

УДК 517.9
MSC2020 34A12, 34C05

© А. О. Ремизов¹

Сингулярности квазилинейных дифференциальных уравнений

Исследуются решения квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в их особых точках, где коэффициент при старшей производной обращается в нуль. Рассматриваются решения, входящие в особые точки как с определенным касательным направлением (решения), так и без оно (осциллирующие). Показано, что в типичном случае осциллирующих решений нет, а правильные решения входят в особую точку не в произвольных, а в строго определенных направлениях. Получено локальное представление правильных решений в форме, подобной рядам Ньютона – Пуанкаре.

Ключевые слова: особые точки, нормальные формы, резонансы, инвариантные многообразия, осциллирующие решения.

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202308>

Введение

А. Ф. Филиппов показал [1], что система дифференциальных уравнений

$$F(x, y, p) = 0, \quad p = dy/dx, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^1$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $p = (p_1, \dots, p_n)$ и $F: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – гладкая (под словом «гладкий» мы будем подразумевать класс C^∞ , если не указано противное) вектор-функция, может иметь решения, входящие в некоторую точку без определенного касательного направления. Решение $y(x)$ системы (1) называется *осциллирующим* в точке (x_0, y_0) , если $y(x)$ – вектор-функция, дифференцируемая на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ или $(x_0 - \delta, x_0)$, $\delta > 0$, такая, что $y(x) \rightarrow y_0$, но $y'(x)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $x \rightarrow x_0$. В противоположность этому решение $y(x)$ называется *правильным* в точке (x_0, y_0) , если $y'(x)$ имеет предел (конечный или бесконечный) при $x \rightarrow x_0$.

Обозначим J^1 пространство 1-струй функций $y(x)$ с координатами (x, y, p) . Филиппов показал, что если для точки $T_0 \in J^1$ найдется такая точка $T'_0 \in J^1$, что $x_0 = x'_0$,

¹Московский физико-технический институт, 141701, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.
Электронная почта: alexey-remizov@yandex.ru

$y_0 = y'_0$, $p_0 \neq p'_0$ и матрица F_p в T'_0 вырождена, то, кроме единственного решения, проходящего через (x_0, y_0) с касательным направлением p_0 , система (1) может иметь осциллирующие решения, проходящие через (x_0, y_0) .

Следующий пример взят из [1]. Рассмотрим решения системы уравнений

$$\begin{cases} p_1(1 - p_1^2 - p_2^2) + 8xy_1 + 4y_2 = 0, \\ p_2(1 - p_1^2 - p_2^2) + 8xy_2 - 4y_1 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

проходящие через начало координат с касательным направлением $p_1 = p_2 = 0$, то есть удовлетворяющие условиям $y_i(0) = y'_i(0) = 0$, $i = 1, 2$. Матрица F_p невырождена в точке $T_0 = 0$, поэтому система (2) имеет единственное правильное решение $y_i(x) \equiv 0$, удовлетворяющее данному условию. Кроме этого, система (2) имеет еще бесконечное число осциллирующих решений

$$y_1(x) = x^2 \cos(x^{-1} + c), \quad y_2(x) = x^2 \sin(x^{-1} + c), \quad c = \text{const},$$

для всех $x \neq 0$ и $y_i(0) = 0$. Очевидно, что обе производные $y'_i(x)$ существуют и равны нулю при $x = 0$, но пределы $y'_i(x)$ при $x \rightarrow 0$ не существуют.

С другой стороны, Филиппов показал, что системы, обладающие осциллирующими решениями, являются своего рода исключением из правила. Для заданной точки $q_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ определим множество

$$Q(q_0) = \left\{ T = (q_0, p) \in J^1 : F(T) = 0, \det(F_p(T)) = 0 \right\}.$$

Теорема 1 [1]. *Предположим, что выполнено хотя бы одно из условий:*

1. $p_0 \notin \text{co} Q(q_0)$, где «co» означает выпуклую оболочку,
2. $Q(q_0)$ не более чем счетно (или конечно, или счетное, или пустое).

Тогда система (1) не имеет осциллирующих решений в точке q_0 с касательным направлением p_0 . В случае общего положения условие 2 выполнено во всех точках и система (1) вообще не имеет осциллирующих решений.

Теорема 1 применима к широкому классу систем вида (1), но она дает лишь тривиальный результат для квазилинейных систем

$$A(x, y)p = b(x, y), \quad p = dy/dx, \quad (3)$$

где A — $n \times n$ матрица и b — вектор-функция. Действительно, если $\det A(q_0) = 0$, то $Q(q_0) = \{q_0\} \times \mathbb{R}^n$ и, следовательно, оба условия не выполнены. Системы (3) представляют интерес сами по себе (см., например, [2, 3]), но мы ограничимся одним частым случаем, особенно важным для геометрических приложений.

Основное внимание в настоящей статье уделено уравнениям вида

$$\Delta(x, y) \frac{dp}{dx} = M(x, y, p), \quad p = dy/dx, \quad (4)$$

сводящимся к двумерным системам (3). Точка $q_0 = (x_0, y_0)$ называется *неособой* точкой уравнения (4), если $\Delta(x_0, y_0) \neq 0$, и *особой*, если $\Delta(x_0, y_0) = 0$.

Уравнения (4) встречаются во многих задачах анализа, геометрии, теории динамических систем.¹ В свою очередь, среди уравнений (4) большой интерес представляют такие, правая часть которых — кубический многочлен по p :

$$M(x, y, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 \mu_i(x, y) p^i. \quad (5)$$

Интерес к уравнениям (4), (5) объясняется их ролью в физике и геометрии.² Важный случай представляет собой связность Леви–Чивиты, порожденная квадратичной формой

$$ds^2 = a(x, y) dx^2 + 2b(x, y) dx dy + c(x, y) dy^2. \quad (6)$$

Геодезическими в такой связности являются решения уравнения (4), (5), где

$$\begin{aligned} \mu_0 &= a(a_y - 2b_x) + a_x b, \\ \mu_1 &= b(3a_y - 2b_x) + a_x c - 2ac_x, \\ \mu_2 &= b(2b_y - 3c_x) + 2a_y c - ac_y, \\ \mu_3 &= c(2b_y - c_x) - bc_y, \end{aligned} \quad (7)$$

и коэффициент $\Delta = ac - b^2$ обращается в нуль в точках, в которых квадратичная форма (6) вырождается. В римановой геометрии такая ситуация не встречается, однако вырожденные квадратичные формы возникают на поверхностях, вложенных в псевдоевклидовы пространства. Возникающие при этом особенности исследованы в серии работ [8–13], см. также [14].

Во всех известных автору работах на эту тему возможность существования геодезических, осциллирующих при приближении к точке вырождения квадратичной формы, не рассматривается. В настоящей статье мы восполняем этот пробел.

Статья построена следующим образом. В разделе 1 устанавливается необходимое условие для того, чтобы уравнение (4) имело осциллирующее решение, из которого следует, что типичное уравнение (4) с аналитической по p правой частью не имеет осциллирующих решений. В частности, уравнение геодезических в метрике (6) не имеет осциллирующих решений, если $\Delta, d\Delta$ не обращаются в нуль одновременно.

Раздел 2 посвящен исследованию правильных решений уравнений (4), (5) общего типа. Главный инструмент этого исследования — нормальные формы ростков векторных полей с неизолрованными особыми точками, образующими подмногообразие коразмерности 2 в фазовом пространстве. Такие поля представляют большой интерес, так как встречаются в разных задачах. В разделе 2.2 дается краткий обзор результатов в этой области.

Доказано, что правильные решения уравнений (4), (5) не могут входить в особые точки с произвольными касательными направлениями, а только с так называемыми *допустимыми* направлениями p , которые соответствуют вещественным корням

¹Назовем, например, уравнение Бесселя и гипергеометрическое уравнение Гаусса, а также две недавние работы: обобщенную модель Ландау–Гинзбурга жидких кристаллов [4] и аэродинамическую задачу Ньютона [5].

²Например, при описании геодезических в аффинной и проективной связности. Уравнения такого вида были предметом исследования Софуса Ли, А. Трессе, Дж. Лиувилля, Э. Картана и др. См. [6, 7] и библиографии этих работ, содержащие ссылки на классиков.

2кубического многочлена M по p . В настоящей статье мы исследуем только случаи, когда M имеет лишь простые корни.³ Показано, что каждому допустимому направлению p отвечает либо единственное гладкое решение, либо бесконечное семейство решений с общим касательным направлением и степенной особенностью в рассматриваемой особой точке.

Результаты разделов 1 и 2 применимы и для квазилинейных уравнений порядка выше 2. В заключение отметим статьи на близкие темы: [15–27].

1. Осциллирующие решения

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\Delta(x, y) \frac{dp}{dx} = M(x, y, p), \quad p = dy/dx, \quad (8)$$

где $\Delta(x, y)$, $M(x, y, p)$ — гладкие функции. Обозначим через Γ множество особых точек уравнения (8). В случае общего положения Γ — кривая на плоскости (x, y) , называемая *сингулярной кривой*, или *кривой вырождения*.

Рассмотрим начальную задачу для уравнения (8) с условием $y(x_0) = y_0$. Если точка $q_0 = (x_0, y_0)$ не особая, то для каждого p_0 эта задача имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $p(x_0) = p_0$, определенное и гладкое на некотором интервале вещественной прямой, содержащем точку x_0 , причем не существует решений, не имеющих предела $\lim p(x)$ при $x \rightarrow x_0$. Ситуация становится более сложной, если точка q_0 — особая (см. примеры ниже). Далее везде будем использовать следующее обозначение: если I — открытый интервал, то \bar{I} обозначает отрезок с теми же концами.

Определение 1. Будем говорить, что решение $y(x)$ входит в особую точку $q_0 = (x_0, y_0) \in \Gamma$, если функция $y(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. непрерывна на непустом отрезке \bar{I}_ε с концами x_0 и $x_0 + \varepsilon$, где ε может быть положительным или отрицательным числом, $y(x_0) = y_0$;
2. дифференцируема и удовлетворяет (8) на открытом интервале I_ε ;
3. график функции $y(x)$ не имеет общих точек с кривой Γ кроме самой q_0 .

Если дополнительно к этим условиям $p(x)$ имеет (конечный или бесконечный) предел при $x \rightarrow x_0$, то решение $y(x)$ называется *правильным*. В противном случае решение $y(x)$ называется *осциллирующим* в точке q_0 . См. рис. 1.

Определение 2. Будем говорить, что решение $y(x)$ проходит через точку q_0 , если функция $y(x)$ дифференцируема и удовлетворяет (8) во всех точках открытого интервала I , содержащего x_0 , причем $y(x_0) = y_0$ и график функции $y(x)$, $x \in I$, пересекает Γ только в точке q_0 .

³Случай двойного корня исследован для уравнения (4) частного вида, описывающего геодезические, порожденные псевдоримановой метрикой переменной сигнатуры. См. [11–13]. Исследование случая двойного корня для уравнений (4) с кубическим многочленом (5) общего вида является гораздо более трудной задачей.

Очевидно, что любое решение, проходящее через точку q_0 , является объединением двух решений, входящих в q_0 . Стоит отметить, что решения из определений 1, 2 называют соответственно *односторонними* и *двусторонними* решениями, [27].

Пример 1. Параболы $y = \alpha x^2$ являются интегральными кривыми уравнения $2ydp/dx = p^2$, $\alpha = \text{const}$. Однако и графики функций, определенных формулой $y = \alpha_1 x^2$ при $x < 0$ и $y = \alpha_2 x^2$ при $x \geq 0$, тоже являются его интегральными кривыми. Все такие функции – решения данного уравнения, проходящие через начало координат. Чтобы избежать двусмысленности, достаточно воспользоваться понятием решения, входящего в точку. В данном случае решениями, входящими в начало координат, являются ветви парабол $y = \alpha x^2$ и только они.

Пример 2. Уравнение $x^4 dp/dx = 2x^3 p - (2x^2 + 1)y$ имеет семейство решений

$$y = x^2(\alpha \cos x^{-1} + \beta \sin x^{-1}) \text{ при } x \neq 0, \quad \alpha, \beta = \text{const}, \quad (9)$$

и равных нулю при $x = 0$. Все определенные таким образом функции дифференцируемы во всех точках вещественной прямой, но их производные разрывны в нуле, за исключением лишь тождественно нулевого решения (при $\alpha = \beta = 0$). В соответствии с данными выше определениями формула (9) задает семейство решений, проходящих через начало координат с касательным направлением $p = 0$. При $\alpha = \beta = 0$ мы имеем правильное решение $y = 0$, а при остальных значениях α, β решения осциллирующие в начале координат.

Пример 3. Уравнение $x^2 dp/dx = xp - 2y$ имеет семейство решений

$$y = x(\alpha \cos \ln |x| + \beta \sin \ln |x|) \text{ при } x \neq 0, \quad \alpha, \beta = \text{const}, \quad (10)$$

и равных нулю при $x = 0$, которые входят в начало координат. За исключением $\alpha = \beta = 0$, все эти решения осциллирующие в начале координат, но, в отличие от предыдущего примера, в точке $x = 0$ производная не существует. С помощью формулы (10) можно построить уравнение вида (8), имеющее осциллирующее решение, правая часть которого является многочленом от p произвольной степени. Например, функция (10) с $\alpha = \beta = 1$ является решением уравнений $f_i(x, y, p) = 0$, где

$$\begin{aligned} f_2 &= (xp)^2 - 2xyp + 2(y^2 - x^2), \\ f_3 &= (xp)^3 + y(xp)^2 - 2xp(x^2 + 2y^2) + 6y(y^2 - x^2). \end{aligned}$$

Следовательно, $y = x(\cos \ln |x| + \sin \ln |x|)$ является осциллирующим решением уравнений второго порядка

$$x^2 \frac{dp}{dx} = xp - 2y + f_i(x, y, p), \quad p = dy/dx.$$

Следующая теорема показывает, что уравнение (8) общего положения не имеет осциллирующих решений.

Теорема 2. Пусть $q_0 \in \Gamma$ и $M(q_0, p)$ – аналитическая функция, не равная тождественно нулю. Тогда уравнение (8) не имеет осциллирующих решений, входящих в q_0 .

Доказательство. Предположим, что условие теоремы выполнено, но уравнение (8) имеет осциллирующее решение $y(x)$, входящее в точку q_0 без определенно-касательного направления. По определению решения, функция $y(x)$ определена на отрезке $I_\varepsilon = [x_0, x_0 + \varepsilon]$ и $\Delta(x, y(x)) \neq 0$ на интервале $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$. Без ограничения общности, будем считать, что $\Delta(x, y(x)) > 0$ при всех $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ (в противном случае умножим обе части уравнения (8) на -1).

Так как предел $y'(x)$ при $x \rightarrow x_0$ не существует, найдутся по меньшей мере две такие последовательности точек $x'_n \rightarrow x_0 + 0$ и $x''_n \rightarrow x_0 + 0$, что $p(x'_n) \rightarrow p'$ и $p(x''_n) \rightarrow p''$, где $p' \neq p''$. Для определенности положим $p' < p''$. Так как функция $y'(x)$ непрерывна на интервале $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, для каждого $p_* \in (p', p'')$ найдутся две последовательности $\xi_n \rightarrow x_0 + 0$ и $\xi'_n \rightarrow x_0 + 0$, для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(\xi'_n) = p_*, \quad \frac{dp}{dx}(\xi_n) > 0, \quad \frac{dp}{dx}(\xi'_n) < 0. \quad (11)$$

См. рис. 1 (справа). Подставляя решение $y(x)$ в (8), в точках $x = \xi_n$ и $x = \xi'_n$ получаем равенства

$$\Delta(\xi_n, y(\xi_n)) \frac{dp}{dx}(\xi_n) = M(\xi_n, y(\xi_n), p(\xi_n)), \quad (12)$$

$$\Delta(\xi'_n, y(\xi'_n)) \frac{dp}{dx}(\xi'_n) = M(\xi'_n, y(\xi'_n), p(\xi'_n)). \quad (13)$$

Правые части равенств (12), (13) имеют конечный предел $M(x_0, y_0, p_*)$, следовательно, их левые части имеют тот же предел $M(x_0, y_0, p_*)$. С другой стороны, $\Delta(\xi_n, y(\xi_n))$ и $\Delta(\xi'_n, y(\xi'_n))$ положительны при всех n , и из (11) следует, что левые части (12), (13) имеют противоположные знаки. Следовательно, предельное значение $M(x_0, y_0, p_*) = 0$. Таким образом, $M(q_0, p_*) = 0$ для всех $p_* \in (p', p'')$. Это противоречит тому, что функция $M(q_0, p)$ аналитическая по p . \square

Следствие 1. Пусть q_0 — особая точка уравнения (4), правая часть которого — кубический многочлен (5). Если коэффициенты μ_0, \dots, μ_3 не обращаются в нуль в точке q_0 одновременно, уравнение (4) не имеет осциллирующих решений, входящих в точку q_0 . В частном случае уравнения геодезических в метрике (6) условие $d\Delta(q_0) = 0$ является необходимым для существования осциллирующих решений, входящих в q_0 .

Доказательство. Первое утверждение тривиально, докажем второе. Уравнение геодезических в метрике (6) имеет вид (4), (5), где $\Delta = ac - b^2$ и коэффициенты кубического многочлена μ_0, \dots, μ_3 выражаются через коэффициенты метрики a, b, c по формуле (7). По теореме 2, для несуществования осциллирующих решений, входящих в q_0 , достаточно показать, что из обращения в нуль всех коэффициентов μ_0, \dots, μ_3 в точке q_0 следует равенство $d\Delta(q_0) = 0$.

Предположим противное: $\mu_i(q_0) = 0$ для всех i и при этом $d\Delta(q_0) \neq 0$. Чтобы упростить дальнейшие вычисления, выберем такие локальные координаты с началом в точке q_0 , что $b(q_0) = 0$. Этого всегда можно добиться с помощью подходящего аффинного преобразования. Тогда из $\Delta(q_0) = 0$, $d\Delta(q_0) \neq 0$ следует, что $|a(q_0)| + |c(q_0)| \neq 0$, то есть одна из величин $a(q_0), c(q_0)$ равна нулю, а другая —

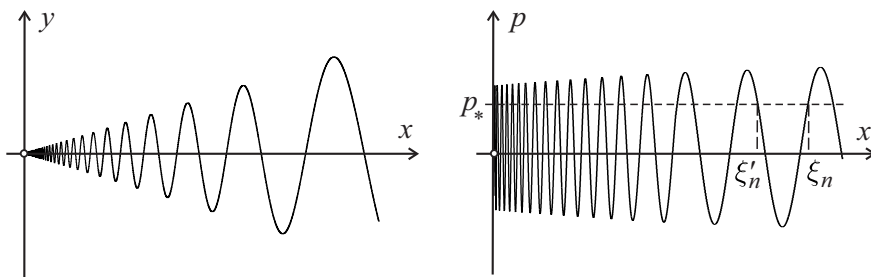


Рис. 1. Осциллирующее решение (слева) и его производная (справа).

нет. Без ограничения общности будем считать, что $a(q_0) \neq 0$ и $c(q_0) = 0$. Тогда из равенств $\mu_i(q_0) = 0$ и (7) вытекает $c_x(q_0) = c_y(q_0) = 0$. Остается заметить, что из

$$b(q_0) = c(q_0) = c_x(q_0) = c_y(q_0) = 0$$

следует $d\Delta(q_0) = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

2. Уравнения второго порядка, кубические по первой производной

В этом разделе мы исследуем типичные особые точки уравнения (4), правая часть которого имеет вид (5). Предполагается, что $\Delta, \mu_0, \dots, \mu_3$ – произвольные гладкие функции, не связанные друг с другом никакими функциональными соотношениями. В соответствии с условием типичности будем предполагать, что коэффициенты $\Delta, \mu_0, \dots, \mu_3$ не обращаются в нуль одновременно и множество особых точек Γ является гладкой регулярной кривой, которая локально разбивает плоскость (x, y) на две области, обозначаемые D и D' .

2.1. Основные результаты

При сделанных выше предположениях уравнение (4), (5) не имеет осциллирующих решений. Наша цель состоит в исследовании правильных решений, входящих в типичные особые точки (в дальнейшем слово «правильные» мы будем опускать). Для исследования таких решений можно использовать лежандрово поднятие (лифт) уравнения в пространство J^1 1-струй функций $y(x)$ с координатами (x, y, p) , где $p = dy/dx$ принимает значения из вещественной прямой и ∞ . Обозначим через $\pi: (x, y, p) \mapsto (x, y)$ стандартную проекцию пространства J^1 на плоскость (x, y) вдоль p -направления, которое мы будем называть *вертикальным*.

В пространстве J^1 уравнение (4), (5) порождает поле направлений, которое задается векторным полем

$$\dot{x} = \Delta(x, y), \quad \dot{y} = p\Delta(x, y), \quad \dot{p} = M(x, y, p). \quad (14)$$

При этом π -проекции интегральных кривых поля (14), отличных от вертикальных прямых, дают решения уравнения (4). И наоборот, лежандров лифт решения уравнения (4) дает интегральную кривую поля (14).

Согласно сделанному предположению, компонента M поля (14) – это кубический многочлен по p , коэффициенты которого гладко зависят от x, y . Чтобы не потерять возможные решения со значениями $p = \infty$, мы будем далее использовать термин *кубический многочлен* в расширенном смысле: старший коэффициент μ_3 может обращаться в нуль в некоторых точках плоскости (x, y) и даже тождественно. Фактически мы будем считать, что при каждом (x, y) M – многочлен степени не выше 3 по p . При таком соглашении класс уравнений (4), (5) инвариантен относительно замен переменных x, y . Он включает, в частности, уравнение Бесселя и гипергеометрическое уравнение Гаусса.

Замечание 1. Принятое нами соглашение позволяет свести случай $p = \infty$ к случаю конечного p . Например, после перестановки местами переменных x, y уравнение (4), (5) превращается в

$$\Delta(\bar{y}, \bar{x}) \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = -M^*(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}),$$

где $\bar{x} = y, \bar{y} = x$ и M^* по \bar{p} – многочлен, взаимный M по p , то есть

$$M^*(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 \mu_i(\bar{y}, \bar{x}) \bar{p}^{3-i}.$$

При этом $p = \infty$ переходит в направление $\bar{p} = 0$, соответствующее корню многочлена $M^*(q_0, \bar{p})$, если и только если $\mu_3(q_0) = 0$. Далее мы будем называть $p = \infty$ корнем многочлена $M(q_0, p)$ кратности m , если $\bar{p} = 0$ является корнем взаимного многочлена $M^*(q_0, \bar{p})$ кратности m .

Теорема 3. Решения уравнения (4), (5) могут входить в особую точку q_0 только в так называемых допустимых направлениях p , которые определяются как вещественные корни кубического многочлена $M(q_0, p)$.

Доказательство. Очевидно, что вертикальная прямая $\pi^{-1}(q_0)$ является интегральной кривой поля (14). Согласно стандартной теореме существования и единственности, если значение p_* таково, что $M(q_0, p_*) \neq 0$, то $\pi^{-1}(q_0)$ является единственной интегральной кривой поля (14), проходящей через точку (q_0, p_*) . Так как π -проекция этой кривой есть точка на плоскости (x, y) , не существует решений уравнения (4), (5), входящих в точку q_0 с касательным направлением p_* . \square

Замечание 2. Из замечания 1 и теоремы 3 следует, что направление $p = \infty$ является допустимым в особой точке q_0 , если и только если $\mu_3(q_0) = 0$.

Определение 3. Будем называть особую точку q_0 уравнения (4), (5) *типичной*, если $d\Delta(q_0) \neq 0$, все корни кубического многочлена $M(q_0, p)$, включая $p = \infty$, простые и соответствующие им допустимые направления трансверсальны Γ .

В окрестности каждой типичной особой точки q_0 существуют такие локальные координаты, в которых $\mu_3(q_0) \neq 0$, и следовательно, все допустимые направления отвечают конечным p . Далее мы всегда будем считать это условие выполненным. В этом случае кубический многочлен $M(q_0, p)$ имеет либо один вещественный корень p_0 , либо три различных вещественных корня p_0, p_1, p_2 .

По теореме 3 все решения уравнения (4), (5), входящие в типичную особую точку $q_0 \in \Gamma$, являются π -проекциями интегральных кривых поля (14), которые стремятся к одной из его особых точек (q_0, p_i) , $i=0, 1, 2$, при стремлении времени к бесконечности (с тем или иным знаком).⁴ Особые точки поля (14) задаются двумя уравнениями

$$\Delta(x, y) = 0, \quad M(x, y, p) = 0. \quad (15)$$

В окрестности типичной особой точки q_0 система (15) задает либо одну кривую в пространстве J^1 , либо три непересекающиеся кривые, каждая из которых соответствует одному из корней p_0, p_1, p_2 . Спектр σ линейной части поля (14) в его особой точке (q_0, p_i) равен

$$\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, 0), \quad \lambda_1 = \Delta_x(q_0) + p_i \Delta_y(q_0), \quad \lambda_2 = M_p(q_0, p_i), \quad (16)$$

в типичной особой точке q_0 оба $\lambda_{1,2}$ вещественные и ненулевые. Нетрудно проверить, что вертикальное направление ∂_p является собственным для λ_2 .

Для заданной особой точки $q_0 \in \Gamma$ и допустимого направления p_i положим

$$\lambda(q_0, p_i) := \lambda_2(q_0, p_i) / \lambda_1(q_0, p_i). \quad (17)$$

Теорема 4. Пусть $q_0 \in \Gamma$ — особая точка уравнения (4), (5), $d\Delta(q_0) \neq 0$ и p_i — простой корень многочлена $M(q_0, p)$, допустимое направление p_i трансверсально кривой Γ . Пусть $\lambda = \lambda(q_0, p_i)$, определенное формулой (17).

1. Если $\lambda < 0$, то уравнение имеет одно C^∞ -гладкое решение, проходящее через q_0 , и не существует других решений, входящих в q_0 с направлением p_i .

2. Если $\lambda > 0$, то уравнение имеет бесконечное число решений, входящих в q_0 с направлением p_i , из области D и бесконечное число решений, входящих в q_0 с направлением p_i из области D' . Существуют такие локальные координаты с началом в q_0 , в которых сингулярная кривая Γ совпадает с осью $x = 0$ и все решения, о которых шла речь выше, имеют одну из двух возможных форм:

$$y = F(x, c|x|^\lambda), \quad \text{если } \lambda \notin \mathbb{N}, \quad (18)$$

$$y = F(x, x^n(c + \varepsilon \ln |x|)), \quad \text{если } \lambda = n \in \mathbb{N}, \quad (19)$$

где F — гладкая функция двух переменных, число ε равно 0 или 1, $c = \text{const}$.

3. В случае, если уравнение (4), (5) аналитическое, во всех утверждениях можно заменить C^∞ на C^ω — аналитичность. Функция F также аналитическая, и формулы (18), (19) определяют решения в виде рядов Ньютона–Пуизе.

Замечание 3. В аналитическом случае представления (18), (19) можно получить из более общих результатов работ [16, 17].

Теорема 4 дает описание всех решений уравнения (4), (5), входящих в его типичные особые точки. Если многочлен $M(q_0, p)$ имеет три вещественных корня p_i , $i=0, 1, 2$, все три величины $\lambda(q_0, p_i)$ не могут быть одного знака, причем допустимые

⁴Согласно общепринятой терминологии, особыми точками векторного поля (и соответствующего поля направлений) мы будем называть его положения равновесия.

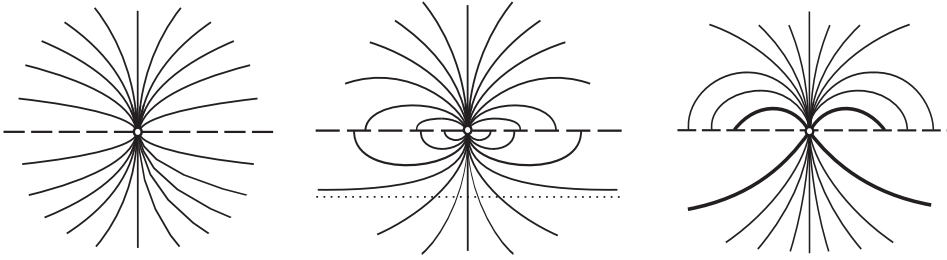


Рис. 2. Семейства геодезических C_1 (слева и в центре) и C_3 (справа). Γ изображена длинной прерывистой линией. Пунктирная линия – геодезическая, не входящая в q_0 . В случае C_3 (справа) геодезические с направлениями p_1, p_2 изображены жирными линиями.

направления с одинаковыми знаками $\lambda(q_0, p_i)$ разделены между собой допустимым направлением с противоположным знаком $\lambda(q_0, p_i)$ и кривой Γ . Таким образом, для каждой типичной особой точки q_0 существует четыре (с точностью до перестановки p_i) возможных случая, см. табл. 1. На рисунках 2, 3 представлены соответствующие примеры.

случай	доп. направления	знаки $\lambda(q_0, p_i)$
C_1	p_0	$\lambda(q_0, p_0) > 0$
C_3	p_0, p_1, p_2	$\lambda(q_0, p_0) > 0$ и $\lambda(q_0, p_{1,2}) < 0$
C_1^*	p_0	$\lambda(q_0, p_0) < 0$
C_3^*	p_0, p_1, p_2	$\lambda(q_0, p_0) < 0$ и $\lambda(q_0, p_{1,2}) > 0$

Таблица 1. Четыре конфигурации семейств решений.

Пример 4. Если уравнение (4), (5) является уравнением геодезических в метрике (6) переменной сигнатуры, реализуются только случаи C_1 и C_3 . В каждой точке q_0 , где коэффициенты метрики не обращаются в нуль одновременно, существует так называемое *изотропное* направление, на котором квадратичная форма (6) обращается в нуль. Это – допустимое направление p_0 со значением $\lambda(q_0, p_0) = \frac{1}{2}$. Помимо p_0 , еще может быть два *неизотропных* допустимых направления $p_{1,2}$, для них $\lambda(q_0, p_i) = -1$. На рис. 2 (взято из [10]) представлены три семейства геодезических, входящих в особую точку.

Пример 5. Рассмотрим решения уравнения

$$x \frac{dp}{dx} = \alpha p(p^2 + \beta), \quad \alpha \neq 0, \quad \beta = \pm 1, \quad (20)$$

входящие в начало координат. При $\beta = 1$ кубический многочлен $M(p)$ имеет единственный вещественный корень $p_0 = 0$, который дает единственное допустимое направление, трансверсальное сингулярной кривой $\Gamma = \{x = 0\}$. При $\beta = -1$ многочлен $M(p)$ имеет три корня: $p_0 = 0$ и $p_{1,2} = \pm 1$, которые дают три допустимых направления, все трансверсальные Γ . Дальнейший разбор всевозможных случаев приведен

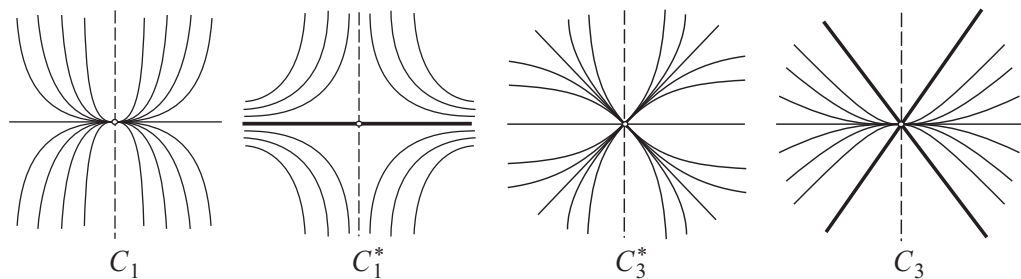


Рис. 3. Решения уравнения (20), входящие в начало координат. Слева направо: C_1 ($\alpha > 0$, $\beta = 1$), C_1^* ($\alpha < 0$, $\beta = 1$), C_3^* ($\alpha > 0$, $\beta = -1$), C_3 ($\alpha < 0$, $\beta = -1$). Жирными линиями обозначены единственные решения, входящие с данным направлением.

в таблице 2 (см. также рис. 3). Уравнение (20) нетрудно проинтегрировать и убедиться, что бесконечные семейства решений, входящих в начало координат с общим касательным направлением, имеют вид (18) или (19) с $\varepsilon = 0$. В следующем примере мы столкнемся с семейством (19), которое содержит логарифм.

	доп. направления	$\lambda(q_0, p_0)$	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
$\beta = +1$	$p_0 = 0$	$\lambda(q_0, p_0) = \alpha$	C_1	C_1^*
$\beta = -1$	$p_0 = 0$ $p_{1,2} = \pm 1$	$\lambda(q_0, p_0) = -\alpha$ $\lambda(q_0, p_{1,2}) = 2\alpha$	C_3^*	C_3

Таблица 2. Данные для примера 5.

Пример 6. Рассмотрим решения уравнения

$$x \frac{dp}{dx} = \alpha p + f(x), \quad f(x) = \sum_{i \geq 1} f_i x^i, \quad \alpha \neq 0, \quad (21)$$

входящие в начало координат 0 , где $f(x)$ — аналитическая функция. С учетом замечаний 1, 2 заключаем, что допустимыми направлениями являются $p_0 = 0$ (со значением $\lambda = \alpha$) и $p_1 = p_2 = \infty$. Теорема 4 применима для исследования решений с направлением $p_0 = 0$ и утверждает, что при $\alpha < 0$ существует единственное решение, входящее в 0 с направлением $p_0 = 0$, а при $\alpha > 0$ — бесконечное семейство таких решений.

Это можно проверить непосредственно: уравнение (21) линейно и легко решается методом вариации. Ограничившись для простоты областью $x \geq 0$, выпишем производную общего решения:

$$p = \sum_{i \geq 1} g_i x^i + c x^\alpha, \quad g_i = \frac{f_i}{i - \alpha}, \quad \text{если } \alpha \notin \mathbb{N} \quad (22)$$

$$p = \sum_{i \geq 1, i \neq n} g_i x^i + x^n (c + f_n \ln x), \quad \text{если } \alpha = n \in \mathbb{N}, \quad (23)$$

где $c = \text{const}$. Отсюда видно, что если $\alpha < 0$, то существует лишь одно решение с касательным направлением $p_0 = 0$, оно получается интегрированием (22) с константой $c = 0$, при $c \neq 0$ решения имеют направление $p = \infty$ в 0.

Если $\alpha > 0$, то решений, проходящих через 0 с касательным направлением $p_0 = 0$, бесконечно много. Они получаются интегрированием формулы (22), если α не целое, и формулы (23), если α целое. В первом случае получается семейство вида (18), а во втором – семейство вида (19) с $\varepsilon = f_n$. Если $f_n \neq 0$, то с помощью линейной замены x можно добиться равенства $\varepsilon = 1$.

2.2. Векторные поля с неизолированными особыми точками

Пусть $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ – два гладких векторных поля в \mathbb{R}^n и g_1^t, g_2^t – их фазовые потоки соответственно. \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, который *сопрягает* их фазовые потоки, то есть $f \circ g_1^t \equiv g_2^t \circ f$ для всех t . Поля \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 называются *C^k -гладко* (или *аналитически эквивалентными*), если сопрягающий гомеоморфизм f является C^k -гладким (соответственно аналитическим) диффеоморфизмом. Показатель k – натуральное число (*конечно-гладкая эквивалентность*) или ∞ (*бесконечно-гладкая эквивалентность*), для аналитической эквивалентности используется обозначение C^ω .

Поля \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 называются *орбитально эквивалентными* (в одной из указанных выше категорий), если существует гомеоморфизм соответствующего класса, который переводит друг в друга интегральные кривые этих полей, но не обязательно сопрягает сами потоки. Другими словами, поля \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 топологически или гладко или аналитически *орбитально эквивалентны*, если существует такая не обращающаяся в нуль скалярная функция φ , что векторные поля \mathbf{V}_1 и $\varphi \mathbf{V}_2$ являются эквивалентными в соответствующей категории.⁵

Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *особой точкой* векторного поля \mathbf{V} , если $\mathbf{V}(x_0) = 0$, то есть x_0 – неподвижная точка фазового потока $g^t(c)$ поля \mathbf{V} . Классификации ростков векторных полей в особых точках относительно эквивалентности в той или иной категории посвящено много работ начиная с Пуанкаре. Для наших целей понадобятся результаты, относящиеся к полям специального типа, компоненты которых связаны функциональными соотношениями, вследствие чего их особые точки не изолированы, а образуют подмногообразие коразмерности 2.

В пространстве \mathbb{R}^{2+m} , $m \geq 1$, рассмотрим росток векторного поля \mathbf{V} , компоненты которого принадлежат идеалу I (в кольце гладких функций), порожденному двумя из них. В локальных координатах такое поле имеет вид

$$\dot{u} = U, \quad \dot{v} = V, \quad \dot{w}_j = \alpha_j U + \beta_j V, \quad j = 1, \dots, m, \quad (24)$$

где U, V и α_j, β_j – произвольные гладкие функции переменных u, v, w_1, \dots, w_m . Обозначим через W^c множество особых точек поля (24), которое задается двумя уравнениями $U = V = 0$ (смысл этого обозначения станет ясен ниже). Спектр линейной

⁵Это определение отличается от общепринятого (см., например, [29]), в котором требуется сохранение направления движения, то есть функция φ должна быть положительной.

части поля (24) в каждой точке $T \in W^c$ равен

$$\sigma(T) = (\lambda_1(T), \lambda_2(T), 0, \dots, 0),$$

где собственные значения $\lambda_{1,2}(T)$ непрерывно зависят от T . Поле (14) имеет вид (24), идеал I в данном случае порожден образующими Δ, M , множество W^c задается уравнениями (15), и спектр $\sigma(T)$ имеет вид (16).

Пусть T_0 — особая точка поля (24), то есть $U(T_0) = V(T_0) = 0$. Далее мы будем рассматривать лишь случаи, когда оба $\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(T_0)$ вещественные и не равны нулю. Тогда в окрестности T_0 множество W^c представляет собой центральное многообразие поля (24), и Принцип сведения (см. [29, 30]) дает следующий результат:

Лемма 1. *Росток векторного поля (24) в точке T_0 топологически орбитально эквивалентен ростку*

$$\dot{\xi} = \xi, \quad \dot{\eta} = \pm \eta, \quad \dot{\zeta}_j = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (25)$$

где знак \pm совпадает со знаком величины $\lambda = \lambda_2/\lambda_1$.

Лемма 1 показывает, что росток поля (24) имеет инвариантное слоение, которое может быть превращено в семейство плоскостей

$$\Sigma_c = \{\zeta_j = c_j, \quad c_j = \text{const}, \quad j = 1, \dots, m\} \quad (26)$$

с помощью гомеоморфизма. Это приводит к предположению о существовании инвариантного слоения, которое может быть приведено к форме (26) с помощью диффеоморфизма конечной или бесконечной гладкости, что равносильно существованию m независимых первых интегралов поля (24). Выбирая эти интегралы в качестве новых координат ζ_1, \dots, ζ_m , мы приведем поле (24) к виду

$$\dot{\xi} = U, \quad \dot{\eta} = V, \quad \dot{\zeta}_j = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (27)$$

Препятствием к этому является наличие резонансов

$$q\lambda_1 + p\lambda_2 = 0, \quad p, q \in \mathbb{Z}_+, \quad p + q \geq 1, \quad (28)$$

число $p + q$ называется *порядком* резонанса (28). Следуя работе [31], для каждого целого $k \geq 1$ определим число

$$N(k) = 2[(2k + 1)m] + 2, \quad m = \max\{|\lambda|, |\lambda|^{-1}\}, \quad (29)$$

где $\lambda = \lambda_2/\lambda_1$, квадратные скобки означают целую часть числа. Если $\lambda > 0$, то пара $\lambda_{1,2}$ не имеет резонансов никаких порядков. То же верно и в случае, когда число $\lambda < 0$ иррациональное. Если $\lambda < 0$ рациональное, то $\lambda = -q/p$, где p, q — взаимно простые натуральные числа, и пара $\lambda_{1,2}$ имеет серию резонансов (29) всех порядков, кратных $p + q$.

Лемма 2. *Если пара $\lambda_{1,2}$ не имеет резонансов (28) до порядка $N(k)$ включительно, то существует C^k -диффеоморфизм, приводящий росток поля (24) к (27). Если $\lambda > 0$, то росток поля (24) можно привести к (27) с помощью C^∞ -диффеоморфизма. Если же число λ отрицательное и иррациональное, то росток поля (24) можно привести к форме (27) с помощью C^k -диффеоморфизма с любым конечным k , но, вообще говоря, невозможно с $k = \infty$.*

Доказательство. Лемма 2 содержит утверждения, доказанные в предыдущих работах или легко вытекающие из них, поэтому мы ограничимся ссылками с краткими комментариями. Приведение ростка поля (24) к форме (27) с помощью диффеоморфизма конечной гладкости доказано в [25, теорема 2], оно основано на более общих результатах работы [31], содержащей оценку (29).

Из отсутствия резонансов (28) всех порядков следует, что с помощью C^∞ -диффеоморфизма росток (24) приводится к сумме поля (27) и бесконечно плоской невязки. Стандартным способом, позволяющим избавиться от этой невязки, является гомотопический метод, сводящий вопрос к существованию решения некоторого дифференциального уравнения, называемого *гомологическим* (см. [36]). Для разрешения гомологического уравнения требуется, чтобы резонансов (28) не было не только в самой рассматриваемой точке, но и во всех особых точках из некоторой ее окрестности. Последнее гарантируется условием $\lambda > 0$. Если же число $\lambda < 0$ иррациональное, то такой окрестности, вообще говоря, не существует (за исключением того редкого случая, когда число λ во всех особых точках постоянно), и C^∞ -эквивалентность форме (27) не имеет места (см. [28]). \square

Замечание 4. Если пара $\lambda_{1,2}$ имеет резонанс (28) конечного порядка, нормальная форма поля (24) более сложная. В частности, число нулевых компонент в ней существенно зависит от класса гладкости сопрягающего морфизма. В работе [25] показано, что (при дополнительных условиях общности) росток такого поля приводится к виду, содержащему три ненулевые и $m - 1$ нулевые компоненты, посредством C^k -диффеоморфизма с любым $k < \infty$, но получить m нулевых компонент таким образом, вообще говоря, невозможно.

Приведем пример: *векторные поля Руссари* — поля вида (24), имеющие один и тот же резонанс (28) во всех особых точках, см. [33–35]. При дополнительных условиях общности росток такого поля C^∞ -гладко орбитально эквивалентен

$$\dot{\xi} = p\xi, \quad \dot{\eta} = -q\eta, \quad \dot{\zeta}_1 = \xi^q \eta^p, \quad \dot{\zeta}_j = 0, \quad j = 2, \dots, m,$$

и при этом C^{k-1} -гладко ($k = \max\{p, q\}$) орбитально эквивалентен

$$\dot{\xi} = p\xi, \quad \dot{\eta} = -q\eta, \quad \dot{\zeta}_j = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

но не C^k -гладко эквивалентен никакому ростку вида (27), см. [35, теорема 5]. В частности, при $p = q = 1$ росток поля может быть приведен к виду (27) с помощью гомеоморфизма (лемма 1), но не с помощью диффеоморфизма.

Поле (27) будем называть предварительной нормальной формой, она допускает дальнейшее упрощение. Определим множество $\mathbb{N}^{-1} = \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$.

Лемма 3. *Если $\lambda > 0$, то росток поля (24) C^∞ -гладко эквивалентен одному из ростков в начале координат:*

$$\dot{\xi} = a_1(\zeta)\xi, \quad \dot{\eta} = a_2(\zeta)\eta, \quad \dot{\zeta}_j = 0, \quad \lambda \notin \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^{-1}, \quad (30)$$

$$\dot{\xi} = a_1(\zeta)\xi, \quad \dot{\eta} = a_2(\zeta)\eta + b_2(\zeta)\xi^n, \quad \dot{\zeta}_j = 0, \quad \lambda \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^{-1} \setminus \{1\}, \quad (31)$$

$$\dot{\xi} = a_1(\zeta)\xi + b_1(\zeta)\eta, \quad \dot{\eta} = a_2(\zeta)\eta + b_2(\zeta)\xi, \quad \dot{\zeta}_j = 0, \quad \lambda = 1. \quad (32)$$

Доказательство. Согласно лемме 2, нормальные формы (30)–(32) достаточно установить для полей вида (27), то есть семейств векторных полей на плоскости, зависящих от параметра $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$. Следовательно, мы имеем дело с обобщением нормальной формы Пуанкаре–Дюлака на случай семейств векторных полей, гладко зависящих от параметра. При сделанных предположениях между собственными значениями $\lambda_{1,2}$ могут быть лишь резонансы вида

$$\lambda_1 = n\lambda_2, \quad \lambda_2 = n\lambda_1, \quad n \geq 1, \quad (33)$$

которые препятствуют линеаризации роста поля (27) при значении параметра $\zeta = 0$ (см., например, [32]).

Если при $\zeta = 0$ нет резонансов (33), то при всех достаточно близких значениях ζ среди пар ненулевых собственных значений $\lambda_{1,2}$ также нет резонансов. Если при $\zeta = 0$ имеет место резонанс (33), то при достаточно близких значениях ζ среди пар ненулевых собственных значений $\lambda_{1,2}$ могут присутствовать только пары с тем же резонансом или вообще без резонансов. Поэтому при каждом значении ζ , близком к нулю, росток поля (27) приводится к одной и той же нормальной форме Пуанкаре–Дюлака (30)–(32) с помощью C^∞ -диффеоморфизма (ξ, η) -плоскости, см. [29].

Остается установить C^∞ -гладкую зависимость сопрягающего диффеоморфизма от параметра ζ . Заметим, что в случае, когда между $\lambda_{1,2}$ нет резонансов, этот факт установлен в [33, теорема 20]. Приведенное там доказательство можно обобщить на резонансный случай, однако проще воспользоваться результатами более поздних работ [31] и [36]. Согласно [31], росток поля (27) приводится к одной из нормальных форм (30)–(32) с помощью C^k -диффеоморфизма любой конечной гладкости k . Отсюда следует, что с помощью C^∞ -диффеоморфизма он приводится к такой же нормальной форме с точностью до прибавления бесконечно плоской невязки. Как и в случае леммы 2, для избавления от невязки воспользуемся гомотопическим методом, см. [36, разделы 1.1–1.6]. \square

2.3. Доказательство теоремы 4

Пусть $q_0 \in \Gamma$ — типичная особая точка уравнения (4), (5) и p_i — допустимое направление в q_0 , удовлетворяющее условиям теоремы 4. Тогда $T_0 = (q_0, p_i)$ — особая точка векторного поля (14), являющегося частным случаем (24). Результаты раздела 2.2 дают описание интегральных кривых поля (14), входящих в T_0 при неограниченном возрастании или убывании времени, и их π -проекции суть решения, о которых идет речь в теореме 4. Далее будем использовать обозначения $\lambda_i = \lambda_i(T_0)$ и $\lambda = \lambda_2(T_0)/\lambda_1(T_0)$.

2.3.1. Отрицательное λ

Росток поля (14) топологически орбитально эквивалентен (25) с $m = 1$ и знаком «минус» и, следовательно, имеет инвариантное слоение, гомеоморфное (26). Ограничение поля на каждый инвариантный слой — седло.

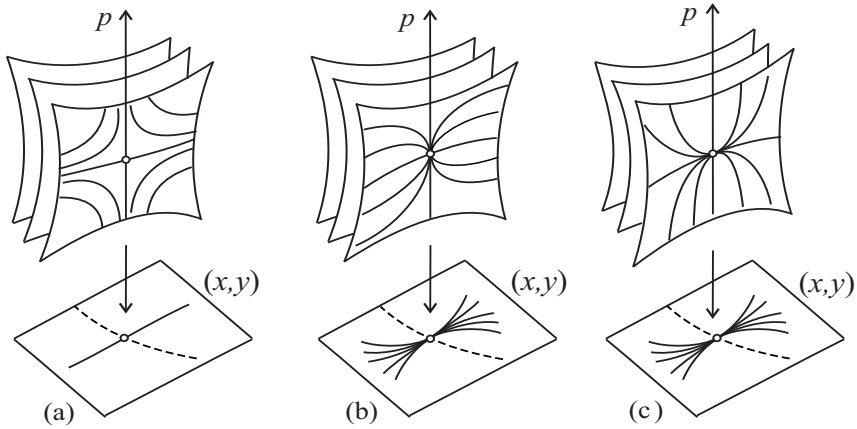


Рис. 4. Семейство интегральных кривых поля (14) на двумерном инвариантном слое и их π -проекции на плоскость. Слева направо: $\lambda < 0$ (a), $0 < \lambda < 1$ (b), $\lambda > 1$ (c). Сингулярная кривая Γ на (x, y) -плоскости изображена пунктирной линией.

Рассмотрим ограничение поля (14) на слой, проходящий через T_0 . Сепаратрисы W^s и W^u — одномерные устойчивое и неустойчивое многообразия поля (14), проходящие через T_0 , и никаких иных интегральных кривых, проходящих через T_0 , поле (14) не имеет. Пусть для определенности $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 < 0$. Направление ∂_p является собственным для λ_2 , поэтому W^s — вертикальная прямая $\pi^{-1}(q_0)$, и ее π -проекция есть сама точка q_0 . Но кривая W^u имеет невертикальное касательное направление в T_0 , и ее π -проекция — регулярная кривая на (x, y) -плоскости, проходящая через точку q_0 с направлением p_i . См. рис. 4 (a). Это и есть то единственное решение уравнения (4), (5), о котором идет речь в первом утверждении теоремы 4. Как известно (см., например, [29, разд. 4.1]), W^s и W^u — кривые того же класса (C^∞ или C^ω), что и поле (14), и к тому же классу относится кривая $\pi(W^u)$.

2.3.2. Положительное λ

По лемме 3 росток поля (14) C^∞ -гладко орбитально эквивалентен одной из трех нормальных форм (30)–(32) с $m = 1$. Инвариантное слоение $\zeta_j = \text{const}$ в исходных координатах имеет вид

$$y = Y(x, p, c), \quad c = \text{const}, \quad (34)$$

где Y — гладкая функция. Без ограничения общности будем считать, что слой $y = Y(x, p, 0)$ проходит через точку T_0 , которая является началом координат пространства J^1 . Тогда решения уравнения (4), (5), о которых идет речь во втором утверждении теоремы 4, являются π -проекциями интегральных кривых поля (14), лежащих на инвариантном слое $y = Y(x, p, 0)$. Ограничение поля (14) на этот слой — невырожденный узел, если $\lambda \neq 1$, или вырожденный/дискритический узел, если $\lambda = 1$. Во всех этих случаях получается бесконечное семейство решений, о котором идет речь во втором утверждении теоремы 4. При $\lambda \neq 1$ фазовые портреты ограничения по-

ля (14) на инвариантные слои и их π -проекции на (x, y) -плоскость изображены на рис. 4 (b, c).

Чтобы привести семейство решений к виду (18) или (19), выберем на плоскости (x, y) локальные координаты с началом в q_0 таким образом, чтобы кривая Γ совпала с осью $x=0$ и направление p_i стало $p_i=0$. Тогда, умножая поле (14) на подходящую функцию, будем считать, что это поле имеет вид

$$\dot{x} = \lambda_1 x, \quad \dot{y} = px, \quad \dot{p} = M(x, y, p), \quad (35)$$

где многочлен $M(0, 0, p)$ обращается в нуль при $p=0$ и $M_p(0, 0, 0) = \lambda_2$. Тогда ограничение поля (35) на слой $y=Y(x, p, 0)$ имеет вид

$$\dot{x} = \lambda_1 x, \quad \dot{p} = M(x, Y(x, p, 0), p) = pA(x, p) + xB(x), \quad (36)$$

где A, B — гладкие функции, $A(0) = \lambda_2$.

Рассмотрим случай $\lambda \notin \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^{-1}$. По лемме 3 (формула (30)), росток поля (36) — нерезонансный узел, который C^∞ -гладко эквивалентен полю

$$\dot{\xi} = \lambda_1 \xi, \quad \dot{\eta} = \lambda_2 \eta, \quad (37)$$

имеющему семейство интегральных кривых $\{\eta = \alpha|\xi|^\lambda\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и отдельную интегральную кривую $\{\xi=0\}$.

Диффеоморфизм $f_0: (x, p) \mapsto (\xi, \eta)$, сопрягающий поля (36) и (37), не единственный. Так как первые компоненты полей (36) и (37) с точностью до обозначений переменных совпадают, можно выбрать f_0 сохраняющим координату $x = \xi$. После этого линейная часть f_0 определяется однозначно. С учетом сказанного и леммы Адамара сопрягающий диффеоморфизм f_0 может быть выбран в виде

$$x = \xi, \quad p = \eta\varphi(\xi, \eta) + \xi\psi(\xi, \eta), \quad (38)$$

с гладкими функциями φ, ψ , $\varphi(0)=1$, $\psi(0)=B(0)/(\lambda_1 - \lambda_2)$. Тогда отображение $\pi \circ f_0^{-1}$ переводит интегральные кривые $\eta = \alpha|\xi|^\lambda$ поля (37) в кривые

$$y = F(\xi, \alpha|\xi|^\lambda) = F(x, c|x|^\lambda), \quad \alpha = \text{const}, \quad (39)$$

где $F(\xi, \eta) = Y(\xi, \eta\varphi(\xi, \eta) + \xi\psi(\xi, \eta), 0)$ — гладкая функция. Формула (39) задает семейство решений уравнения (4), (5), о котором идет речь в теореме. Наконец заметим, что отображение $\pi \circ f_0^{-1}$ переводит интегральную кривую $\{\xi=0\}$ поля (37) в начало координат (x, y) -плоскости, что не отвечает никакому решению уравнения (рис. 4 b, c).

Теперь рассмотрим случай, когда $\lambda = n \geq 2$ — целое. По лемме 3 (формула (31)), росток поля (36) C^∞ -гладко эквивалентен полю

$$\dot{\xi} = \lambda_1 \xi, \quad \dot{\eta} = \lambda_2 \eta + \beta \xi^n, \quad (40)$$

которое имеет бесконечное семейство интегральных кривых

$$\eta = \xi^n(\alpha + \varepsilon \ln |\xi|), \quad \alpha = \text{const}, \quad (41)$$

и отдельную интегральную кривую $\{\xi=0\}$. Здесь $\varepsilon=\beta/\lambda_1$ — произвольное число, которое может быть сведено к 0 или 1 путем изменения масштаба осей координат. Как и раньше, сопрягающий диффеоморфизм $f_0:(x,p)\mapsto(\xi,\eta)$ может быть выбран в виде (38). Отображение $\pi\circ f_0^{-1}$ переводит семейство кривых (41) в семейство решений уравнения (4), (5), имеющее вид

$$y = F(\xi, \xi^n(c + \varepsilon \ln |\xi|)) = F(x, x^n(c + \varepsilon \ln |x|)), \quad c = \text{const}, \quad (42)$$

где функция F задается той же формулой, что и выше, и переводит интегральную кривую $\{\xi=0\}$ в начало координат (x,y) -плоскости.

Рассмотрим случай, когда $\lambda=1/n$, где $n\geq 2$ — целое. Тогда росток поля (36) можно привести к форме

$$\dot{\xi} = \lambda_1 \xi + \beta \eta^n, \quad \dot{\eta} = \lambda_2 \eta. \quad (43)$$

с помощью сопрягающего диффеоморфизма $f_0:(x,p)\mapsto(\xi,\eta)$ вида (38). Поле (43) имеет бесконечное семейство интегральных кривых

$$\xi = \eta^n(\alpha + \varepsilon \ln |\eta|), \quad \alpha = \text{const}, \quad \varepsilon = \beta/\lambda_2, \quad (44)$$

с главным собственным направлением в начале координат и одну интегральную кривую $\{\eta=0\}$ с другим собственным направлением. Так как направление ∂_p является собственным для λ_2 , семейство (44) соответствует семейству интегральных кривых поля (14), проходящих через T_0 с направлением ∂_p (рис. 4 б).

Покажем, что в нормальной форме (44) коэффициент $\varepsilon=0$. Действительно, все кривые (44) относятся к классу C^∞ , если $\varepsilon=0$, либо к классу C^{n-1} (но не C^n в нуле), если $\varepsilon\neq 0$. Следовательно, условие $\varepsilon=0$ равносильно тому, что семейство (44) содержит хотя бы одну C^∞ -гладкую кривую. Легко видеть, что такая кривая существует: в исходных координатах пространства J^1 ей соответствует интегральная кривая поля (35), которая является вертикальной прямой $\pi^{-1}(q_0)$. Таким образом, $\varepsilon=\beta=0$, поле (43) совпадает с (37), и это дает формулу (39) для семейства решений уравнения (4), (5).

По лемме 3 (формула (32)), в случае $\lambda=1$ росток поля (36) C^∞ -гладко эквивалентен

$$\dot{\xi} = \lambda_1 \xi + b_1 \eta, \quad \dot{\eta} = \lambda_2 \eta + b_2 \xi, \quad (45)$$

где числа $b_{1,2}$, вообще говоря, не равны нулю. Однако с помощью линейной замены ξ, η можно привести линейное поле (45) к жордановой форме. После этого мы получаем семейство решений уравнения (4), (5) в виде (42) с $n=1$, где $\varepsilon=0$ (если $b_1=b_2=0$) или $\varepsilon=1$ (в противном случае).

Если уравнение (4), (5) аналитическое, то в случае $\lambda>0$ все сопрягающие диффеоморфизмы также можно выбрать аналитическими, используя результаты работ [16, 17, 24]. Тогда формулы (18), (19) представляют собой решения уравнения в виде рядов Ньютона–Пуанзе.

Список литературы

- [1] А. Ф. Филиппов, “Единственность решения системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных”, *Дифференц. уравн.*, **41:1** (2005), 87–92.

- [2] R. Lamour, R. Marz, C. Tischendorf, *Differential-algebraic equations. A projector based analysis*, Springer, Berlin, 2013.
- [3] J. Sotomayor, M. Zhitomirskii, “Impasse singularities of differential systems of the form $A(x)x' = F(x)$ ”, *J. Differ. Equations*, **169**:2 (2001), 567–587.
- [4] R. Ignat, L. Nguyen, V. Slastikov, A. Zarnescu, “Uniqueness results for an ODE related to a generalized Ginzburg-Landau model for liquid crystals”, *SIAM J. Math. Anal.*, **46** (2014), 3390–3425.
- [5] L. V. Lokutsievskiy, M. I. Zelikin, “The analytical solution of Newton’s aerodynamic problem in the class of bodies with vertical plane of symmetry and developable side boundary”, *ESAIM, Control Optim. Calc. Var.*, **26**:paper 15 (2020), 36 p.
- [6] А. В. Аминова, Н. А.-М. Аминов, “Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка”, *Матем. сб.*, **197**:7 (2006), 3–28.
- [7] V. A. Yumaguzhin, “Differential invariants of second order ODEs. I”, *Acta Appl. Math.*, **109**:1 (2010), 283–313.
- [8] А. О. Ремизов, “Геодезические на двумерных поверхностях с псевдоримановой метрикой: особенности смены сигнатуры”, *Матем. сб.*, **200**:3 (2009), 75–94.
- [9] А. О. Ремизов, “О геодезических в метриках с особенностями типа Клейна”, *УМН*, **65**:1 (2010), 187–188.
- [10] А. О. Remizov, “On the local and global properties of geodesics in pseudo-Riemannian metrics”, *Differ. Geom. Appl.*, **39** (2015), 36–58.
- [11] А. О. Remizov, F. Tari, “Singularities of the geodesic flow on surfaces with pseudo-Riemannian metrics”, *Geom. Dedicata*, **185**:1 (2016), 131–153.
- [12] N. G. Pavlova, A. O. Remizov, “A brief survey on singularities of geodesic flows in smooth signature changing metrics on 2-surfaces”, *Singularities and foliations. Geometry, topology and applications*, Springer Proc. Math. Stat.. V.222, Springer, Cham, 2018, 135–155.
- [13] Н. Г. Павлова, А. О. Ремизов, “Завершение классификации типичных особенностей геодезических потоков в метриках двух классов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **83**:1 (2019), 119–139.
- [14] A. Honda, K. Saji, K. Teramoto, “Mixed type surfaces with bounded Gaussian curvature in three-dimensional Lorentzian manifolds”, *Adv. Math.*, **365**:Article ID 107036 (2020), 46 p.
- [15] И. А. Богаевский, Д. В. Туницкий, “Особенности многозначных решений квазилинейных гиперболических систем”, *Труды МИАН*, **308** (2020), 76–87.
- [16] А. Д. Брюно, *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1979.
- [17] А. Д. Брюно, “Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения”, *УМН*, **59**:3 (2004), 31–80.
- [18] А. А. Давыдов, “Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки”, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:2 (1985), 1–10.
- [19] A. A. Davydov, G. Ishikawa, S. Izumiya, W.-Z. Sun, “Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane”, *Japanese J. Math. 3rd Ser.*, **3**:1 (2008), 93–119.
- [20] S. Izumiya, W.-Z. Sun, “Singularities of solution surfaces for quasilinear first-order partial differential equations”, *Geom. Dedicata*, **64**:3 (1997), 331–341.
- [21] S. Izumiya, F. Tari, “Self-adjoint operators on surfaces with singular metrics”, *JDCS*, **16**:3 (2010), 329–353.
- [22] M. Lange-Hegermann, D. Robertz, W. M. Seiler, M. Seiss, “Singularities of algebraic dif-

- ferential equations”, *Adv. Appl. Math.*, **131**:Article ID 102266 (2021), 56 p.
- [23] J. Liang, “A singular initial value problem and self-similar solutions of a nonlinear dissipative wave equation”, *J. Differ. Equations*, **246**:2 (2009), 819–844.
- [24] L. Ortiz-Bobadilla, E. Rosales-González, S. M. Voronin, “Analytic classification of foliations induced by germs of holomorphic vector fields in $(\mathbb{C}^n, 0)$ with non-isolated singularities”, *JDCS*, **25**:3 (2019), 491–516.
- [25] A. O. Remizov, “Multidimensional Poincaré construction and singularities of lifted fields for implicit differential equations”, *J. Math. Sci.*, **151**:6 (2008), 3561–3602.
- [26] A. O. Remizov, “Geodesics in generalized Finsler spaces: singularities in dimension two”, *J. Singul.*, **14** (2016), 172–193.
- [27] W. M. Seiler, M. Seiss, “Singular initial value problems for scalar quasi-linear ordinary differential equations”, *J. Differ. Equations*, **281** (2021), 258–288.
- [28] R. Ghezzi, A. O. Remizov, “On a class of vector fields with discontinuities of divide-by-zero type and its applications to geodesics in singular metrics”, *JDCS*, **18**:1 (2012), 135–158.
- [29] В. И. Арнольд, Ю. С. Ильяшенко, “Обыкновенные дифференциальные уравнения.”, Итоги науки и техники. Современ. пробл. мат. Фундам. направл., **1**, ВИНТИ, М., 1985, 7–140.
- [30] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds*, Lect. Notes Math., **583**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [31] В. С. Самовол, “Эквивалентность систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки”, *Тр. ММО*, **44** (1982), 213–234.
- [32] В. С. Самовол, “Критерий C^1 -гладкой линеаризации автономной системы в окрестности невырожденной особой точки”, *Матем. заметки*, **49**:3 (1991), 91–96.
- [33] R. Roussarie, “Modèles locaux de champs et de formes”, *Asterisque*, **30** (1975), 1–181.
- [34] Н. Г. Павлова, А. О. Ремизов, “Гиперболические поля Руссари с вырожденной квадратичной частью”, *УМН*, **76**:2 (2021), 183–184.
- [35] N. G. Pavlova, A. O. Remizov, “Smooth local normal forms of hyperbolic Roussarie vector fields”, *Moscow Math. J.*, **21**:2 (2021), 413–426.
- [36] Ю. С. Ильяшенко, С. Ю. Яковенко, “Конечно-гладкие нормальные формы локальных семейств диффеоморфизмов и векторных полей”, *УМН*, **46**:1 (1991), 3–39.

Поступила в редакцию
18 июля 2022 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (госзадание 075-00337-20-03, проект 0714-2020-0005) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 20-01-00610).

*Remizov A. O.*¹ Singularities of quasi-linear differential equations. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2023. V. 23. No 1. P. 85–105.

¹ Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russia

ABSTRACT

We study solutions of quasi-linear ordinary differential equations of the second order at their singular points, where the coefficient of the second-order derivative vanishes. Either solutions entering a singular point with definite tangential direction (proper solutions) or those without definite tangential direction (oscillating solutions) are considered. It is shown that oscillating solutions generically do not exist, and proper solutions enter a singular point in strictly definite tangential directions. A local representation for proper solutions in a form similar to Newton–Puiseux series is obtained.

Key words: *singular points, normal forms, resonances, invariant manifolds, oscillating solutions.*