле $a_1(z_1)\partial/\partial z_1$ на комплексной прямой до состояния $\partial/\partial z_1$. После такой замены компонента $a_1(z_1)$ исходного поля e_1 будет тождественно равна единице, а остальные его компоненты останутся голоморфными (вообще говоря, другими) функциями переменной z_1.

Далее рассмотрим еще одну замену переменных в пространстве $\mathbb{C}^4$ вида

$$z_1^* = z_1,\ z_k^* = z_k + \varphi_k(z_1),\ k = 2,3,4 \tag{4}$$

с некоторыми голоморфными функциями $\varphi_k(z_1)$. Накладывая на эти функции ограничения

$$\varphi_2'(z_1) = \, - b_1(z_1), \quad \varphi_3'(z_1) = \, - c_1(z_1), \quad \varphi_4'(z_1) = \, - d_1(z_1), \tag{5}$$

несложно получить преобразование поля $e_1 = \partial/\partial z_1 + b_1\partial/\partial z_2 + c_1\partial/\partial z_3 + d_1\partial/\partial z_4$ после такой замены. Имеем

$$e_1 = \left(\frac{\partial}{\partial z_1^*} + \varphi_2'\frac{\partial}{\partial z_2^*} + \varphi_3'\frac{\partial}{\partial z_3^*} + \varphi_4'\frac{\partial}{\partial z_4^*}\right) + \left(b_1\frac{\partial}{\partial z_2^*} + c_1\frac{\partial}{\partial z_3^*} + d_1\frac{\partial}{\partial z_4^*}\right) = \frac{\partial}{\partial z_1^*}.$$

Поля e_2, e_3, e_4 при двух описанных заменах переменных не изменяются. □

Замечание. Нам потребуется также усиленный вариант леммы 1, в котором компоненты поля e_1 содержат слагаемые, линейные относительно других переменных (см. для сравнения [20]). Например, при произвольной константе A поле

$$e_1 = (1, b_1(z_1), c_1(z_1), Az_2 + d_1(z_1))$$

можно привести к виду $e_1 = (1,0,0,Az_2)$ (с сохранением тройки выпрямленных полей e_2, e_3, e_4) заменой переменных, аналогичной (4). Функции $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ определяются теперь из системы ОДУ (5) с заменой ее последнего уравнения на

$$\varphi_4'(z_1^*) = \, - d_1(z_1^*) + A\varphi_2(z_1^*).$$

Мы существенно опираемся ниже еще на одно утверждение, также полученное за счет техники [19] и связанное с 4-мерными абелевыми подалгебрами 7-мерных алгебр векторных полей в $\mathbb{C}^4$, имеющих полный ранг.

Лемма 2. *Пусть вещественная гиперповерхность $M \subset \mathbb{C}^4$ не вырождена по Леви вблизи некоторой своей точки Q и является орбитой 7-мерной алгебры Ли $\mathfrak{g}_7$ голоморфных векторных полей в этом пространстве. Пусть еще I_4 — 4-мерная абелева подалгебра в $\mathfrak{g}_7$ с фиксированным базисом e_4, e_5, e_6, e_7. Голоморфной заменой координат пространства $\mathbb{C}^4$ (определенной вблизи точки Q) этот базис можно привести к одному из трех видов*

$$1)\ \begin{array}{llll} (1, & 0, & 0, & 0), \\ (0, & 1, & 0, & 0), \\ (0, & 0, & 1, & 0), \\ (0, & 0, & 0, & 1), \end{array} \quad 2)\ \begin{array}{llll} (0, & b_4(z_1), & c_4(z_1), & d_4(z_1)), \\ (0, & 1, & 0, & 0), \\ (0, & 0, & 1, & 0), \\ (0, & 0, & 0, & 1), \end{array} \quad 3)\ \begin{array}{llll} (0, & 1, & 0, & 0), \\ (0, & 0, & c_5(z_1), & d_5(z_1)), \\ (0, & 0, & 1, & 0), \\ (0, & 0, & 0, & 1). \end{array}$$

Упрощение (с использованием этой леммы) четверки независимых полей из 5-мерного абелева идеала 7-мерной алгебры (на невырожденной гиперповерхности) позволяет упростить и остальные базисные поля этой алгебры. Для получения в явной форме орбит такой алгебры достаточно решить систему уравнений

$$Re\left(e_k(\Phi)_{|M}\right) = 0, \ (k = 1, ..., 7),$$

означающих касание орбиты $M = \{\Phi = 0\}$ базисными полями алгебры.

Упрощенный вид базисных полей позволяет относительно легко проинтегрировать получаемую систему семи уравнений в частных производных. При этом необходимость рассмотрения трех случаев леммы 1 для каждой из обсуждаемых алгебр (напомним, что их количество равно 51) усложняет задачу описания всех таких орбит. Наличие у изучаемых алгебр 5-мерного абелева идеала позволяет снять часть таких сложностей.

Утверждение 1. *Пусть Леви-невырожденная гиперповерхность $M \subset \mathbb{C}^4$ является орбитой 7-мерной алгебры $\mathfrak{g}_7$ голоморфных векторных полей. Пусть в $\mathfrak{g}_7$ имеется 5-мерная абелева подалгебра I_5, а элемент e_1 из дополнения $\mathfrak{g}_7 \setminus I_5$ коммутирует с 3-мерной алгеброй $h_3 = \, < e_5, e_6, e_7 > \subset I_5$. Тогда найдется базис алгебры $\mathfrak{g}_7$, содержащий перечисленные поля e_1, e_5, e_6, e_7 и имеющий (после некоторой локальной замены координат) вид*

$$\begin{array}{rllll} e_1 = (1, & 0, & 0, & 0) \\ e_2 = (a_2(z), & b_2(z), & c_2(z), & d_2(z)) \\ e_3 = (0, & b_3(z_1), & c_3(z_1), & d_3(z_1)), \\ e_4 = (0, & b_4(z_1), & c_4(z_1), & d_4(z_1)), \\ e_5 = (0, & 1, & 0, & 0), \\ e_6 = (0, & 0, & 1, & 0), \\ e_7 = (0, & 0, & 0, & 1), \end{array} \tag{6}$$

где $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ — вектор координат в $\mathbb{C}^4$, $a_2(z) \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное поле e_4 из дополнения $I_5 \setminus h_3$ и обсудим четверку полей $\{e_4, e_5, e_6, e_7\}$, образующую базис 4-мерной абелевой подалгебры в алгебре $\mathfrak{g}_7$.

Во-первых, заметим, что при наличии на невырожденной гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$ алгебры g_7 с 5-мерной абелевой подалгеброй I_5 первый из трех случаев леммы 1 невозможен ни для какой четверки независимых полей из I_5. В самом деле, рассмотрим любой базис e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 5-мерной абелевой алгебры I_5, считая четверку полей из этого базиса выпрямленной и имеющей (в некоторых координатах) вид

$$e_4 = (1,0,0,0),\ e_5 = (0,1,0,0),\ e_6 = (0,0,1,0),\ e_7 = (0,0,0,1).$$

Пятое базисное поле e_3 алгебры I_5, коммутирующее со всей этой четверкой, обязано иметь постоянными все свои четыре компоненты, т.к. каждое поле первой четверки означает дифференцирование по одной из комплексных переменных пространства $\mathbb{C}^4$. Рассматривая вместо e_3 его линейную комбинацию с полями первой четверки, можно считать, что оно имеет вид

$$e_3 = (iA_3, iB_3, iC_3, iD_3)$$

где все A_3, B_3, C_3, D_3 — вещественные константы.

Но и векторное поле $e_3^* = -ie_3 = (A_3, B_3, C_3, D_3)$ — также касательное к M (как линейная комбинация полей первой базисной четверки). В силу рассмотренного выше условия 2 это невозможно для невырожденной по Леви поверхности M. Покажем теперь, что в условиях предложения 1 невозможен и третий случай леммы 1 с выпрямлением e_4, e_6, e_7 и упрощением поля e_5 до состояния

$$e_5 = (0, 0, c_5(z_1), d_5(z_1)).$$

Допуская возможность этого случая, выберем в подалгебре I_5 еще одно поле e_3, дополняя четверку (e_4, e_5, e_6, e_7) до базиса I_5. Поле $e_3 = (a_3(z), b_3(z), c_3(z), d_3(z))$ коммутирует с уже выпрямленной тройкой полей. Поэтому его компоненты могут зависеть только от переменной z_1. При этом первая компонента $a_3(z_1)$ обязана быть тождественно нулевой, т.к. в противном случае, пользуясь леммой 1, поле e_3 можно было бы выпрямить с сохранением выпрямленного вида полей e_4, e_6, e_7 (а это невозможно по замечанию о первом случае леммы 2).

Тогда у всей пятерки e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 базисных полей I_5 первые компоненты являются нулевыми. Воспользуемся теперь существованием поля

$$e_1 = (a_1(z), b_1(z), c_1(z), d_1(z)) \in \mathrm{g}_7 \setminus I_5,$$

коммутирующего с полями $e_5, e_6 = \partial/\partial z_3, e_7 = \partial/\partial z_4$. В силу действия условий $[e_1, e_6] = [e_1, e_7] = 0$ его компоненты не зависят от переменных z_3, z_4. Тогда

$$0 = [e_1, e_5] = a_1(z_1, z_2) \cdot (0, 0, c_5'(z_1), d_5'(z_1)).$$

Здесь либо $a_1(z_1, z_2) \equiv 0$, либо оба коэффициента $c_5(z_1), d_5(z_1)$ в действительности не зависят и от переменной z_1, т.е. являются константами.

Но для Леви-невырожденной поверхности M коэффициент $a_1(z)$ не может равняться нулю в силу упомянутого выше третьего достаточного условия вырожденности. А в линейной оболочке независимой (над $\mathbb{R}$) тройки векторных полей

$$e_5 = (0, 0, C_5, D_5),\ e_6 = (0, 0, 1, 0),\ e_7 = (0, 0, 0, 1)$$

с постоянными компонентами всегда можно найти два нетривиальных поля вида Z, iZ. Здесь мы снова получаем условие вырожденности M.

Полученные противоречия доказывают невозможность упрощения четверки полей (e_4, e_5, e_6, e_7) по схеме третьего случая леммы 1. Следовательно, для такой четверки остается возможным только ее упрощение по схеме второго случая.

Зафиксируем в этом случае произвольный базис подалгебры h_3. Дополним его произвольной парой полей e_3, e_4 до базиса абелева идеала I_5. Голоморфная замена координат, выпрямляющая базис h_3 и поле e_1, упрощает пару e_3, e_4 до вида, требуемого в предложении 1. Еще одно поле e_2 (с $a_2(z) \neq 0$), дополняющее выбранные поля до базиса алгебры $\mathfrak{g}_7$, можно выбрать произвольно. □

Связанное с видом базиса (6) изучение 39 алгебр Ли, удовлетворяющих условиям утверждения 1, мы проводим в разделах 2 и 3 статьи. В разделе 2 будут рассмотрены 23 алгебры Ли, большинство из которых имеет двумерный центр (первое семейство). Второй блок, содержащий 16 алгебр (в основном с одномерным центром), мы разделяем еще на две части. Рассмотрение 9 алгебр (второе семейство) достаточно легко приводит к противоречиям с видом (6). Еще для 7 алгебр (третье семейство) уточняется вид (6) их базисов, полученный в предположении существования невырожденных орбит, и выписываются уравнения орбит, которые оказываются вырожденными.

В завершающих разделах статьи мы рассматриваем 12 алгебр Ли (четвертое семейство), у которых в идеале I_5 имеется лишь 2-мерная подалгебра, коммутирующая с некоторым элементом из дополнения к этому идеалу.

2. Канонические базисы для 23 алгебр Ли

Абелев идеал I_5 у каждой из рассматриваемых в этом разделе 23 алгебр содержит подалгебру h_3, с которой коммутирует некоторый элемент из дополнения к I_5. Такую ситуацию будем кратко фиксировать в виде $h_3 \subset I_5 \subset \mathfrak{g}_7$.

Уточним, что размерность центра у любой из этих алгебр равна либо 2, либо 3.

Все эти алгебры будут ниже описаны таблицей коммутационных соотношений. Для базисных элементов абстрактных алгебр Ли, описываемых в статье четырьмя такими таблицами, мы используем обозначение E_k $(k=1,...,7)$. В целом же, говоря далее об алгебрах Ли, мы по умолчанию подразумеваем алгебры голоморфных векторных полей. Их базисные поля будут обозначаться через e_k $(k=1,...,7)$. Иногда при заменах базисов будут использоваться смешанные обозначения: для начального базиса используем e_k, а для преобразованного – E_k.

Отметим, что нумерация базисных векторов изучаемых алгебр, использованная Гонгом (связанная с общей классификацией всех 7-мерных алгебр) не всегда удобна при изучении их голоморфных реализаций. Мы изменяем нумерацию базисных элементов так, что:

- абелевым идеалом I_5 любой алгебры $\mathfrak{g}$ является оболочка последних пяти базисных элементов $<e_3, e_4, e_5, e_6, e_7>$ алгебры;

- базисом 2-мерного центра Z алгебры $\mathfrak{g}$ у нас всегда будет пара e_6, e_7 (а в случае 3-мерного центра в него включается также элемент e_5);

- первый номер в новой нумерации получает элемент дополнения к идеалу I_5, коммутирующий с тремя элементами e_5, e_6, e_7 идеала.

Замечание 1. Введенные договоренности допускают перестановки элементов e_3, e_4 идеала, а также элементов центра алгебры. Отметим еще, что для получения единообразной таблицы оказалось удобным умножить некоторые базисные элементы на (-1). Например, для алгебры 27B, описываемой соотношениями

$$[e_1, e_2] = e_6,\ [e_1, e_5] = e_7,\ [e_2, e_3] = e_7,\ [e_3, e_4] = e_6,$$

в связи с договоренностями введем новый базис, обозначая $E_1 = e_3$, $E_2 = e_1$, $E_3 = e_2$, $E_6 = e_7$, $E_7 = e_6$ и оставляя неизменными два оставшихся элемента e_4, e_5.

Таблица 1. 23 алгебры Ли со структурой $h_3 \subset I_5 \subset g_7$

		$[E_1,E_2]$	$[E_1,E_3]$	$[E_1,E_4]$	$[E_2,E_3]$	$[E_2,E_4]$	$[E_2,E_5]$
1	$37D$		$-E_7$	$-E_5$	E_5	E_6	
2	$357C$	$-E_3$	E_6	E_5	E_5	E_7	
3	$27B$		$-E_6$	E_7	E_7		E_6
4	$257D$	$-E_5$	E_6	E_7	E_7		E_6
5	$257E$		$-E_7$	E_6	E_5		E_6
6	$257G$		$-E_7$	E_6	E_5	E_7	E_6
7	$257H$		$-E_6$	E_7	E_5		E_6
8	$257J$	$-E_3$	E_6	E_7	E_7		E_6
9	$247I$		$-E_5$	E_6	$-E_4$	E_7	E_6
10	$247M$	$-E_4$	$-E_6$	E_7	E_5		E_6
11	$247N$	$-E_4$	E_7	E_6	E_5		E_6
12	$247O$	$-E_4$	$-E_7$	E_6	E_5	E_7	E_6
13	$247P$	$-E_7$	$-E_5$	E_6	$-E_4$		E_6
14	$2457D$	$-E_3$	E_6	E_6	E_5	E_7	E_6
15	$2457E$	$-E_3$	E_7	E_7	E_5		E_6
16	$2457H$	$-E_3$	E_7	E_6	E_5		E_6
17	$2457I$	$-E_3$	E_6	E_7	E_5		E_6
18	$2457J$	$-E_3$	$E_6 + E_7$	E_7	E_5		E_6
19	$2457K$	$-E_3$	E_7	E_6	E_5	E_7	E_6
20	$2457M$	$-E_3$	E_5	E_6	E_4	E_7	E_6
21	$2357A$		$-E_5 - E_7$	$-E_6$	E_4	E_5	E_6
22	$2357B$	$-E_7$	$-E_5$	$-E_6$	E_4	E_5	E_6
23	$23457E$	$-E_3$	$E_5 + E_7$	E_6	E_4	E_5	E_6

Замечание 2. Приведенная таблица содержит лишь 6 ненулевых столбцов вместо 21 коммутационного соотношения при традиционном описании 7-мерных алгебр. Дело в том, что не менее 15 таких соотношений оказываются тривиальными в силу наличия 2-мерного центра и общей схемы $h_3 \subset I_5 \subset g_7$, имеющих место для каждой обсуждаемой алгебры.

Утверждение 2. *Ни одна из 23 алгебр таблицы 1 не имеет невырожденных по Леви орбит в пространстве* $\mathbb{C}^4$.

Доказательство. Базисы голоморфных реализаций любой из 23 обсуждаемых алгебр таблицы 1 сохраняют коммутационные соотношения, зафиксированные в таблице (с заменой базисного элемента E_k абстрактной алгебры на векторное поле e_k). Поэтому для реализации каждой такой алгебры имеем схему $h_3 \subset I_5 \subset g_7$ и поле $e_1 \in g_7 \setminus I_5$, коммутирующее с алгеброй h_3.

Допуская, что обсуждаемая алгебра имеет невырожденную орбиту, и пользуясь предложением 1, считаем базис алгебры приведенным к виду (6).

Отметим, прежде всего, что две алгебры 37D и 357C из таблицы 1 имеют 3-мерный центр $< E_5, E_6, E_7 >$ (первый символ кода любой алгебры из [8] – это размерность центра). Это означает, что поле e_2 коммутирует с тройкой выпрямленных полей e_5, e_6, e_7, а компоненты e_2 могут зависеть только от переменной z_1.

Для каждой из двух этих алгебр рассмотрим коммутаторы $[e_1, e_4]$ и $[e_2, e_4]$ и получим из соотношения $[e_1, e_4] = (0, b_4', c_4', d_4') = \pm e_5 = \pm (0, 1, 0, 0)$ два равенства

$$c_4'(z_1) = 0, \quad d_4'(z_1) = 0.$$

С учетом этого две последние компоненты коммутатора $[e_2, e_4] = a_2(z_1)(0, b_4', c_4', d_4')$ должны быть нулевыми, что невозможно совместить ни с условием $[e_2, e_4] = e_6$ (случай алгебры 37D), ни с условием $[e_2, e_4] = e_7$ (алгебра 357C).

Обсудим теперь оставшиеся алгебры таблицы 1 (в количестве 21) и отметим одинаковое для всех этих алгебр последнее соотношение $[e_2, e_5] = e_6$. Тогда в дополнение к виду (6) базисных полей имеем еще информацию о поле

$$e_2 = (a_2(z_1), b_2(z_1), -z_2 + c_2(z_1), d_2(z_1)), \ a_2(z_1) \neq 0. \tag{7}$$

Теперь, рассматривая пару коммутаторов

$$[e_1, e_4] = \pm e_k \ (k = 6, 7) \qquad \text{и} \qquad [e_2, e_4] = \varepsilon e_j \ (j = 5, 7, \ \varepsilon = 0, 1),$$

можно сразу признать большое количество случаев, возникающих для рассматриваемых алгебр, противоречивыми. В самом деле, в силу формул (6) и (7) имеем

$$[e_1, e_4] = (0, b_4', c_4', d_4'), \quad [e_2, e_4] = a_2(0, b_4', c_4', d_4') - b_4(0, 0, -1, 0).$$

Тогда, например, противоречивыми оказываются условия

$$[e_1, e_4] = \pm e_7, \ [e_2, e_4] = 0, \tag{8}$$

первое из которых означает, что $d_4' = \pm 1$, а из второго следует, что $d_4' = 0$. Отметим, что паре условий (8) удовлетворяют 8 алгебр из таблицы 1:

$$27B, \ 257D, \ 257H, \ 257J, \ 247M, \ 2457E, \ 2457I, \ 2457J.$$

Еще одна противоречивая пара условий

$$[e_1, e_4] = e_6, \quad [e_2, e_4] = e_7, \tag{9}$$

охватывает в приведенной таблице все 6 алгебр $257G, 247I, 247O$, $2457D$, $2457K$, $2457M$, для которых выполняется второе из равенств (9). Аналогично для всех трех алгебр из таблицы $2357A, 2357B, 23457E$, удовлетворяющих равенству $[e_2, e_4] = e_5$, — это равенство должно дополняться противоречивым требованием $[e_1, e_4] = \pm e_6$.

После приведенных обсуждений остаются нерассмотренными 4 алгебры из таблицы 1:

$$257E,\ 247N,\ 247P,\ 2457H.$$

Заметим, что для трех из них ($257E, 247N, 2457H$) вывод о невозможности голоморфных реализаций в виде алгебр голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$ следует из рассмотрения пары коммутационных соотношений

$$[e_1, e_3] = \pm e_7, \quad [e_2, e_3] = e_5.$$

Эта пара условий для полей вида (6), (7) оказывается противоречивой аналогично условиям (8) или (9) для уже рассмотренных алгебр.

Наконец, для последней алгебры 247 P имеем в соответствии с таблицей

$$[e_1, e_4] = e_6, \quad [e_2, e_4] = 0, \quad [e_1, e_3] = -e_5, \quad [e_2, e_3] = -e_4. \tag{10}$$

Первое из этих равенств приводит к ограничениям $b_4'(z_1) = 0$, $c_4'(z_1) = 1$ (а также $d_4'(z_1) = 0$). Учитывая их и второе равенство (10)

$$a_2(z_1) \cdot (0, b_4', c_4', d_4') - b_4 \cdot (0, 0, -1, 0) = 0,$$

получаем

$$b_4(z_1) = B_4 = \text{const},\ a_2(z_1) + B_4 = 0,\ \text{т.е. } a_2(z_1) = -B_4. \tag{11}$$

В третьем равенстве из (10) $[e_1, e_3] = (0, b_3', c_3', d_3') = -(0,1,0,0)$ интерес для нас представляет вторая компонента, из которой следует, что $b_3' = -1$. Тогда вторая компонента четвертого равенства (10)

$$[e_2, e_3] = a_2(0, b_3', c_3', d_3') - b_3(0, 0, -1, 0) = -e_4$$

превращается в $-a_2 = -B_4$.

Сравнивая это с последним выводом из (11), получаем равенство $a_2(z_1) \equiv 0$. Но тогда первые компоненты шести базисных полей (6) обсуждаемой алгебры равны нулю. Это невозможно для 7-мерной вещественной алгебры векторных полей с невырожденной по Леви орбитой в $\mathbb{C}^4$.

Таким образом, ни одна из 23 алгебр Ли таблицы 1 НЕ допускает реализаций в $\mathbb{C}^4$ с невырожденными по Леви орбитами. Утверждение 2 полностью доказано. $\square$

3. Второе семейство: 9 алгебр из 39

Оставшиеся 16 алгебр со структурой $h_3 \subset I_5 \subset g_7$ разобьем еще на две группы:

$$1357I,\ 13457B,\ 13457F,\ 12457A,\ 12457B,\ 123457D,\ 123457E,\ 37B_1,\ 257J_1, \tag{12}$$

и

$$137A,\ 137C,\ 1357G,\ 1357O,\ 1357Q,\ 247P_1, 1357Q_1. \tag{13}$$

С этими двумя группами алгебр связаны различные методы доказательства отсутствия у них невырожденных орбит. В первой группе из девяти алгебр мы, как и в предыдущем разделе, произведем перестановки базисных векторов для приведения коммутационных соотношений в них к удобному «каноническому» виду. Получаемые при этом таблицы позволяют общим рассуждением доказать желаемый факт (отсутствия невырожденных орбит) у всех этих девяти алгебр.

Во второй части этого раздела статьи мы опишем голоморфные реализации последних семи алгебр из обсуждаемых 16. Эти реализации не имеют очевидных признаков вырожденности орбит, которыми обладали предыдущие 9 алгебр. Но непосредственное интегрирование приводит и для них к выводу о вырожденности по Леви всех их 7-мерных орбит в пространстве $\mathbb{C}^4$.

Утверждение 3. *Перенумерация базисных элементов приводит коммутационные соотношения [8] для алгебр* (12) *к виду, зафиксированному в таблице 2.*

Таблица 2. Девять алгебр Ли со структурой $h_3 \subset I_5 \subset g_7$

		$[E_1;E_2]$	$[E_1;E_3]$	$[E_1;E_4]$	$[E_2;E_3]$	$[E_2;E_4]$	$[E_2;E_5]$	$[E_2;E_6]$
1	$1357I$		$-E_4$	E_7	$-E_5$		E_6	E_7
2	$13457B$	$-E_3$	E_7	E_7	E_5		E_6	E_7
3	$13457F$	$-E_3$	E_4	E_7	E_5		E_6	E_7
4	$12457A$		$-E_6$	$-E_7$	E_4	E_5	E_6	E_7
5	$12457B$		$-E_6-E_7$	$-E_7$	E_4	E_5	E_6	E_7
6	$123457D$	$-E_3$	E_6	E_7	E_4	E_5	E_6	E_7
7	$123457E$	$-E_3$	E_6+E_7	E_7	E_4	E_5	E_6	E_7
8	$37B_1$	$-E_7$	$-E_6$	E_5	E_5	E_6		
9	$257J_1$	$-E_3$	E_7	E_6	E_6	E_7	E_6	

Доказательство. Справедливость этого утверждения, как и получение таблицы 1 в предыдущем разделе, устанавливается подстановками, опирающимися на описанные выше принципы перенумерации базисных элементов обсуждаемых алгебр:

- в новой нумерации пять последних базисных элементов любой из семи обсуждаемых 7-мерных алгебр Ли образуют базис абелева идеала I_5;

- одномерный центр 7 первых алгебр из таблицы 2 порождается последним базисным элементом e_7;

- первый элемент e_1 нового базиса (как и раньше) коммутирует с линейной оболочкой h_3 трех последних элементов нового базиса.

Отметим как иллюстрацию, что для двух алгебр $123457D$ и $123457E$, заданных в [8] нетривиальными коммутационными соотношениями

$$[e_1,e_k]=e_{k+1},\ 2\leqslant k\leqslant 6;\quad [e_2,e_4]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_6+\varepsilon e_7,\ \varepsilon\in\{0,1\},$$

требуется единственная перестановка базисных элементов $e_1=E_2, e_2=E_1$, т.к. с 3-мерной подалгеброй $h_3=\ <e_5,e_6,e_7>$ абелева идеала $I_5=\ <e_3,e_4,e_5,e_6,e_7>$ коммутирует поле e_2. □

Замечание. В случае одномерного центра сохранить обозначенные свойства нового базиса можно при перестановке элементов e_5, e_6 подалгебры h_3, а также элементов e_3, e_4 идеала, не входящих в эту подалгебру.

С учетом этого замечания для каждой из семи алгебр был выбран базис, сохраняющий единообразие последних столбцов выписанной таблицы.

Утверждение 4. *Ни одна из 9 алгебр таблицы 2 не имеет 7-мерных невырожденных орбит в пространстве* $\mathbb{C}^4$.

Доказательство. Допуская, как и ранее, что любая из обсуждаемых алгебр имеет невырожденную орбиту, считаем, что базисы этих алгебр имеют вид (6).

Сначала мы рассмотрим любую из четырех алгебр $12457A$, $12457B$, $123457D$, $123457E$ набора (12). В силу структуры таблицы 2 коммутаторы поля e_2 с полями e_4, e_5, e_6, e_7 для всех этих алгебр устроены одинаково. При этом последние три поля из этого набора представляют собой дифференцирования по переменным z_2, z_3, z_4 соответственно. Поэтому из трех соотношений

$$[e_2, e_5] = e_6, \quad [e_2, e_6] = e_7, \quad [e_2, e_7] = 0$$

получаем независимость двух первых компонент поля e_2 от этих переменных:

$$e_2 = (a_2(z_1), b_2(z_1), c_2(z), d_2(z)), \quad z = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

С учетом этого вторая компонента соотношения $[e_2, e_4] = e_5$ имеет вид

$$a_2(z_1) b_4'(z_1) - \left(b_4 \frac{\partial b_2}{\partial z_2} + c_4 \frac{\partial b_2}{\partial z_3} + d_4 \frac{\partial b_2}{\partial z_4} \right) = 1,$$

или $a_2(z_1) \cdot b_4'(z_1) = 1$. С другой стороны, в соотношении $[e_1, e_4] = \pm e_7$, выполняющемся для всех четырех обсуждаемых алгебр, вторая компонента имеет вид $b_4'(z_1) = 0$. Полученное противоречие является следствием предположения о наличии невырожденных орбит у четырех рассмотренных алгебр.

Теперь, при аналогичном предположении, а значит, при условии сводимости базиса к виду (6), обсудим две алгебры: $13457B$ и $13457F$.

Для алгебры $13457B$ невозможность совмещения соответствующей строки из таблицы 2 с невырожденностью орбит (а значит, с видом (6) для элементов ее базиса) вытекает из двух коммутационных соотношений

$$[e_1, e_3] = e_7, \quad [e_1, e_4] = e_7.$$

Выполнение этих равенств для полей вида (6) означает, что

$$e_3 = (0, B_3, C_3, z_1 + D_3), \quad e_4 = (0, B_4, C_4, z_1 + D_4)$$

с некоторыми комплексными константами A_k, B_k, C_k $(k = 1, 2, 3)$. Но тогда все компоненты разности $(e_3 - e_4)$ являются константами, причем первая из них нулевая. Это дает возможность (как и в предыдущем разделе) найти в алгебре голоморфных векторных полей со структурой $13457B$ пару полей вида Z, iZ, что противоречит допущению о невырожденности орбит такой алгебры.

Обсуждение алгебры $13457F$ будет более развернутым. Здесь по-прежнему $[e_1, e_4] = e_7$, но $[e_1, e_3] = e_4$. Тогда имеем $e_4 = (0, B_4, C_4, z_1 + D_4)$, а для компоненты $b_3(z_1)$ поля e_3 получим отсюда формулу $b_3(z_1) = B_4 z_1 + B_3$ с некоторыми константами B_k, C_k, D_k.

Теперь рассмотрим четыре коммутатора

$$[e_2, e_5] = e_6, \quad [e_2, e_6] = e_7, \quad [e_2, e_7] = 0, \quad [e_2, e_4] = 0.$$

Из этих соотношений получаем упрощенный вид поля

$$e_2 = (a_2(z_1), b_2(z_1), -z_2 + c_2(z_1), -z_3 + d_2(z_1)).$$

Далее с учетом этого рассмотрим еще два коммутационных соотношения

$$[e_2, e_4] = a_2(0,0,0,1) - (B_4(0,0,-1,0) + C_4(0,0,0,-1)) = (0,0,0,0)$$

и

$$[e_2, e_3] = a_2(0, b_3', c_3', d_3') - (B_3(0,0,-1,0) + C_3(0,0,0,-1)) = e_5 = (0,1,0,0).$$

Из отдельных компонент этих соотношений следуют (с учетом полученной выше формулы $b_3(z_1) = B_4 z_1 + B_3$) два противоречивых равенства $B_4 = 0$ и $a_2 \cdot B_4 = 1$. Значит, и алгебра $13457F$ не имеет невырожденных по Леви орбит в $\mathbb{C}^4$.

Рассматривая алгебру $1357I$, заметим, что после замены e_3 на $-e_3$ пять ее нетривиальных соотношений совпадают с соответствующими соотношениями только что рассмотренной алгебры $13457F$. А шестое (последнее) нетривиальное соотношение, имеющееся в алгебре $13457F$, в предыдущем доказательстве не использовалось. Следовательно, у алгебры $1357I$ также нет невырожденных орбит в $\mathbb{C}^4$.

В алгебре $37B_1$ три коммутатора e_2 с полями e_5, e_6, e_7 равны нулю. Это означает, что все компоненты поля e_2 могут зависеть только от переменной z_1. А соотношение $[e_1, e_2] = -e_7$ упрощает эти зависимости до вида

$$e_2 = (A_2, B_2, C_2, -z_1 + D_2)$$

с некоторыми комплексными константами A_2, B_2, C_2, D_2.

Аналогично, учитывая соотношение $[e_1, e_3] = -e_6$, упрощаем поле e_3 из базиса (6) до состояния

$$e_3 = (0, B_3, -z_1 + C_3, D_3).$$

Остается заметить, что для таких полей их коммутатор $[e_2, e_3] = A_2(0,0,-1,0)$ не совпадает с e_5, как это должно быть в соответствии с таблицей 2.

Наконец соотношения таблицы 2 для алгебры $257J_1$ также не совместимы с видом (6) базиса этой алгебры при ее реализации векторными полями в $\mathbb{C}^4$. Так, поле e_3 упрощается при использовании соотношения $[e_2, e_3] = e_7$ до вида $e_3 = (0, B_3, C_3, z_1 + D_3)$. Из соотношений $[e_2, e_5] = e_6$, $[e_2, e_6] = [e_2, e_7] = 0$ в этом случае получаем следующее представление поля $e_2 = (a_2(z_1), b_2(z_1), -z_2 + c_2(z_1), d_2(z_1))$.

Тогда соотношение $[e_2, e_3] = e_6$ можно переписать в форме

$$a_2(z_1)(0,0,0,1) - B_3(0,0,-1,0) = (0,0,1,0),$$

из чего следует, что функция $a_2(z_1) \equiv 0$. Но тогда у шести базисных полей обсуждаемой алгебры первые компоненты — нулевые. Это противоречит невырожденности орбиты такой алгебры. □

4. Третье семейство: 7 алгебр из 39

Для семи оставшихся алгебр из набора (13) не обнаружилось «очевидных» противоречий между видом (6) базиса и таблицей коммутационных соотношений для каждой из этих алгебр. Сами эти соотношения приведены ниже практически в форме, скопированной из [8]. Единственное отличие состоит в том, что алгебры $1357Q$ и $1357Q_1$ описаны ниже в одной строке. Первой из этих алгебр в коммутаторе $[e_2,e_6]= = \pm e_7$ отвечает знак «+», а второй – «-».

$$137A: \ [e_1,e_2]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_3,e_4]=e_6,\ [e_3,e_6]=e_7;$$
$$137C: \ [e_1,e_2]=e_5,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_6,\ [e_3,e_5]= -e_7;$$
$$1357G: \ [e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_4]=e_6,\ [e_1,e_6]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_5,\ [e_2,e_5]=e_7;$$
$$1357O: \ [e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_6]=e_7, [e_2,e_3]=e_6,\ [e_2,e_4]=e_5,\ [e_2,e_5]=e_7;$$
$$1357Q: [e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_7,\ [e_2,e_3]=e_6,\ [e_2,e_4]=e_6,\ [e_2,e_6]=\pm e_7;$$
$$247P_1: \ [e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_3]=e_5,\ [e_2,e_3]=e_6,\ [e_2,e_4]=e_7,\ [e_3;e_5]=e_7.$$

Утверждение 5. *С точностью до голоморфных преобразований все реализации в $\mathbb{C}^4$ семи алгебр* (13) *имеют следующие представления:*

Алгебра $137A: e_1=(A_1;B_1;-z_2+C_1;-z_3+D_1);\ e_2=(0;1;0;0);\ e_3=(1;0;0;0);$
$$e_4=(0;A_1^2;-A_1D_6-A_1z_1;1/2z_1^2+D_6z_1+D_4);$$
$$e_5=(0;0;1;0);\quad e_6=(0;0;-A_1;z_1+D_6);\quad e_7=(0;0;0;1).$$

Алгебра $137C: e_1=(A_1;B_1;-z_2+C_1;-z_3+D_1);$
$$e_2=(0;2A_1;-z_1+D_5;D_2);\ e_3=(1;0;0;0);\ e_4=(0;1;0;0);$$
$$e_5=(0;0;A_1;-z_1+D_5);\ e_6=(0;0;1;0);\ e_7=(0;0;0;1).$$

Алгебра *1357G:*
$$e_1=(A_1;-A_1^2z_1+B_1;\tfrac{1}{2}A_1z_1^2+A_1D_5z_1-z_2+C_1;-\tfrac{1}{6}z_1^3-\tfrac{1}{2}D_5z_1^2-D_3z_1-z_3+D_1);$$
$$e_2=(1;0;0;0);\ e_3=(0;A_1^2;-A_1D_5-A_1z_1;\tfrac{1}{2}z_1^2+D_5z_1+D_3);$$
$$e_4=(0;1;0;0);\ e_5=(0;0;-A_1;z_1+D_5);\ e_6=(0;0;1;0);\ e_7=(0;0;0;1).$$

Алгебра $1357\,O: e_1=(1;0;0;0);$
$$e_2=(A_2;-2A_2z_1+B_2;\tfrac{1}{2}z_1^2+C_3z_1-z_2+C_2;D_3z_1+D_2-z_3);\ e_3=(0;-2A_2;z_1+C_3;D_3);$$
$$e_4=(0;1;0;0);\ e_5=(0;0;1;0);\ e_6=(0;0;-A_2;z_1+C_3);\ e_7=(0;0;0;1).$$

Алгебра $1357Q: e_1=(1;0;0;0);$
$$e_2=(A_2;(A_2^2+1)z_1+B_2;-\tfrac{1}{2}A_2(z_1+D_5)^2-z_2+C_2;\tfrac{1}{6}(z_1+D_5)^3+D_3z_1-z_3+D_2);$$
$$e_3=(0;A_2^2+1;-A_2D_5-A_2z_1;\tfrac{1}{2}(z_1+D_5)^2+D_3);\ e_4=(0;1;0;0);$$
$$e_5=(0;0;-A_2;z_1+D_5);\ e_6=(0;0;1;0);\ e_7=(0;0;0;1).$$

Алгебра $247P_1: e_1=(0;i\varepsilon(z_1+D_5);C_1;-(z_1+D_5)^2/2+D_1);$
$$e_2=(i\varepsilon;B_2;-z_1+C_2;-z_2+D_2);\ e_3=(1;0;0;0);$$
$$e_4=(0;1;0;0);\ e_5=(0;-i\varepsilon;0;z_1+D_5);\ e_6=(0;0;1;0);\ e_7=(0;0;0;1);\ \varepsilon=\pm 1.$$

Алгебра $1357Q_1: \ e_1=(1;0;0;0);$
$$e_2=(A_2;(-A_2^2+1)z_1+B_2;\tfrac{1}{2}A_2(z_1+D_5)^2-z_2+C_2;\tfrac{1}{6}(z_1+D_5)^3+D_3z_1+z_3+D_2);$$
$$e_3=(0;-A_2^2+1;A_2D_5+A_2z_1;\tfrac{1}{2}(z_1+D_5)^2+D_3);e_4=(0;1;0;0);$$
$$e_5=(0;0;A_2;z_1+D_5);e_6=(0;0;1;0);e_7=(0;0;0;1).$$

Доказательство. Это утверждение в полном объеме подразумевает (в силу необходимости большого количества рутинных вычислений) использование компьютерных алгоритмов и символьных вычислений. Приведем здесь кратко идею этого доказательства, опирающуюся на утверждение 1.

Во-первых, легко проверяется, что у каждой из этих алгебр имеется 5-мерный абелев идеал I_5: для четырех алгебр $1357G, 1357O, 1357G, 1357G_1$ это $<e_3,e_4,e_5,e_6,e_7>$; для алгебр $137A, 137C$ элемент базиса e_3 в приведенном наборе заменяется на e_2, а для алгебры $247P_1$ — на e_1.

Отметим, во-вторых, что схема $h_3 \subset I_5 \subset g_7$ реализуется для всех этих алгебр, причем в случаях $137A, 1357G, 247P_1$ — двумя разными способами. Для доказательства предложения 5 выбраны следующие подалгебры h_3 и коммутирующий с ними элемент из дополнения $g_7 \setminus I_5$:

$$\begin{gathered} 137A: \ e_3 \text{ и } h_3 = \ < e_2, e_5, e_7 >, \quad 137C: \ e_3 \text{ и } h_3 = \ < e_4, e_6, e_7 >, \\ 1357G: \ e_2 \text{ и } h_3 = \ < e_4, e_6, e_7 >, \quad 1357O: \ e_1 \text{ и } h_3 = \ < e_4, e_5, e_7 >, \\ 1357Q, \ 1357Q_1: \ e_1 \text{ и } h_3 = \ < e_4, e_6, e_7 >, \quad 247P_1: \ e_3 \text{ и } h_3 = \ < e_4, e_6, e_7 > . \end{gathered} \tag{14}$$

Применяя утверждение 1 к невырожденным орбитам каждой из семи обсуждаемых алгебр (если такие орбиты существуют), получаем четверку выпрямленных полей, указанных в (14). Точный вид трех остальных базисных полей определяется их коммутационными соотношениями с выпрямленной четверкой и друг с другом.

На примере алгебры $247P_1$ обсудим схему относительно простого описания трех остальных полей базиса алгебры g_7. В нашем случае это поля e_5, e_2 и e_1. Поле e_5 коммутирует с выпрямленной тройкой полей e_4, e_6, e_7 и $[e_3, e_5] = e_7$. Так как $e_1 = \partial/\partial z_1$, это означает, что e_5 обязано иметь следующий вид $e_5 = (A_5, B_5, C_5, z_1 + D_5)$ с некоторыми константами A_5, B_5, C_5, D_5.

По аналогичным соображениям $e_2 = (A_2, B_2, -z_1 + C_2, -z_2 + D_2)$.

Наконец, поле e_1 также коммутирует с подалгеброй h_3, и потому его компоненты могут зависеть только от переменной z_1. При этом производные таких компонент равны (в силу выполнения равенства $[e_1, e_2] = e_5$) компонентам поля $-e_5$.

Остается рассмотреть три попарных коммутатора полей e_1, e_2, e_5 с учетом только что полученной частичной информации об этих полях. Из таких рассмотрений легко получаются, например, равенства $A_5 = 0, C_5 = 0, A_2^2 = -1$ и окончательный вид всего базиса для алгебры $247P_1$, приведенный в утверждении 5.

Отметим, что использование символьных вычислений позволяет выписать с помощью компьютера все 15 соотношений на тройку полей e_1, e_2, e_5 в примере с алгеброй $247P_1$ (или на аналогичную тройку в других случаях) и решить их с использованием простейших операций пакета Maple (solve, subs, collect). При выпрямленной четверке полей квадратичный, вообще говоря, характер уравнений для определения компонент оставшихся трех полей сильно упрощается.

Приведенные в статье вычисления, связанные, в частности, с утверждением 5, выполнялись для надежности и вручную, и на компьютере. □

Утверждение 6. *Все 7-мерные орбиты в пространстве $\mathbb{C}^4$ всех семи выписанных алгебр векторных полей являются вырожденными по Леви.*

Доказательство. Это утверждение получено авторами за счет интегрирования всех выписанных в предложении 5 алгебр векторных полей. В целом такое интегрирование каждой отдельной алгебры является достаточно утомительным, но не содержит идейных сложностей.

Для обсуждаемых семи алгебр, содержащих четверку выпрямленных базисных полей, все орбиты являются трубчатыми гиперповерхностями, зависящими только от мнимых частей комплексных переменных z_k $(k = 1, 2, 3, 4)$. Это упрощает задачу их интегрирования.

В следующих разделах статьи мы подробно опишем процедуру нахождения орбит более сложно устроенной алгебры $137A_1$. Здесь же отметим, что при некоторых значениях параметров, описывающих семь обсуждаемых алгебр, все их орбиты оказывается очевидно вырожденными по соображениям, приведенным в предыдущих разделах статьи. Интересуясь лишь «содержательными» случаями, несложно получить следующий список гиперповерхностей, являющихся (с точностью до аффинных преобразований) орбитами обсуждаемых алгебр и не имеющих «очевидных» признаков вырожденности:

1) алгебра $247P_1$: $y_4 = y_1y_2$;

2) алгебры $137A, 137C$: $y_4 = y_1y_3 + y_1^2y_2 + P_3(y_1)$;

3) алгебры $1357G, 1357O, 1357Q, 1357Q_1$: $y_4 = y_1y_3 + y_1^2y_2 + P_4(y_1)$;

где $P_3(y_1), P_4(y_1)$ — многочлены степени не выше 3 или 4 соответственно.

Остается заметить, что гиперповерхность $y_4 = y_1y_2$ пространства $\mathbb{C}^4$, являющаяся орбитой алгебры $247P_1$ и не зависящая от переменной z_3, очевидно вырождена по Леви. Для остальных поверхностей из этого списка матрица Гессе третьего порядка (3) содержит нулевой (2×2)-блок по переменным z_2, z_3 и, следовательно, вырождена. □

5. Четвертое семейство: второй случай леммы 2

Теперь мы переходим к рассмотрению реализаций в $\mathbb{C}^4$ 12 алгебр из 51, у которых элемент из дополнения к 5-мерному абелеву идеалу I_5 коммутирует лишь с 2-мерной подалгеброй h_2 этого идеала. Напомним, что здесь необходимо доказать вырожденность орбит при упрощениях четверки независимых полей из I_5, зафиксированных во втором и третьем случаях леммы 2. Отметим, что 4 из 12 алгебр этого случая имеют 2-мерный центр, а у 8 остальных алгебр центр одномерный.

5.1. Случай 2-мерного центра (4 алгебры)

Рассмотрим сначала 4 алгебры из 12, имеющие двумерный центр $Z = <e_6, e_7>$: $247F$, $2457L$, $247F_1$, $2457L_1$. Базисы из [8] двух алгебр $2457L$ и $2457L_1$ мы оставим неизменными, а для $247F$ и $247F_1$ удобно использовать циклическую перестановку $e_1 = E_3, e_2 = E_1, e_3 = E_2$. Так получается «общая» таблица коммутационных соотношений для четырех алгебр с абелевым идеалом $I_5 = <e_3, e_4, e_5, e_6, e_7>$.

Таблица 3. Четыре алгебры Ли со структурой $h_2 \subset I_5 \subset g_7$

	$[E_1, E_2]$	$[E_1, E_3]$	$[E_1, E_4]$	$[E_1, E_5]$	$[E_2, E_3]$	$[E_2, E_4]$	$[E_2, E_5]$
4 алгебры	$\mu E_3,$	$\varepsilon_2 E_4$	E_6	E_7	$\varepsilon_2 E_5$	E_7	$\varepsilon_1 E_6$

Уточним, что параметр ε_1 равен 1 для алгебр $2457L$ и $2457F$ и (-1) для $2457L_1$, $2457F_1$. Параметр ε_2 равен 1 для алгебр $2457L$ и $2457L_1$ и (-1) для $2457F_1$ и $2457F_1$. Наконец, параметр $\mu=(1+\varepsilon_2)/2$ принимает значения 0 и 1.

Предположим, что при голоморфной реализации какой-либо алгебры из этой таблицы ее базис с фиксированной четверкой векторных полей e_4,e_5,e_6,e_7 из абелева идеала I_5 оказался приведенным к случаю 2 леммы 2.

Утверждение 7. *Для алгебр, описываемых таблицей 3, существование хотя бы одной невырожденной орбиты и случай 2 леммы 2 несовместимы.*

Доказательство. Компоненты любого поля $e_3 = (a_3, b_3, c_3, d_3)$, дополняющего четверку e_4, e_5, e_6, e_7 до базиса абелева идеала I_5, могут зависеть только от переменной z_1. Если при этом $a_3(z_1)$ отлична от тождественного нуля, то, используя лемму 1, это поле можно выпрямить до состояния $e_3 = (1, 0, 0, 0)$ при сохранении выпрямленного вида тройки полей e_5, e_6, e_7. А из рассуждений предложения 1 о случае 1 леммы 2 следует, что при наличии невырожденной орбиты это невозможно.

Рассмотрим случай $a_3(z_1) \equiv 0$.

Здесь у пяти базисных полей идеала I_5 в таких координатах первые компоненты тождественно нулевые. При этом с учетом условия $[e_1, e_5] = e_7$ поле e_1, коммутирующее с полями e_6, e_7, принимает вид

$$e_1 = (a_1(z_1), b_1(z_1), c_1(z_1), -z_2 + d_1(z_1)).$$

Шесть базисных полей алгебры $\mathfrak{g}_7$, касательных к невырожденной гиперповерхности, не могут иметь тождественно нулевые первой компоненты. Следовательно, можно считать, что $a_1(z_1) \neq 0$. Тогда, по замечанию к лемме 1, поле e_1 упрощается (с сохранением вида выпрямленных полей) до состояния $e_1 = (1, 0, 0, -z_2) = \partial/\partial z_1 - - z_2\partial/\partial z_4$.

Весь базис обсуждаемой алгебры теперь примет вид

$$\begin{array}{rllll}
e_1 = (1, & 0, & 0, & -z_2) \\
e_2 = (a_2(z), & b_2(z), & c_2(z), & d_2(z)) \\
e_3 = (0, & b_3(z_1), & c_3(z_1), & d_3(z_1)), \\
e_4 = (0, & b_4(z_1), & c_4(z_1), & d_4(z_1)), \\
e_5 = (0, & 1, & 0, & 0), \\
e_6 = (0, & 0, & 1, & 0), \\
e_7 = (0, & 0, & 0, & 1).
\end{array} \tag{15}$$

Рассматривая теперь для таких базисов коммутационные соотношения $[e_2,e_6]=0$, $[e_2,e_7]=0$, $[e_2,e_5]=\varepsilon_2 e_6$, получаем следующий вид поля e_2:

$$e_2 = (a_2(z_1), b_2(z_1), -\varepsilon_2 z_2 + c_2(z_1), d_2(z_1)).$$

При этом, по использованному уже замечанию о шести нулях, можно считать функциональный коэффициент $a_2(z_1)$ не обращающимся в нуль в некоторой окрестности обсуждаемой точки на невырожденной гиперповерхности M.

Для полного описания голоморфной реализации любой алгебры из таблицы 3 необходимо учесть еще 5 нетривиальных условий из этой таблицы. Однако проверка отдельных компонент четырех таких условий

$$[e_1, e_3] = (0, b_3', c_3', d_3') - b_3(0, 0, 0, -1) = \varepsilon_2(0, b_4, c_4, d_4), \tag{16}$$

$$[e_2, e_3] = a_2(0, b_3', c_3', d_3') - b_3(0, 0, -\varepsilon_1, 0) = \varepsilon_2(0, 1, 0, 0), \tag{17}$$

$$[e_1, e_4] = (0, b_4', c_4', d_4') - b_4(0, 0, 0, -1) = (0, 0, 1, 0), \tag{18}$$

$$[e_2, e_4] = a_2(0, b_4', c_4', d_4') - b_4(0, 0, -\varepsilon_1, 0) = (0, 0, 0, 1), \tag{19}$$

приводит к противоречию. В самом деле, компоненты (16)-2, (16)-4, (17)-4, (18)-3, (18)-4, (19)-3 этих векторных равенств имеют вид

$$b_3' = \varepsilon_2 b_4, \quad d_3' + b_3 = \varepsilon_2 d_4, \quad a_2 d_3' = 0, \quad c_4' = 1, \quad d_4' + b_4 = 0, \quad a_2 c_4' - \varepsilon_1 b_4 = 0. \tag{20}$$

Так как $a_2 \neq 0$, то из вспомогательного равенства (16)-4 делаем вывод $d_3' = 0$. С учетом этого два первых равенства из (20) принимают вид $b_3' = \varepsilon_2 b_4$, $b_3 = \varepsilon_2 d_4$, и приводят к выводу

$$b_4 = \varepsilon_2 b_3' = \varepsilon_2(\varepsilon_2 d_4)' = d_4'.$$

Вместе с пятым равенством (20) это означает, что $b_4 = 0$. Однако это равенство противоречит (при ограничении $a_2(z_1) \neq 0$) двум оставшимся условиям из (20) $c_4' = 1$, $a_2 c_4' - \varepsilon_1 b_4 = 0$. Утверждение 7 доказано. □

5.2. Восемь алгебр со структурой $h_2 \subset I_5 \subset g_7$ и одномерным центром

Утверждение 8. *За счет подходящего выбора базисов во всех 8 алгебрах из списка [8], удовлетворяющих условиям этого случая, коммутационные соотношения в алгебрах можно привести к виду, зафиксированному в таблице 4.*

Таблица 4. Восемь алгебр Ли со структурой $h_2 \subset I_5 \subset g_7$

Алгебра	$[E_1, E_2]$	$[E_1, E_3]$	$[E_1, E_4]$	$[E_1, E_5]$	$[E_2, E_3]$	$[E_2, E_4]$	$[E_2, E_5]$	$[E_2, E_6]$
$1357B$		$-E_5$	$-E_3$	E_7	E_7	E_5		E_7
$13457D$	E_4	E_5	E_3	E_7	E_7	E_5		E_7
$12357A$		E_5	E_6	E_7	E_4	E_5	E_6	E_7
$12357B$		E_5+E_7	E_6	E_7	E_4	E_5	E_6	E_7
$123457H$	$-E_3$	E_5+E_7	E_6	E_7	E_4	E_5	E_6	E_7
$137A_1$		E_5	E_6	E_7	$-E_6$	E_5		E_7
$1357B_1$		$-E_6$		E_7	E_4	E_5	E_6	E_7
$123457H_1$	$-E_3$	E_5-E_7	$-E_6$	E_7	E_4	E_5	E_6	E_7

Кратко прокомментируем доказательство этого предложения. «Канонические» базисы для всех восьми алгебр мы строим на основе базисов из [8], используя описанные выше идеи. Укажем, в частности, что

1) строка этой таблицы, отвечающая алгебре $137A_1$, совпадает с таблицей умножения для этой алгебры, приведенной в [8];

2) для алгебры 123457H оказалась удобной перестановка (транспозиция) $e_1 \leftrightarrow e_2$;

3) в алгебре $123457H_1$ сделана транспозиция $e_1 \leftrightarrow e_2$ и базисный элемент e_7 заменен на $(-e_7)$.

Утверждение 9. *В случае 2 леммы 2 семимерные орбиты в пространстве $\mathbb{C}^4$ любой из 8 обсуждаемых алгебр могут быть только вырожденными по Леви.*

Доказательство. Допустим от противного, что существует реализация какой-либо из обсуждаемых 8 алгебр, имеющая невырожденную орбиту. Так как для всех этих алгебр $[e_1, e_5] = e_7$, то можно считать, что, как и в п. 4.1, координатное представление базиса любой такой алгебры имеет вид (15). При этом из условий $[e_2, e_7] = 0, [e_2, e_6] = e_7$, $[e_2, e_5] = \mu e_6 (\mu \in \{0, 1\})$, выводится следующий вид поля

$$e_2 = (a_2(z_1), b_2(z_1), -\mu z_2 + c_2(z_1), -z_3 + d_2(z_1))$$

с некоторыми голоморфными функциями $a_2(z_1), b_2(z_1), c_2(z_1), d_2(z_1)$.

Рассмотрим в такой ситуации коммутатор

$$[e_1, e_2] = \left(a_2', b_2', \frac{\partial c_2}{\partial z_1}, \frac{\partial d_2}{\partial z_1}\right) - z_2 \left(0, 0, \frac{\partial c_2}{\partial z_4}, \frac{\partial d_2}{\partial z_4}\right) - b_2(0, 0, 0, -1).$$

Согласно таблице 4 и формулам (15), его первая компонента равна нулю. Следовательно, $a_2(z_1) = A_2 = \text{const}$, а условие невырожденности орбиты обсуждаемой алгебры не допускает обращения этой константы в нуль (т.к. при таком обращении выполняется достаточное условие 3 вырожденности орбит).

В следующем коммутационном соотношении $[e_2, e_4] = e_5$, имеющем одинаковый вид для всех восьми алгебр, выделим вторую компоненту. По аналогии с проделанными выше вычислениями получаем здесь равенство

$$A_2 \cdot b_4'(z_1) = 1, \quad \text{откуда} \quad b_4(z_1) = \alpha z_1 + B_4, \ \alpha = \frac{1}{A_2} \neq 0. \tag{21}$$

Еще одно коммутационное соотношение допускает разные варианты для разных алгебр из обсуждаемой восьмерки:

$$[e_1, e_4] = (0, b_4', c_4', d_4') - b_4(0, 0, 0, -1) \tag{22}$$

может равняться либо а) нулю, либо б) $\pm e_6$, либо в) $\pm e_3$.

Для шести алгебр из таблицы, соответствующих случаям а) и б), мы сразу приходим к равенству $b_4'=0$, противоречащему (21). Для двух оставшихся алгебр $1357B$ и $13457D$, отвечающих случаю в), уточним, что из (22) следует равенство

$$b_4'(z_1) = \pm b_3(z_1).$$

С учетом линейного вида функции $b_4(z_1)=\alpha z_1+B_4$, полученного в (21), это означает, что $b_3(z_1) = \pm\alpha = \text{const}$, причем эта константа отлична от нуля.

Наконец рассмотрим в этой ситуации еще одно коммутационное соотношение

$$[e_1, e_3] = (0, b_3'(z_1), c_3'(z_1), d_3'(z_1)) - b_3(0, 0, 0, -1) = \pm e_5 = \pm (0, 1, 0, 0). \tag{23}$$

Так как постоянная функция $b_3(z_1)$ имеет нулевую производную, во второй компоненте векторного равенства (23) мы получаем противоречие и в этом, последнем из рассматриваемых случаев утверждения 9. □

6. Четвертое семейство: третий случай леммы 2

Здесь мы рассмотрим третий случай леммы 2 упрощения четверки независимых полей e_4, e_5, e_6, e_7 из 5-мерного абелева идеала I_5 для всех 12 алгебр. Выделенная четверка полей здесь имеет такие координатные представления:

$$\begin{aligned} e_4 &= (0, \quad 1, \quad 0, \quad 0), \\ e_5 &= (0, \quad 0, \quad c_5(z_1), \quad d_5(z_1)), \\ e_6 &= (0, \quad 0, \quad 1, \quad 0), \\ e_7 &= (0, \quad 0, \quad 0, \quad 1). \end{aligned} \tag{24}$$

Отметим также, что любое поле из идеала I_5 (обозначим его через e_3), дополняющее четверку (24) до базиса I_5, также обязано иметь упрощенный вид

$$e_3 = (0,\ b_3(z_1),\ c_3(z_1),\ d_3(z_1)). \tag{25}$$

Уточним, что коммутационные соотношения и в этом случае описываются таблицами 3 и 4, однако одна алгебра из 12 будет рассмотрена отдельно.

Утверждение 10. *При выполнении условий* (24) *7-мерные орбиты в пространстве* $\mathbb{C}^4$ *любой алгебры из таблиц 3 и 4, кроме* $137A_1$, *могут быть только вырожденными по Леви.*

Доказательство. Начнем обсуждения с **первой четверки алгебр** $247F$, $2457L$, $247F_1$, $2457L_1$, имеющих 2-мерный центр $< e_6, e_7 >$. Здесь из общих для всех этих четырех алгебр соотношений $[e_2, e_6] = [e_2, e_7] = 0$, $[e_2, e_4] = e_7$ получаем упрощенный вид поля

$$e_2 = (a_2(z_1), b_2(z_1), c_2(z_1), -\, z_2 + d_2(z_1)).$$

Для поля e_1, также коммутирующего с полями e_6, e_7, имеем с учетом $[e_1, e_4] = e_6$ аналогичное упрощение

$$e_1 = (a_1(z_1), b_1(z_1), -\, z_2 + c_2(z_1), d_1(z_1)).$$

Отметим, что при наличии невырожденной орбиты у любой из обсуждаемых алгебр первые компоненты двух этих полей не могут быть тождественно нулевыми, т.к. у пяти полей (24)–(25) первые компоненты – нулевые изначально. Тогда голоморфной заменой переменной z_1 превратим коэффициент $a_1(z_1)$ в единицу, а затем упростим (пользуясь замечанием к лемме 1) поле e_1 до состояния

$$e_1 = (1, 0, -\, z_2, 0). \tag{26}$$

При таких заменах базисные поля $e_2, ..., e_7$ алгебры сохранят свой вид.

Далее рассмотрим два соотношения: $[e_1, e_5] = e_7$ и $[e_2, e_5] = \varepsilon_1 e_6$. В развернутой форме первое из них имеет вид $(0, 0, c_5'(z_1), d_5'(z_1)) = (0, 0, 0, 1)$, а потому

$$e_5 = (0, 0, C_5, z_1 + D_5) \tag{27}$$

с некоторыми константами C_5, D_5. Но тогда из второго получаем противоречие

$$a_2(z_1)(0,0,0,1) = (0,0,\varepsilon_1,0).$$

На втором этапе мы рассмотрим **еще 5 алгебр из 12** ($12357A$,$12357B$,$123457H$, $137A_1$,$123457H_1$), для которых в таблице 4 выполняется коммутационное соотношение $[e_1,e_4]=\pm e_6$. Напомним, что это соотношение было фактически решающим для упрощения поля e_1 и приведения его к виду (26) для четверки алгебр с двумерным центром.

Для обсуждаемых теперь пяти алгебр поле e_1 по-прежнему коммутирует с e_6 и e_7, и поэтому также приводится к виду (26). И аналогично из соотношения $[e_1,e_5]=e_7$ снова получаем упрощение (27) для поля e_5.

Теперь мы рассмотрим коммутационные соотношения с участием поля e_2. Из $[e_2,e_7]=0$, $[e_2,e_6]=e_7$ мы получаем упрощенный вид этого поля

$$e_2 = (a_2(z_1,z_2), b_2(z_1,z_2), c_2(z_1,z_2), -z_3 + d_2(z_1,z_2)).$$

Но тогда условие $[e_2,e_5]=e_6$ противоречиво, т.к. принимает вид

$$a_2(z_1,z_2)(0,0,0,1) - C_5(0,0,0,-1) = (0,0,1,0).$$

Далее обсудим **две алгебры** $1357B, 13457D$ из таблицы 3. Для иллюстрации сходства таблиц умножения в этих алгебрах запишем в общей форме два соотношения:

$$[e_1,e_3] = \lambda e_5, \quad [e_1,e_4] = \lambda e_3,$$

где $\lambda = -1$ в случае алгебры 1357B и $\lambda = 1$ для алгебры 13457D.

Рассматривая коммутационные соотношения $[e_1,e_7]=[e_1,e_6]=0,[e_1,e_4]=\lambda e_3$, несложно получить с учетом формул (24) упрощенный вид поля

$$e_1 = (a_1(z_1), \lambda z_2 b_3(z_1) + b_1(z_1), \lambda z_2 c_3(z_1) + c_1(z_1), \lambda z_2 d_3(z_1) + d_1(z_1)).$$

Как и ранее, в случае существования невырожденных орбит у алгебры с рассматриваемыми коммутационными соотношениями, первая компонента этого поля не может быть тождественно нулевой. Следовательно, после голоморфной замены переменной z_1 (возможно, в смещенной точке) функцию $a_1(z_1)$ можно считать равной единице.

Теперь из коммутационного соотношения $[e_1,e_3]=\lambda e_5$ выделим важную для дальнейших рассмотрений вторую компоненту, т.е.

$$b_3'(z_1) = \lambda b_3^2(z_1) \tag{28}$$

и перейдем к уточнению вида поля e_2.

Из соотношений $[e_2,e_7]=0$, $[e_2,e_6]=e_7$, $[e_2,e_4]=e_5$ получаем две компоненты поля e_2 в виде функций $a_2(z_1)$ и $b_2(z_1)$, зависящих только от переменной z_1.

Завершая обсуждение орбит алгебр $1357B, 13457D$, рассмотрим еще коммутационное соотношение $[e_2,e_3]=e_7$. В первой компоненте этого векторного равенства получаем тождество $0=0$, а во второй (с учетом проведенных обсуждений) —

$$a_2(z_1) b_3'(z_1) = 0.$$

Как и ранее, первая компонента поля e_2, т.е. $a_2(z_1)$, отлична от тождественного нуля, следовательно, $b_3'(z_1)\equiv 0$. Тогда из условия (28) получаем, что $b_3(z_1)\equiv 0$.

Теперь у каждого из четверки независимых полей e_3, e_5, e_6, e_7 две первые компоненты оказываются тождественно нулевыми. Из обсуждений первого раздела статьи следует, что это невозможно для невырожденных орбит обсуждаемых алгебр. □

Обсудим теперь орбиты **последней алгебры** $137A_1$ из таблицы 4. У нее имеются реализации, не удовлетворяющие ни одному из простейших достаточных условий вырожденности орбит.

Утверждение 11. *Если голоморфная реализация в $\mathbb{C}^4$ 7-мерной алгебры $137A_1$ из таблицы 3 имеет хотя бы одну невырожденную орбиту, а четверка ее базисных полей e_4, e_5, e_6, e_7 имеет вид (24), то голоморфными преобразованиями весь базис этой алгебры можно привести к виду*

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1, && 0, && -z_2, && 0),\\
e_2 &= (A_2, && B_2, && A_2z_2 - B_2z_1 + C_2, && -z_3 - z_1z_2),\\
e_3 &= (0, && B_3, && -(A_2+B_3)z_1, && 1/2z_1^2 + D_3),\\
e_4 &= (0, && 1, && 0, && 0),\\
e_5 &= (0, && 0, && -A_2 && z_1)),\\
e_6 &= (0, && 0, && 1, && 0),\\
e_7 &= (0, && 0, && 0, && 1),
\end{aligned} \tag{29}$$

где $A_, B_k, C_k, D_k$ — некоторые комплексные константы, при этом $A_2(2B_3+A_2)=1$.

Доказательство. Формулы (29) получаются за счет рутинного выписывания коммутационных соотношений обсуждаемой алгебры с учетом упрощенного вида пятерки полей (24)–(25). При этом используются те же технические идеи, что и в предыдущих обсуждениях. Например, «простой» вид коммутаторов поля e_1 с тройкой e_4, e_6, e_7 позволяет записать это поле в виде

$$e_1 = (a_1(z_1), b_1(z_1), -z_2 + c_1(z_1), d_1(z_1)),\ a_1(z_1) \neq 0,$$

а затем упростить его голоморфной заменой до состояния $e_1 = (1, 0, -z_2, 0)$.

Обсуждая остальные 10 коммутаторов (5 полей в абелевом идеале I_5 автоматически коммутируют друг с другом), можно получить выражения (29) для всех остальных полей. Отметим, что более удобно решать систему 11 коммутационных соотношений, связанных с этой алгеброй, в пакете Maple. Формально система является квадратичной относительно неизвестных компонент базисных полей, но выпрямленный вид тройки e_4, e_6, e_7 существенно упрощает решение. □

Полученные формулы (29) являются необходимыми, но не достаточными условиями существования невырожденных орбит для алгебры $137A_1$.

Утверждение 12. *Все 7-мерные орбиты в $\mathbb{C}^4$ алгебр (29) — вырожденные гиперповерхности.*

Доказательство. Условие (1) для каждого базисного поля алгебры (29) означает уравнение в частных производных относительно определяющей функции

Φ любой орбиты $M = \{\Phi = 0\}$ этой алгебры. Эту функцию можно записать в вещественных координатах пространства $\mathbb{C}^4$, разрешая уравнение $\Phi(z, \bar{z}) = 0$ относительно одной из вещественных переменных, например относительно $y_4 = Im\, z_4$.

При этом наличие трех выпрямленных полей в базисе (29) означает, что определяющая функция не зависит от вещественных координат $x_k = Re\, z_k,\ (k = 2, 3, 4)$, а уравнение (2) любой орбиты обсуждаемой алгебры можно записать в виде

$$y_4 = F(x_1, y_1, y_2, y_3).$$

Выделяя у коэффициентов из формул (29) вещественные и мнимые части

$$A_2 = a_{21} + ia_{22},\ B_2 = b_{21} + ib_{22},\ B_3 = b_{31} + ib_{32},\ C_2 = c_{21} + ic_{22},\ D_2 = d_{21} + id_{22},$$

получим следующую систему 4-х уравнений в частных производных относительно функции $F(x_1, y_1, y_2, y_3)$:

$$\begin{gathered}
e_1\ :\ \frac{\partial F}{\partial x_1} - y_2\frac{\partial F}{\partial y_3} = 0, \qquad e_5\ : -a_{22}\frac{\partial F}{\partial y_3} - y_1 = 0,\\
a_{21}\frac{\partial F}{\partial x_1} + a_{22}\frac{\partial F}{\partial y_1} + b_{22}\frac{\partial F}{\partial y_2} + \Big((a_{21}y_2 + a_{22}x_2 - (b_{21}y_1 + b_{22}x_1 + c_{22})\Big)\frac{\partial F}{\partial y_3} = \\
= -(y_3 + x_1y_2 + x_2y_1),\\
e_3\ :\ b_{32}\frac{\partial F}{\partial y_2} - ((a_{21} + b_{31})y_1 + (a_{22} + b_{32}x_1))\frac{\partial F}{\partial y_3} = x_1y_1 + d_{22}.
\end{gathered} \tag{30}$$

Эту систему достаточно рассматривать лишь при ненулевых a_{22}, b_{32}, так как при обращении в нуль хотя бы одного из этих коэффициентов для орбит алгебры с базисом (29) выполняется одно из условий их вырожденности из раздела 1.

Решая стандартными методами шаг за шагом отдельные уравнения этой системы (начиная с самых простых), получим здесь формулы

$$\begin{gathered}
F = -\frac{1}{a_{22}}y_1y_3 + G(x_1, y_1, y_2), \quad G = -\frac{1}{a_{22}}x_1y_1y_2 + H(y_1, y_2),\\
H = -\frac{a_{21} + b_{31}}{a_{22}b_{32}}y_1^2y_2 + \frac{d_{22}}{b_{32}}y_2 + \varphi(y_1).
\end{gathered} \tag{31}$$

Функция $\varphi(y_1)$ удовлетворяет при этом итоговому ОДУ $a_{22}\varphi'(y_1) = N_1y_1 + N_2y_1^2$ (с некоторыми коэффициентами M, N), получаемому при пошаговом решении системы (30). Явный вид этой функции нам не важен, т.к. объединение формул (31) дает уравнение произвольной орбиты алгебры (29) в виде

$$y_4 = -\frac{1}{a_{22}}y_1y_3 - \frac{1}{a_{22}}x_1y_1y_2 + Ry_1^2y_2 + py_2 + \varphi(y_1) \tag{32}$$

с некоторыми вещественными коэффициентами R, p.

В силу линейного (и независимого друг от друга) вхождения в слагаемые уравнения (32) переменных y_2, y_3 несложно понять, что матрица вторых производных

$$H = \left(\partial^2 F/\partial z_k \partial \bar{z}_j\right), \quad k, j \in \{1, 2, 3\}$$

правой части (32) является тождественно вырожденной. Это означает, что вырождена по Леви любая орбита алгебры (29). Утверждение 12 доказано. □

Вместе с ним доказано основное утверждение статьи, т.е. теорема 1 из введения.

Список литературы

[1] E. Cartan, “Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de l’espace de deux variables complexes”, *Ann. Math. Pura Appl.*, **11** (1933), 17–90.

[2] G. Fels, W. Kaup, “Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5”, *Acta Math.*, **201** (2008), 1–82.

[3] B. Dourov, A. Medvedev, D. The, “Homogeneous Levi non-degenerate hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$”, *Mathematische Zeitschrift*, **297** (2021), 669—709.

[4] А. В. Лобода, “Голоморфно-однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$”, *Тр. ММО*, **81**:2 (2020), 61–136.

[5] B. Doubrov, J. Merker, D. The, “Classification of simply transitive Levi non-degenerate hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$”, 2020, arXiv: 2010.06334v1.

[6] V. A. Le, T. A. Nguyen, T. T. C. Nguyen, T. T. M. Nguyen, T. N. Vo, “Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals”, 2021, arXiv: 2107.03990.

[7] C. Seeley, “7-dimensional nilpotent Lie algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **335**:2 (1993), 479–496.

[8] M. P. Gong, “Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7 (over algebraically closed fields and R)”, *PhD thesis. Waterloo: Univ. Waterloo*, 1998, http://www.semanticscholar.org/paper/f72dbfc64f72f7b3d9a740c77181ae2186d58e22.

[9] P. Ghanam, G. Thompson, “Nonsolvable subalgebras of $gl(4,\mathbb{R})$”, *Journal of Mathematics*, **2016** (2016), 17, https://www.hindawi.com/journals/jmath/2016/2570147/.

[10] Г. М. Мубаракзянов, “Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка”, *Изв. вузов. Матем.*, 1963, № 3, 99–106.

[11] L. Shnobl, P. Winternitz, *Classification and identification of Lie algebras*, CRM Monograph Series, Vol. 33, RI: AMS, 2014.

[12] В. И. Лагно, С. В. Спичак, В. И. Стогний, *Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа*, Москва – Ижевск, 2004.

[13] A. V. Loboda, R. S. Akopyan, V. V. Krutskikh, “On the orbits of nilpotent 7-dimensional Lie algebras in 4-dimensional complex space”, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, **13**:3 (2020), 360–372.

[14] А. В. Лобода, “О задаче описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей 4-мерных комплексных пространств”, *Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН.*, **331** (2020), 194–212.

[15] А. В. Лобода, В. К. Каверина, “О вырожденности орбит разложимых алгебр Ли”, *Уфимский матем.журнал*, 2022, № 1, 57–83.

[16] В. В. Крутских, А. В. Лобода,, “Компьютерная обработка данных в одной многомерной математической задаче”, *Материалы международной online-конференции "Информатика: проблемы, методы, технологии"(IPMT-2021)*, ООО «ВЭЛБОРН», Воронеж, 2021, 411–419.

[17] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, Москва, 1986.

[18] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ, ч.2*, Наука, Москва, 1976.

[19] V. K. Beloshapka, I. G. Kossovskiy, “Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic”, *Geom. Anal.*, **20**:3 (2010), 538–564.

[20] А. В. Атанов, А. В. Лобода, “Разложимые пятимерные алгебры Ли в задаче о голоморфной однородности в $\mathbb{C}^3$”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, ВИНИТИ, Москва, 2019, 86—115.

Поступила в редакцию
29 апреля 2021 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 20-01-00497), Российского Научного фонда (проект № 23-21-00109) и Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ им. М. В. Ломоносова.

Loboda A. V.[1], *Akopyan R. S.*[2], *Krutskikh V. V.*[3] On 7-dimensional algebras of holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^4$, having a 5-dimensional abelian ideal. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2023. V. 23. No 1. P. 55–80.

[1] Voronezh State Technical University, Russia
[2] MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia
[3] Voronezh State University, Russia

ABSTRACT

In connection with the problem of describing holomorphically homogeneous real hypersurfaces in $\mathbb{C}^4$ we study in this article the 7-dimensional orbits of real Lie algebras in this space. By the well-known Morozov theorem, any nilpotent 7-dimensional Lie algebra has at least a 4-dimensional Abelian ideal. The article considers nilpotent indecomposable 7-dimensional Lie algebras containing a 5-dimensional Abelian ideal. It is proved that in the space $\mathbb{C}^4$ all the orbits of such algebras are Levi degenerate. This statement covers 73 algebras from the complete list of 149 indecomposable 7-dimensional nilpotent Lie algebras.

Key words: *homogeneous manifold, holomorphic function, vector field, Lie algebra, Abelian ideal.*