

УДК 517.95

MSC2020 35Q79, 35Q93

© М. О. Авдеева¹, Ю. Г. Богоутдинова¹, К. А. Чехонин²

Численное моделирование цунами оползневого типа

В статье предложены математические модели и устойчивые численные алгоритмы решения задач о деформировании и течении насыщенных пористых материалов. Этот класс задач возникает во многих инженерных и прикладных областях от разработки месторождений до биомеханики. Особый интерес представляют собой задачи об обрушении берегов рек, озер и заливов морей в связи с их катастрофическими возможными последствиями, например, перекрытием русла реки, возникновением цунами на водной поверхности и т.д. Для математического описания напряженно-деформированного состояния насыщенных пористых сред используется теория консолидации Био (Biot), дополненная кинетикой накопления повреждений среды и условиями текучести Друккера–Прагера (Drucker–Prager). После образования магистральной поверхности текучести (или магистральной трещины) в береговом склоне в момент начала обрушения его реологические свойства представляются в виде модели Бингама с математическим описанием на основе уравнений Навье–Стокса с эффективной вязкостью. Характерной гидродинамической особенностью рассматриваемой задачи является наличие свободной поверхности. Численное моделирование рассматриваемых задач производится методом смешанных конечных элементов. В статье исследуется эволюция свободной поверхности и возникновение цунами, генерируемое оползнем.

Ключевые слова: оползень, метод конечных элементов, теория Био, водонасыщенный грунт, речное цунами.

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202312>

Введение

Оползни — опасное природное явление, довольно часто встречающееся в различных регионах мира. В последние годы произошло несколько глобальных оползней на Дальнем Востоке и на берегах водохранилища “Три ущелья” (Санься) в Китае.

¹Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680038, г. Хабаровск, ул. Серышева, 60, оф. 312.

²Вычислительный центр ДВО РАН, 680063, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65.

Электронная почта: avdeeva@iam.dvo.ru (М. О. Авдеева), avdeeva@iam.dvo.ru (Ю. Г. Богоутдинова), lex7861@rambler.ru (К. А. Чехонин).

Самые крупные оползни произошли в долинах рек Зея в 1985 г. и Гейзерная в 2007 г. 11 декабря 2018 г. крупный оползень сошел в Хабаровском крае в водохранилище Бурейской ГЭС. Он образовался на крутом левом склоне речной долины р. Бурей напротив устья р. Средний Сандар, 20 км выше места впадения в Бурею большого левого притока — р. Тырма. Координаты центральной части сдвига $50^{\circ}33'13''$ с. ш. и $131^{\circ}28'22''$ в. д. Подобные события вызывают большой интерес у специалистов, так как каждое из них имеет свои особенности. Математическое моделирование помогает выявить множество факторов и механизмов образования оползней и их последствий, а также улучшить прогнозируемость этих опасных природных явлений.

Механика полностью насыщенных пористых сред актуальна для многих инженерных приложений. Её фундаментальным аспектом является описание взаимодействий между твердой и жидкой средами. Одной из наиболее успешных была модель Био [1], в которой принята концепция эффективных напряжений К. Терцаги. Уравнения Био допускают несколько вариантов выбора используемых переменных. Для численного решения с использованием метода конечных элементов в работах [2–4] использовались разные наборы переменных: $\mathbf{u} - w - p_f$, $\mathbf{u} - \mathbf{U}$ или $\mathbf{u} - \mathbf{U} - p_f$. Наиболее популярно решение рассматриваемой задачи в переменных $\mathbf{u} - p_f$, которое справедливо при ускорении жидкости значительно меньше, чем ускорение пористой среды. Переменные \mathbf{u} и \mathbf{U} представляют собой, соответственно, векторы перемещения пористой среды и жидкой фазы, w — относительное перемещение между фазами и p_f — поровое давление жидкости. За последнее столетие было проведено много исследований с целью предотвратить последствия оползней, которые могут нанести значительный ущерб и привести к гибели людей. Поставленный в лабораторных условиях модельный эксперимент может быть эффективен для изучения и анализа активности оползней, но в каждом конкретном случае он требует значительных временных затрат. Альтернативным способом исследования является проведение вычислительного эксперимента эволюции цунами оползневого типа.

Статья состоит из трех разделов, описывающих начальный этап формирования оползня с накоплением повреждений в береговом склоне, течение массы горных пород по склону и их взаимодействие с течением водоема. Необходимые исходные данные для моделирования берутся из [6, 7]. Для численного решения используется смешанный метод конечных элементов [4] с лагранжевым описанием деформирования и течения среды, позволяющий естественным образом моделировать процесс обрушения. При этом построенные функции аппроксимации в текущей конфигурации легко допускают большие деформации и разрушение пород берегового склона. Это позволяет естественным образом отслеживать области контакта оползня с водоемом.

1. Насыщенный деформируемый грунт

На начальном этапе процесс деформации берегового склона описывается с использованием теории Био [1–3, 5, 7] для насыщенных деформируемых пористых сред в виде двухфазной насыщенной среды, в которой учитывается эффект взаимодействия твердой и жидкой фаз. Поскольку рассматриваются только события с низкой или средней скоростью деформаций, то относительным ускорением жидкости по отношению к твердому каркасу можно пренебречь. С учетом сделанных предположений основные уравнения в переменных $\mathbf{u} - p$ (вектор перемещения – давление) включают уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + \rho g_i = \rho \ddot{u}_i \quad \text{в } \Omega \quad (1)$$

и уравнение неразрывности среды

$$\alpha \dot{u}_{i,i} + \frac{\dot{P}^f}{M} + q_{i,i}^f = 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (2)$$

Здесь σ_{ij} — полное напряжение, ρg_i — сила тяжести, g_i — ускорение свободного падения, $\rho = (1-n)\rho^s + n\rho^f$ — плотность насыщенной пористой среды, ρ^s — плотность твердой фазы, ρ^f — плотность жидкости, n — пористость, u_i — компоненты вектора перемещений пористой среды, Ω — рассматриваемая расчетная область. Коэффициент Био определяется как $\alpha \equiv 1 - K/K^s$, где K — модуль объемного сжатия твердой и жидкой фаз, K^s и K^f — модули объемного сжатия твердой и жидкой фаз, P^f — поровое давление жидкости. Модуль сжимаемости Био M представляем в виде

$$\frac{1}{M} = \frac{\alpha - n}{K^s} + \frac{n}{K^f}.$$

Для описания течения жидкости через пористую среду используем закон Дарси

$$q_i^f = - \frac{k}{\mu^f} \left(P_{,i}^f - \rho^f g_i \right),$$

где μ^f — динамическая вязкость жидкости, k — проницаемость материала берегового склона.

Полный тензор напряжений σ_{ij} представляем в виде суммы тензора эффективных напряжений пористого тела $\bar{\sigma}_{ij}$ и давления поровой жидкости P^f

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \alpha P^f \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — тензорная единица.

Для описания пластического течения грунта берегового склона используем функцию Друкера – Прагера

$$f = \sqrt{2J_2} + BI_1 - k,$$

где J_2 — второй инвариант девиаторной части напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$; I_1 — первый инвариант $\bar{\sigma}_{ij}$, B и k — параметры материала, $\bar{\sigma}_{ij}$ — эффективный тензор напряжений. Параметры B и k зависят от когезии грунта c и угла внутреннего трения ϕ [7]

$$B = \frac{2\sqrt{6} \sin \phi}{3(3 - \sin \phi)}, \quad k = \frac{2\sqrt{6} c \cos \phi}{3 - \sin \phi}.$$

Используем неассоциированное правило течения материала берегового склона [7, 9] с представлением пластического потенциала в виде

$$g = \sqrt{2J_2} + \beta I_1 - \text{const},$$

где const — параметр согласования с экспериментом [9], а β является функцией угла дилатансии ψ

$$\beta = \frac{2\sqrt{6} \sin \psi}{3(3 - \sin \psi)}.$$

Для учета влияния уровня поврежденности d материала берегового склона тензор эффективных напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$ представляем в виде [9]

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}^{\text{dev}} (1 - d) + ((1 - d)\bar{\sigma}_{kk}^+ + \bar{\sigma}_{kk}^-) \delta_{ij}$$

где верхние индексы dev, + и – обозначают девиатор тензора напряжений, растягивающие и сжимающие напряжения. Параметр повреждений $0 \leq d \leq 1$ определяем из выражения

$$d = \frac{c_1(\eta - c_2)}{\eta(c_1 - c_2)}, \quad \eta \geq c_2,$$

где η – интенсивность деформаций (т.е. $\eta = \sqrt{\varepsilon_{ij}^{\text{dev}} \varepsilon_{ji}^{\text{dev}}}$). Параметр c_2 задает начало роста повреждений в материале (начальное условие $d=0$). Параметр c_1 соответствует состоянию разрушенного материала (т.е. $d=1$). Обводнение берегового склона, вызванное повышением уровня воды в водоеме и выпадением дождевых осадков месячной нормы в сутки, приводит к росту порового давления воды и повреждений каркаса породы с одновременным увеличением веса берегового склона.

Задачу решаем при следующих начальных и граничных условиях (1) и (2):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} n_j &= h_i & \text{на} & \Gamma_h \\ u_i &= u_i^g & \text{на} & \Gamma_g \\ -q_i^f n_i^f &= \nu_s^f & \text{на} & \Gamma_s \\ P^f &= P_r^f & \text{на} & \Gamma_r \\ u_i(\mathbf{x}, t=0) &= u_i^0(\mathbf{x}) & \text{в} & \Omega \\ \dot{u}_i(\mathbf{x}, t=0) &= \dot{u}_i^0(\mathbf{x}) & \text{в} & \Omega \\ P^f(\mathbf{x}, t=0) &= P_0^f(\mathbf{x}) & \text{в} & \Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь n_j и n_i^f – единичные векторы внешних нормалей к границам Γ_h и Γ_s , h_i – напряжение на Γ_h , u_i^g – компоненты вектора перемещения на Γ_g , ν_s^f – заданный приток жидкости на Γ_s , P_r^f – поровое давление жидкости на Γ_r . Γ является границей расчетной области Ω и удовлетворяет соотношениям $\Gamma_h \cup \Gamma_g = \Gamma$, $\Gamma_h \cap \Gamma_g = \emptyset$, $\Gamma_s \cup \Gamma_r = \Gamma$, and $\Gamma_s \cap \Gamma_r = \emptyset$. Начальные значения вектора перемещения и вектора скорости пористой среды обозначаем $u_i^0(\mathbf{x})$ и $\dot{u}_i^0(\mathbf{x})$ соответственно, $P_0^f(\mathbf{x})$ – начальное значение порового давления жидкости. Численное решение задачи производим методом смешанных конечных элементов [4]. Проекционно-сеточные уравнения задачи примут вид

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta u_{i,j}^h \bar{\sigma}_{ij}^h d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_{i,j}^h \alpha P^h d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i^h \rho \ddot{u}_i^h d\Omega &= \int_{\Gamma_k} \delta u_i^h h_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i^h b_i d\Omega, \\ \int_{\Gamma_k} \delta P^h \alpha \dot{u}_{i,i}^h d\Omega + \int_{\Omega} \delta P^h \frac{\dot{P}^h}{M} d\Omega + \int_{\Omega} \delta P_{,i}^h \frac{k}{\mu^w} P_{,i}^h d\Omega &= \int_{\Gamma_k} \delta P^h \nu_s^w d\Gamma + \int_{\Omega} \delta P_{,i}^h \frac{k}{\mu^w} b_i d\Omega, \end{aligned}$$

где верхний индекс h обозначает сеточную функцию, b_i – силу тяжести.

Верификацию численного алгоритма производим на примере задачи о напряженно-деформированном состоянии (НДС) колонны из насыщенного пористого материала, находящейся под заданной нагрузкой. Рассматриваемая задача имеет аналитическое решение [8]. Численное решение производим на сетке из 100 изопараметрических элементов второго порядка. Физико-механические свойства среды аналогичны параметрам, приведенным в работе [8]. Для сравнения алгоритмов численное интегрирование по времени производим по явной, модифицированной и неявной [4]

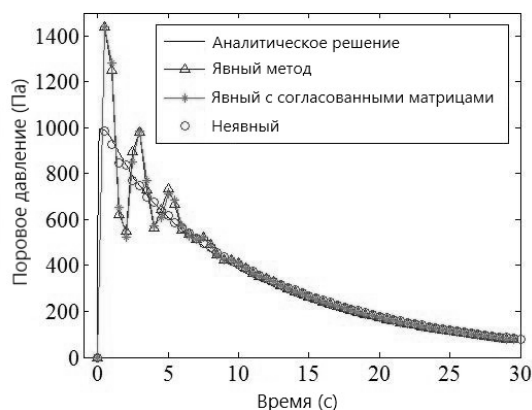


Рис. 1. Эволюция порового давления в колонне пористой насыщенной среды при численном решении МКЭ с различными схемами интегрирования по времени.

схемам. Результаты вычислительного эксперимента приведены на рис. 1. Они показывают, что неявная схема численного интегрирования не приводит к осцилляциям численного решения на начальном участке деформирования колонны. При этом погрешность численного решения порового давления не превышает (h^2).

2. Результаты численного моделирования

Особенности численного моделирования первого этапа формирования оползня из берегового склона рассмотрим на примере склонов с различным углом наклона под действием увеличения веса склона на 10% за счет обводнения и дождевых осадков. Последнее привело к росту порового давления в грунте склона, изменению физико-механических свойств материала и эволюции повреждений в склоне с образованием поверхности текучести (рис. 2). Численное решение проводим при значениях параметров модели, приведенных в таблице 1.

На рис. 3 приведено распределение повреждений в береговом склоне с прямоугольным выступом в момент времени $t=0.1$ сек. Из результатов расчета следует, что на начальном этапе формирования оползня материал склона практически весь разрушен (рис. 3) и его можно представить в виде некоторой эффективной

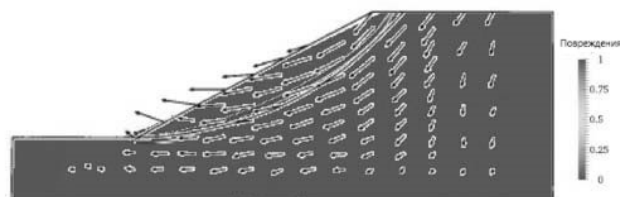


Рис. 2. Поля вектора перемещений и повреждений с образованием поверхности текучести в береговом склоне с углом наклона 45° .

Таблица 1. Параметры материалов вертикального сечения склона

Модуль Юнга (Па), E	40×10^6
Коэффициент Пуассона, ν	0.2
Плотность ($\text{кг}/\text{м}^3$), ρ	1620–2300
Коэффициент Био, α	1
Модуль сжимаемости Био (Па), M	3.33×10^7
Проницаемость $\left(\frac{\text{м}^2}{\text{Па}\cdot\text{с}}\right)$, $\frac{k}{\mu^w}$	1×10^{-6}
Связность (Па), c	$10 \times (10^4 - 10^6)$
Угол трения ($^\circ$), ϕ	15–45
Угол дилатансии ($^\circ$), ψ	0–5
Параметр повреждения: инициация, c_2	0.1
Параметр повреждения: критический, c_1	1

сыпучей среды. Экспериментальные исследования [5] подтверждают рассмотренное представление.

С целью снижения вычислительных затрат сыпучий материал представляем как жестко-вязкопластическую среду с реологической моделью Шведова – Бингама и зависимостью предела текучести среды от угла внутреннего трения давления

$$\bar{\mu}(\dot{\gamma}) = \mu + \frac{p' \operatorname{tg}(\phi)}{\dot{\gamma} + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Следовательно, уравнения Навье – Стокса в формулировке лагранжевых переменных с реологической моделью Шведова можно представить в виде

$$\begin{aligned} \rho \partial_t \mathbf{u} + \nabla p' - 2 \nabla \cdot \bar{\mu} \nabla \mathbf{u} - \rho \mathbf{b} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad t \in (0, T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega, \quad t \in (0, T), \end{aligned}$$

где p' – эффективное давление, а ρ – плотность сыпучей среды оползня. Задачу решаем со следующими граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad \text{на } \partial\Omega_D, \quad t \in (0, T), \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \quad \text{на } \partial\Omega_N, \quad t \in (0, T), \end{aligned}$$

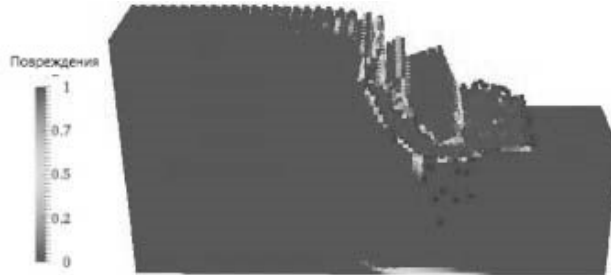


Рис. 3. Распределение повреждений в береговом склоне с углом наклона 90° в момент времени $t = 0.1$ сек.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{в } \Omega.$$

Проекционно-сеточные уравнения задачи представим в виде [4]:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{w}_h \rho \partial_t \mathbf{u}_h \, d\Omega - \int_{\Omega} p'_h \nabla \cdot \mathbf{w}_h \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w}_h \rho \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h \, d\Omega + 2 \int_{\Omega} \mathbf{w}_h : \bar{\mu} \nabla^s \mathbf{u}_h \, d\Omega - \\ - \int_{\Omega} \mathbf{w}_h \rho \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{w}_h \cdot \mathbf{t}_h \, d\Gamma = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{w} \in V, \\ \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h \, d\Gamma = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \end{aligned}$$

Плотность сыпучей среды принимаем равной 1620 кг/м³ с углом внутреннего трения 43°. Кинематическая вязкость принята равной вязкости воды 10⁻⁶ м²/с.

Эволюция начала взаимодействия поверхности оползня с водоемом приведена на рис. 4. Начальные данные для расчета взяты из работы [6]. Из результатов расчета следует, что в момент столкновения оползня с водоемом со скоростью 30 м/с образуется волна цунами высотой 60 м, что согласуется с косвенными данными от последствий цунами [6].

Полная картина эволюции схода оползня из сыпучей среды по наклонной поверхности с формированием волны цунами оползневого типа приведена на рис. 5.

3. Заключение

В данной статье представлена лагранжева формулировка с использованием естественных переменных $\mathbf{u} - p$ для эффективного моделирования трех стадий оползневого процесса. Динамическое уравнение Био для насыщенных пористых сред сформулировано в лагранжевой формулировке МКЭ с функцией течения Друкера – Прагера, дополненной моделью повреждения. Представлены результаты применения

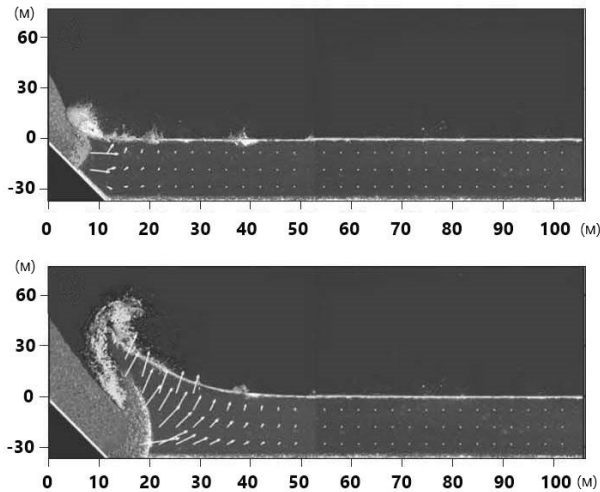


Рис. 4. Эволюция свободной поверхности водоема и границы раздела оползень – вода в моменты времени $t = 0.7$ сек и $t = 0.75$ сек.

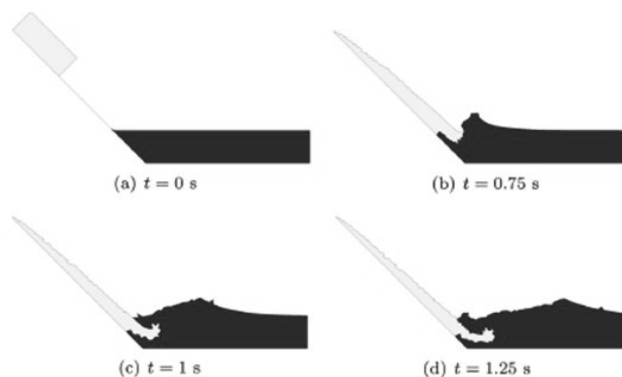


Рис. 5. Эволюция обрушения оползня и свободной поверхности.

МКЭ для моделирования эволюции повреждений в береговом склоне с образованием поверхности текучести. В дальнейшем развивается процесс разрушения материала берегового склона с течением по склону, подобному течению сыпучей среды. При достижении уровня поверхности воды часть кинетической энергии оползня переходит в кинетическую энергию водоема с образованием цунами.

Следует учитывать, что работа имеет дело с очень сложным явлением, с большой неопределенностью в отношении некоторых используемых данных, таких как физико-механические свойства и макроструктура пород берегового склона в условиях НДС до схода оползня, начальный уровень повреждений пород, значение коэффициента трения на поверхности скольжения и т.п. По видимому, более корректное их определение можно получить путем решения обратной задачи по известному перемещению поверхности берегового склона, например, взятому из данных космических снимков. Кроме этого объем оползневой массы определяется по замерам обвала, где не учитывается его пористость, а следовательно, данные по объему завышаются в 2-3 раза. Физические и численные модели, используемые для анализа таких событий, должны основываться на упрощенных моделях, поэтому результаты должны анализироваться с осторожностью, как оценки возможных последствий в случае возникновения таких событий.

Список литературы

- [1] М. А. Biot, “General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material”, *Journal of Applied Mechanics*, **78** (1956), 91–96.
- [2] О. С. Zienkiewicz and Т. Shiomi, “Dynamic behaviour of saturated porous media; The generalized Biot formulation and its numerical solution”, *Int. J. Num. Anal. Geomech.*, **8:1** (1984), 71–96.
- [3] О. С. Zienkiewicz, М. Huang and М. Pastor, “Computational soil dynamics — A new algorithm for drained and undrained conditions”, *Comp. Meth. Adv. Geomechanics*, **8** (1994), 47–59.
- [4] К. А. Чехонин, В. К. Булгаков, *Основы теории метода конечных элементов для задач гидродинамики*, Хабар. гос. техн. ун-т — Изд-во ХГТУ, 56, 1999, 283 с.
- [5] R. I. Borja, J. A. White, “Continuum deformation and stability analyses of a steep hillside

- slope under rainfall infiltration”, *Acta Geotechnica*, **5** (2010), 1–14.
- [6] А. Н. Махинов, “Крупный оползень и вызванный им цунами в Бурейском водохранилище”, *Геоморфология*, **3** (2020), 31–43.
- [7] V. V. Nikolaevskiy, *Geomechanics and Fluidodynamics*, Kluwer Academic Publishers, 1996, 447 pp.
- [8] J. P. Carter, H. Sabetamal, M. Nazem, S. W. Sloan, “One-dimensional test problems for dynamic consolidation”, *Acta Geotechnica*, **10** (2015), 173–178.
- [9] J. W. Ju, “On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects”, *International Journal of Solids and Structures*, **7** (1989), 803–833.

Поступила в редакцию
3 октября 2022 г.

Работа первых двух авторов выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-01290-23-00).

*Avdeeva M. O.*¹, *Bogoutdinova Yu. G.*¹, *Chekhonin K. A.*² Numerical simulation of a landslide-type tsunami. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2023. V. 23. No 2. P. 143–151.

¹ Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

² Computer Centre of Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Russia

ABSTRACT

The article proposes mathematical models and stable numerical algorithms for solving problems of deformation and flow of water-saturated porous materials. This class of problems arises in many engineering and applied fields, from field development to biomechanics. Of particular interest are the problems of the collapse of the banks of rivers, lakes and bays of the seas due to their catastrophic impact on possible consequences, for example, blocking the riverbed, the occurrence of a tsunami on the water surface of a reservoir, etc. For the mathematical description of the stress-strain state of saturated porous media, the Biot theory of three-dimensional consolidation is used, supplemented by the kinetics of damage accumulation in the medium and the Drucker-Prager yield conditions. After the formation of the main yield surface (or crack) in the material at the moment of the beginning of the collapse, its rheological properties are presented in the form of a Bingham model with a mathematical description similar to the Navier-Stokes equations with effective viscosity. A characteristic hydrodynamic feature of the problem under consideration is the presence of a free surface. Numerical modeling of the considered problems is carried out by the finite element method. The evolution of the free surface and the occurrence of a tsunami generated by a landslide are investigated.

Key words: *landslide, finite element method, Biot theory, saturated soil, river tsunami.*