

УДК 517.95

MSC2020 35Q93 + 78A46

© Г. В. Алексеев¹

Теоретический анализ задач магнитной маскировки с использованием эллиптических метаматериалов

Рассматриваются граничная задача сопряжения и экстремальные задачи для 3D модели магнитостатики. Указанные задачи связаны с дизайном трехмерных магнитных маскировочных оболочек. В качестве маскировочной среды выбирается эллиптический метаматериал, заполняющий область, топологически эквивалентную сферическому слою. Доказывается разрешимость краевой и экстремальных задач, выводится система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума, устанавливаются некоторые свойства оптимальных решений.

Ключевые слова: 3D модель магнитостатики, задача сопряжения, эллиптический метаматериал, невидимость, маскировка, экстремальная задача, разрешимость.

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202313>

Введение

В последнее десятилетие наблюдается растущий интерес к развитию технологий дизайна устройств невидимости (в виде маскировочных устройств), служащих для маскировки материальных тел от обнаружения различными средствами локации. Начиная с пионерских работ [1–3], посвященных электромагнитной маскировке, большое количество работ связано с развитием различных схем и стратегий маскировки материальных тел для статических полей (см., например, [4–8]). Работы [9–12] посвящены теоретическому и численному анализу задач маскировки для статических моделей электромагнетизма на основе оптимизационного метода решения обратных задач.

Анализ цитируемых работ показывает, что в задачах маскировки важную роль играет использование метаматериалов, т.е. искусственно созданных материалов, обладающих уникальными электромагнитными свойствами, не наблюдаемыми в природе. Множество всех метаматериалов удобно разбить на несколько больших групп.

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: alekseev@iam.dvo.ru

Среди них важную роль играют классы эллиптических и гиперболических метаматериалов (см., например, [13, 14]).

В этой работе мы обсудим некоторые важные свойства эллиптических метаматериалов применительно к использованию их в задачах маскировки для общей 3D модели магнитостатики. Используя указанные свойства для рассматриваемой модели магнитостатики, мы докажем разрешимость исходной задачи сопряжения и обратных экстремальных задач, возникающих при решении задач маскировки оптимизационным методом. Мы также приведем некоторые свойства оптимальных решений, которые следует использовать при разработке эффективных численных алгоритмов решения задач маскировки.

1. Постановка и анализ задачи сопряжения для модели магнитостатики. Эллиптический метаматериал

Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^3 область Ω , топологически эквивалентную сферическому слою $\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : a < r = |\mathbf{x}| < b\}$, где a и b — положительные константы. Будем считать, что область Ω заполнена неоднородной анизотропной (в общем случае) метаматериальной средой, магнитные свойства которой описываются тензором магнитной проницаемости μ , тогда как внутренность Ω_i и внешность Ω_e^∞ области Ω заполнены одной и той же однородной изотропной средой с постоянной магнитной проницаемостью $\mu_0 > 0$. На пару (Ω, μ) ниже будем ссылаться как на магнитную оболочку.

Обозначим через B_R шар $|\mathbf{x}| < R$ радиусом R , содержащий область Ω внутри себя. Положим $\Omega_e = \Omega_e^\infty \cap B_R$ (см. рис. 1, где приведены плоские сечения шара B_R и областей Ω_i , Ω , Ω_e).

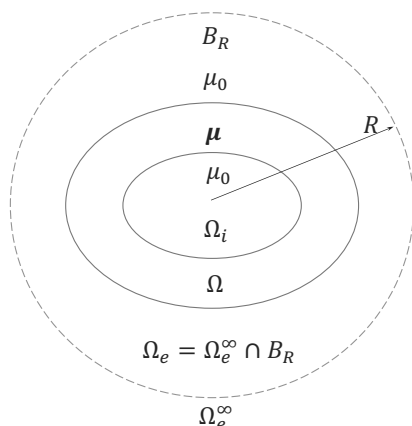


Рис. 1. Геометрия трехмерной задачи в виде поперечного сечения шара B_R , содержащего эллипсоид Ω_i и эллипсоидальный слой Ω

Предположим, что вне шара B_R сосредоточены источники, создающие внутри шара B_R внешне приложенное магнитное поле $\mathbf{H}_a = -\text{grad}\Phi_a$, отвечающее потенциалу Φ_a . Наличие оболочки (Ω, μ) приводит к появлению полей Φ_i и Φ_0 в областях Ω_i и Ω и дополнительного поля Φ_s в Ω_e^∞ , на которое мы будем ссылаться как на рассеянное поле. Полагая $\Phi_e = \Phi^e + \Phi_s$, отметим, что тройка (Φ_i, Φ_0, Φ_s) является решением следующей задачи сопряжения:

$$\mu_0 \Delta \Phi_i = 0 \text{ в } \Omega_i, \quad \text{div}(\mu \text{grad} \Phi_0) = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mu_0 \Delta \Phi_s = 0 \text{ в } \Omega_e^\infty, \quad (1)$$

$$\Phi_i = \Phi_0, \quad \mu_0 \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = (\mu \nabla \Phi_0) \cdot \mathbf{n} \text{ на } \Gamma_i, \quad \Phi_e = \Phi_0, \quad \mu_0 \frac{\partial \Phi_e}{\partial n} = (\mu \nabla \Phi_0) \cdot \mathbf{n} \text{ на } \Gamma_e, \quad (2)$$

$$\Phi_s(\mathbf{x}) = o(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Для краткости ниже на задачу (1)–(3) будем ссылаться как на задачу 1.

В соответствии с физическим смыслом (см., например, [7, гл. 3]) магнитную оболочку (Ω, μ) будем называть нерассеивающей во внешность Ω_e^∞ , если для решения (Φ_i, Φ_0, Φ_s) задачи (1)–(3) выполняется условие $\Phi_s = 0$, и идеальной маскировочной, если одновременно $\Phi_s = 0$ в Ω_e^∞ и $\nabla \Phi_i = 0$ в Ω_i .

Положим $\Omega_e = \Omega_e^\infty \cap B_R$. При анализе рассматриваемых ниже задач будем использовать пространства $H^1(D)$ и $H^1(D)^3$, где D — одна из областей $\Omega_i, \Omega, \Omega_e, B_R$, а также пространства $L^\infty(\Omega)$, $H^s(\Omega)$, $L^2(Q)$ и $H^{1/2}(\Gamma_R)$, $H^{-1/2}(\Gamma_R)$, где $Q \subset \Omega_i \cup \Omega_e$ — произвольное подмножество с ненулевой мерой. Нормы и скалярные произведения в $H^1(D)$, $H^s(\Omega)$ и $L^2(D)$ либо $L^2(D)^3$ будут обозначаться через $\|\cdot\|_{1,D}$, $(\cdot, \cdot)_{1,D}$, $\|\cdot\|_{s,\Omega}$, $(\cdot, \cdot)_{s,\Omega}$ и $\|\cdot\|_D$, $(\cdot, \cdot)_D$. Нормы в $H^1(Q)$, $H^{1/2}(\Gamma_R)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_R)$ будут обозначаться через $\|\cdot\|_{1,Q}$, $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_R}$ и $\|\cdot\|_{-1/2,\Gamma_R}$. Положим $L_{\mu^0}^\infty(\Omega) = \{\mu \in L^\infty(\Omega) : \mu(\mathbf{x}) \geq \mu^0\}$, $H_{\mu^0}^s(\Omega) = \{\mu \in H^s(\Omega) : \mu(\mathbf{x}) \geq \mu^0\}$, $\mu^0 = \text{const} > 0$. Нам также потребуется подпространство $H(\Omega_e) = \{\Phi \in H^1(\Delta, \Omega_e) : \Delta \Phi = 0 \text{ в } \Omega_e\}$, наделенное нормой $\|\cdot\|_{1,\Omega_e} \equiv \|\cdot\|_{H^1(\Omega_e)}$. Оно будет служить для описания сужений внешне приложенных на область Ω_e внешне приложенных полей Φ_a . Для краткости на любой элемент $\Phi^e \in H(\Omega_e)$ будем ссылаться как на внешнее поле.

Для описания свойств потенциала Φ будем использовать пространство $H^1(B_R)$. Поскольку Φ определяется с точностью до аддитивной константы, то, как и в [9], в $H^1(B_R)$ произведем разбиение на классы смежности, считая, что два элемента Φ_1 и Φ_2 принадлежат одному и тому же классу смежности, если $\Phi_1 - \Phi_2 = \text{const}$. Норму в $H^1(B_R) \setminus \mathbb{R}$ определим формулой

$$\|\Phi\|_X^2 = \|\nabla \Phi_i\|_{\Omega_i}^2 + \|\nabla \Phi_0\|_{\Omega}^2 + \|\nabla \Phi_e\|_{\Omega_e}^2 \quad \forall \Phi \equiv (\Phi_i, \Phi_0, \Phi_e). \quad (4)$$

Можно показать, что так введенное пространство $X \equiv H^1(B_R) \setminus \mathbb{R}$ является гильбертовым по норме (4). Через X^* обозначим двойственное к X пространство.

Введем следующие предположения на входящий в (1), (2) тензор μ , описывающий магнитные свойства среды, заполняющей Ω , и на сужение Φ^e поля Φ_a на Ω_e :

(i) тензор μ , рассматриваемый как оператор $\mu : X \rightarrow L^2(\Omega)^3$, удовлетворяет условиям

$$|(\mu \text{grad} \Phi, \text{grad} \Psi)_\Omega| \leq C_\mu \|\Phi\|_X \|\Psi\|_X \quad \forall \Phi, \Psi \in X, \quad (5)$$

$$(\mu \text{grad} \Phi, \text{grad} \Phi)_\Omega \geq \bar{\mu} \|\Phi\|_X^2 \quad \forall \Phi \in X, \quad \bar{\mu} = \text{const} > 0; \quad (6)$$

$$(ii) \Phi^e \equiv \Phi_a|_{\Omega_e} \in H(\Omega_e).$$

Здесь C_μ и $\bar{\mu}$ — положительные константы, зависящие от тензора μ .

Аналогично [9] введем оператор Дирихле – Неймана $T : H^{1/2}(\Gamma_R) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_R)$, ставящий в соответствие каждой функции $h \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ функцию $\partial\tilde{\Phi}/\partial\nu \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$, где $\tilde{\Phi}$ — решение внешней задачи Дирихле для уравнения $\Delta\Phi=0$ в $\Omega_e^\infty \setminus B_R$ при краевом условии $\Phi|_{\Gamma_R}=h$, удовлетворяющее условию (3). Отметим, что $T \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_R), H^{-1/2}(\Gamma_R))$, $\|T\| \leq C_T$ и $\int_{\Gamma_R} (TS)Sd\sigma \leq 0$ для всех $S \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ [15]. Здесь и ниже интеграл \int_{Γ_R} обозначает отношение двойственности между $H^{-1/2}(\Gamma_R)$ и $H^{1/2}(\Gamma_R)$, C_T — константа, зависящая от Ω и R . Отметим, что задача (1), (2), (3), рассматриваемая во всем пространстве \mathbb{R}^3 , эквивалентна краевой задаче (1), (2), рассматриваемой в шаре B_R при следующем дополнительном условии для поля Φ_s на Γ_R :

$$\frac{\partial\Phi_s}{\partial n} = T\Phi_s \text{ на } \Gamma_R. \tag{7}$$

Выведем слабую формулировку задачи 1. Пусть $\Psi \in X$ — произвольная тестовая функция. Умножим уравнения, входящие в (1), рассматриваемые в областях Ω_i , Ω и Ω_e , на Ψ , проинтегрируем по Ω_i , Ω либо Ω_e и применим для каждой области формулу Грина. Складывая полученные тождества и используя граничные условия в (2) и (7), приходим к следующему тождеству для тройки $\Phi = (\Phi_i, \Phi_0, \Phi_e)$:

$$a(\Phi, \Psi) \equiv a_0(\Phi, \Psi) + a_\mu(\Phi, \Psi) = \langle F^e, \Psi \rangle \quad \forall \Psi \in X. \tag{8}$$

Здесь $a_0(\cdot, \cdot)$, $a_\mu(\cdot, \cdot)$ и F^e — билинейные и линейная формы на X , определяемые формулами

$$a_0(\Phi, \Psi) = \mu_0 \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} \nabla\Phi \cdot \nabla\Psi dx - \int_{\Gamma_R} (T\Phi)\Psi d\sigma, \quad a_\mu(\Phi, \Psi) = (\mu \text{ grad}\Phi, \text{ grad}\Psi)_\Omega, \tag{9}$$

$$\langle F^e, \Psi \rangle = - \int_{\Gamma_R} T\Phi^e\Psi d\sigma + \int_{\Gamma_R} \frac{\partial\Phi^e}{\partial n}\Psi d\sigma.$$

Тождество (8) представляет собой слабую формулировку задачи (1), (2), (7), а ее решение $\Phi = (\Phi_i, \Phi_0, \Phi_e) \in X$ будем называть слабым решением задачи 1.

Отметим, что в силу действия теоремы о следах для любой функции $\Phi \in X$ (либо $\Phi \in H(\Omega_e)$) существует след $\Phi|_{\Gamma_R} \in H^{1/2}(\Gamma_R)$, тогда как для любой функции $\Phi^e \in H(\Omega_e)$ существует нормальный след $\partial\Phi^e/\partial n|_{\Gamma_R} \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$ и справедливы следующие оценки:

$$\|\Phi\|_{1/2, \Gamma_R} \leq C_R \|\Phi\|_X \quad \forall \Phi \in X \quad (\text{либо } \Phi \in H(\Omega_e)),$$

$$\|\partial\Phi^e/\partial n\|_{-1/2, \Gamma_R} \leq C'_R \|\Phi^e\|_{1, \Omega_e} \quad \forall \Phi^e \in H(\Omega_e). \tag{10}$$

Здесь C_R и C'_R — константы, зависящие от Ω и R , но не зависящие от $\Phi \in X$ (либо от $\Phi \in H^1(\Omega_e)$) и $\Phi^e \in H(\Omega_e)$. Используя неравенство Гельдера, оценку (5) и формулу

(4) для нормы $\|\cdot\|_X$, выводим

$$\left| \int_{\Gamma_R} (T\Phi)\Psi d\sigma \right| \leq \|T\Phi\|_{-1/2, \Gamma_R} \|\Psi\|_{1/2, \Gamma_R} \leq \|T\| \|\Phi\|_{1/2, \Gamma_R} \|\Psi\|_{1/2, \Gamma_R} \leq$$

$$\leq C_T C_R^2 \|\Phi\|_X \|\Psi\|_X, \quad \left| \mu_0 \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi dx \right| \leq \mu_0 \|\Phi\|_X \|\Psi\|_X, \quad (11)$$

$$|a_0(\Phi, \Psi)| \leq (\mu_0 + C_T C_R^2) \|\Phi\|_X \|\Psi\|_X, \quad |a_\mu(\Phi, \Psi)| \leq C_\mu \|\Phi\|_X \|\Psi\|_X, \quad (12)$$

$$|\langle F^e, \Psi \rangle| \leq (\|T\| \|\Phi^e\|_{1/2, \Gamma_R} + \|\partial \Phi^e / \partial n\|_{-1/2, \Gamma_R}) \|\Psi\|_{1/2, \Gamma_R} \leq$$

$$\leq C_1 \|\Phi^e\|_{1, \Omega_e} \|\Psi\|_X, \quad C_1 = (C_T C_R + C'_R) C_R. \quad (13)$$

Кроме того, из (9), свойств оператора T и (6) следует, что

$$a(\Phi, \Phi) \equiv a_0(\Phi, \Phi) + a_\mu(\Phi, \Phi) \geq \mu_* \|\Phi\|_X^2 \quad \forall \Phi \in X, \quad \mu_* = \min(\mu_0, \bar{\mu}). \quad (14)$$

Из оценок (12)–(14) вытекает, что билинейная форма $a_0 + a_\mu$ непрерывна и эллиптическая (коэрцитивна) на пространстве X . Из определения формы a_μ следует, что ее свойства определяются свойствами тензора μ , описывающего магнитную проницаемость метаматериальной среды, заполняющей оболочку Ω . С учетом этого ниже любой метаматериал в области Ω , для которого выполняются условия (i), будем называть эллиптическим метаматериалом. Поскольку для эллиптического метаматериала билинейная форма $a_0 + a_\mu$ обладает свойствами непрерывности и коэрцитивности, то из теоремы Лакса – Мильграма вытекает следующий результат.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда задача (8) имеет единственное решение $\Phi_\mu \in X$, для которого справедлива оценка

$$\|\Phi_\mu\|_X \leq C_1 \mu_*^{-1} \|\Phi^e\|_{1, \Omega_e}. \quad (15)$$

Здесь C_1 и μ_* — константы, определенные в (13) и (14).

Класс эллиптических метаматериалов достаточно широк. В частности, к ним относятся среды, для которых тензоры магнитной проницаемости μ являются диагональными с положительными компонентами в сферических, сфероидальных или эллипсоидальных координатах. Рассматривая для конкретности сферический случай, предположим, что вместо (i) выполняется условие

(iii) $\Omega = \Omega_0 \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : a < r = |\mathbf{x}| < b\}$, тензор μ диагонален в сферических координатах r, θ, φ , т.е. $\mu = \text{diag}(\mu_r, \mu_\theta, \mu_\varphi)$, а его диагональные компоненты (радиальная, полярная и азимутальная магнитные проницаемости) μ_r, μ_θ и μ_φ удовлетворяют условиям

$$\mu_r \in L_{\mu_r^0}^\infty(\Omega), \quad \mu_\theta \in L_{\mu_\theta^0}^\infty(\Omega), \quad \mu_\varphi \in L_{\mu_\varphi^0}^\infty(\Omega), \quad \mu_r^0 = \text{const} > 0, \quad (16)$$

$$\mu_\theta^0 = \text{const} > 0, \quad \mu_\varphi^0 = \text{const} > 0.$$

Покажем, что тензор μ , удовлетворяющий (iii), также удовлетворяет условию (i). Для этого заметим, что в сферических координатах вектор $\text{grad} \Phi$ и произведение диагонального в сферических координатах тензора $\mu = \text{diag}(\mu_r, \mu_\theta, \mu_\varphi)$ на $\text{grad} \Phi$

выражаются формулами (см., например, [7, с. 115])

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \mu \operatorname{grad} \Phi &= \mu_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\mu_\theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\mu_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi.\end{aligned}\quad (17)$$

Здесь $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ и \mathbf{e}_φ — единичные векторы сферического базиса.

Используя (17), мы заключаем, что при выполнении условия (iii)

$$\begin{aligned}a_\mu(\Phi, \Psi) &\equiv (\mu \operatorname{grad} \Phi, \operatorname{grad} \Psi) = a_1(\mu_r; \Phi, \Psi) + a_2(\mu_\theta; \Phi, \Psi) + a_3(\mu_\varphi; \Phi, \Psi) \equiv \\ &\equiv \int_{\Omega} \mu_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} dx + \int_{\Omega} \frac{\mu_\theta}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} dx + \int_{\Omega} \frac{\mu_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} dx.\end{aligned}\quad (18)$$

Применяя неравенство Гельдера и формулу (4) для нормы в X , легко выводим из (18), что

$$|a_1(\mu_r, \Phi, \Psi)| \leq \|\mu_r\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right| \left| \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right| dx \leq \|\mu_r\|_{L^\infty(\Omega)} \|\Phi\|_X \|\Psi\|_X, \quad (19)$$

$$a_1(\mu_r, \Phi, \Phi) = \int_{\Omega} \mu_r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 dx \geq \mu_r^0 \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\|_{\Omega}^2. \quad (20)$$

Используя (19), (20) и аналогичные неравенства для форм a_2 и a_3 , заключаем, что введенный в (iii) тензор μ удовлетворяет всем условиям в (i) с константами C_μ и $\bar{\mu}$, определяемыми соотношениями

$$C_\mu = \|\mu_r\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mu_\theta\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mu_\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \bar{\mu} = \min\{\mu_r^0, \mu_\theta^0, \mu_\varphi^0\}. \quad (21)$$

Основываясь на теореме Лакса – Мильграма и рассуждая, как в [9], можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть при выполнении условий (ii), (iii) $K_1 \subset L_{\mu_r^0}^\infty(\Omega)$, $K_2 \subset L_{\mu_\theta^0}^\infty(\Omega)$ и $K_3 \subset L_{\mu_\varphi^0}^\infty(\Omega)$ — произвольные непустые множества. Тогда для любой тройки $(\mu_r, \mu_\theta, \mu_\varphi) \in K_1 \times K_2 \times K_3$ и для любого внешнего поля $\Phi^e \in H(\Omega_e)$ задача (8), где $\mu = \operatorname{diag}(\mu_r, \mu_\theta, \mu_\varphi)$, имеет единственное решение $\Phi_\mu \in X$, для которого справедлива оценка

$$\|\Phi_\mu\|_X \leq C_1 \mu_*^{-1} \|\Phi^e\|_{1, \Omega_e}, \quad \mu_* = \min(\mu_0, \mu_r^0, \mu_\theta^0, \mu_\varphi^0). \quad (22)$$

Здесь C_1 — константа, определенная в (13).

2. Постановка и анализ экстремальных задач

В этом разделе для рассматриваемой 3D модели магнитостатики мы выполним краткий анализ экстремальных задач, возникающих при решении обратных задач маскировки оптимизационным методом. Указанные задачи заключаются в минимизации функционалов

$$I_1(\Phi) = \|\nabla \Phi\|_{\Omega_i}^2, \quad I_2(\Phi) = \|\Phi_s\|_{\Omega_e}^2, \quad I_3(\Phi) = I_1(\Phi) + I_2(\Phi),$$

используемых при решении задач внутренней маскировки, внешней и полной маскировки соответственно (см. подробнее в [8]).

Предполагая выполненными условия (ii), (iii), положим $K = K_1 \times K_2 \times K_3$, где множества K_1, K_2, K_3 удовлетворяют условиям

(j) $K_1 \subset H_{\mu_r^0}^s(\Omega)$, $K_2 \subset H_{\mu_\theta^0}^s(\Omega)$, $K_3 \subset H_{\mu_\varphi^0}^s(\Omega)$ — непустые выпуклые замкнутые множества, где $s > 3/2$, $\mu_r^0 = \text{const} > 0$, $\mu_\theta^0 = \text{const} > 0$, $\mu_\varphi^0 = \text{const} > 0$.

Введем тройку $u = (\mu_r, \mu_\theta, \mu_\varphi)$. Определим оператор $G: X \times K \rightarrow X^*$, действующий по формуле $\langle G(\Phi, u), \Psi \rangle \equiv a_0(\Phi, \Psi) + a_\mu(\Phi, \Psi)$, где a_0 и a_μ при $\mu = \text{diag}(\mu_r, \mu_\theta, \mu_\varphi)$ определены в (9) и (18). Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$J(\Phi, u) := \frac{\alpha_0}{2} I(\Phi) + \frac{\alpha_1}{2} \|\mu_r\|_{s,\Omega}^2 + \frac{\alpha_2}{2} \|\mu_\theta\|_{s,\Omega}^2 + \frac{\alpha_3}{2} \|\mu_\varphi\|_{s,\Omega}^2 \rightarrow \inf, \quad (23)$$

$$G(\Phi, u) = 0, \quad (\Phi, u) \in X \times K.$$

Здесь $I(\Phi)$ — произвольный пока функционал качества, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — неотрицательные параметры. Введем множество $Z_{ad} = \{(\Phi, u) \in X \times K : G(\Phi, u) = 0, I(\Phi) < \infty\}$ допустимых пар для задачи (1). Предположим, в дополнение к (ii), (iii), (j), что выполняются следующие условия:

(jj) $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал качества;

(jjj) $\alpha_0 > 0$; $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_3 \geq 0$ и K_1, K_2, K_3 — ограниченные множества, либо $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ и функционал $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ ограничен снизу.

Введем лагранжиан $\mathcal{L}: X \times K \times X \rightarrow \mathbb{R}$ формулой $\mathcal{L}(\Phi, u, S) = J(\Phi, u) + \langle G(\Phi, u), S \rangle$, где $S \in X$ некоторая функция. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть при выполнении условий (ii), (iii), (j)–(jjj) множество Z_{ad} не пусто. Тогда задача (23) имеет по крайней мере одно решение $(\Phi, \mu_r, \mu_\theta, \mu_\varphi) \in X \times K_1 \times K_2 \times K_3$.

Теорема 4. Пусть при выполнении условий (ii), (iii), (j) $\alpha_0 > 0$ и $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ либо $\alpha_l \geq 0$ и K_l — ограниченные множества, $l = 1, 2, 3$. Тогда задача (23) при $I = I_j(\Phi)$, $j = 1, 2, 3$ имеет по крайней мере одно решение $(\Phi, u) \in X \times K$.

Теорема 5. Пусть при выполнении условий (ii), (iii), (j) пара $(\hat{\Phi}, \hat{u}) = (\hat{\Phi}, \hat{\mu}_r, \hat{\mu}_\theta, \hat{\mu}_\varphi) \in X \times K_1 \times K_2 \times K_3$ является точкой локального минимума для задачи (23) и пусть функционал качества I имеет непрерывно дифференцируемую по Фреше производную $I'(\hat{\Phi})$ в точке $\hat{\Phi}$. Тогда существует единственный множитель Лагранжа $\hat{S} \in X$, являющийся решением уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\alpha_0(\Psi, \hat{S}) + (\text{diag}(\hat{\mu}_r, \hat{\mu}_\theta, \hat{\mu}_\varphi) \text{grad} \Psi, \text{grad} \hat{S})_\Omega = -(\alpha_0/2) \langle I'(\hat{\Phi}), \Psi \rangle \quad \forall \Psi \in X \quad (24)$$

и выполняется принцип минимума

$$\mathcal{L}(\hat{\Phi}, \hat{u}, \hat{S}) \leq \mathcal{L}(\hat{\Phi}, u, \hat{S}) \quad \forall u \in K. \quad (25)$$

Приведенные теоремы являются обобщением на общий трехмерный случай результатов работы [9], полученных в осесимметричном случае, и могут быть доказаны на основе предложенной в [9] схемы. Аналогичные теоремы могут быть сформулированы и доказаны для более общего случая, когда Ω — сфероид или эллипсоид, а μ —

диагональный соответственно в сфероидальных или эллипсоидальных координатах тензор с положительными компонентами. Более сложным является исследование единственности и устойчивости оптимальных решений, что обычно основывается на анализе системы оптимальности для задачи (23), состоящей из соотношений (24), (25) и операторного уравнения $G(\hat{\Phi}, \hat{u}) = 0$. Исследованию этих вопросов, а также разработке эффективных численных алгоритмов решения задач маскировки для общей 3D модели магнитостатики, обобщающих разработанные в [11, 12] численные алгоритмы, будут посвящены отдельные работы автора и его учеников.

3. Заключение

В работе были сформулированы граничная задача сопряжения и задача управления для общей 3D модели магнитостатики, возникающие при решении обратных задач магнитной маскировки оптимизационным методом. В качестве маскировочной оболочки использовалась область, топологически эквивалентная сферическому слою, заполненная эллиптической метаматериальной средой. Доказана разрешимость указанных задач, выведена система оптимальности, установлены некоторые свойства оптимальных решений.

Список литературы

- [1] Л. С. Долин, “О возможности сопоставления трехмерных электромагнитных систем с неоднородным анизотропным заполнением”, *Изв. вузов. Радиофизика*, **4** (1961), 964–967.
- [2] J. B. Pendry, D. Shurig, D. R. Smith, “Controlling electromagnetic fields”, *Science*, **312** (2006), 1780–1782.
- [3] U. Leonhardt, “Optical conformal mapping”, *Science*, **312** (2006), 1777–1780.
- [4] B. Wood, J. B. Pendry, “Metamaterials at zero frequency”, *J. Phys.: Condens. Matter.*, **19** (2007), 076208.
- [5] A. Sanchez, C. Navau, J. Prat-Camps, D.-X. Chen, “Antimagnets: controlling magnetic fields with superconductor/metamaterial hybrids”, *New J. Phys.*, **13** (2011), 093034.
- [6] F. Gömöry, M. Šolovyov, J. Souc, C. Navau, J. Prat-Camps, A. Sanchez, “Experimental realization of a magnetic cloak”, *Science*, **335** (2012), 1466–1468.
- [7] Г. В. Алексеев, *Проблема невидимости в акустике, оптике и теплопереносе*, Дальнаука, В., 2016.
- [8] Г. В. Алексеев, В. А. Левин, Д. А. Терешко, *Анализ и оптимизация в задачах дизайна устройств невидимости материальных тел*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2021.
- [9] Г. В. Алексеев, Ю. Э. Спивак, “Теоретический анализ задачи магнитной маскировки на основе оптимизационного метода”, *Дифференциальные уравнения*, **54:9** (2018), 1155–1166.
- [10] Г. В. Алексеев, Ю. Э. Спивак, “Численный анализ двумерных задач магнитной маскировки на основе оптимизационного метода”, *Дифференциальные уравнения*, **56:9** (2020), 1252–1262.
- [11] Г. В. Алексеев, Ю. Э. Спивак, “Численный анализ трехмерных задач магнитной маскировки на основе оптимизационного метода”, *Журн. вычислит. математики и мат. физики*, **61:2** (2021), 224–238.

- [12] G. V. Alekseev, A. V. Lobanov, “Optimization method for solving cloaking and shielding problems for a 3D model of electrostatics”, *Mathematics*, **11**:6 (2023), 1395.
- [13] H. N. S. Krishnamoorthy, Z. Jacob, E. Narimanov, I. Kretzschmar, V. M. Menon, “Topological transitions in metamaterials”, *Science*, **336**:6078 (2012), 205–209.
- [14] P. Shekhar, J. Atkinson, Z. Jacob, “Hyperbolic metamaterials: fundamentals and applications”, *Nano Convergence*, **1**:14 (2014), 1–17.
- [15] J. M. Melenk, “Convergence analysis for finite element discretizations of the Helmholtz equation with Dirichlet-to-Neumann boundary conditions”, *Math. Comp.*, **79** (2010), 1871–1914.

Поступила в редакцию
11 июля 2023 г.

Исследование выполнено при финансовой
поддержке РФФ (проект № 22-21-00271).

*Alekseev G. V.*¹ Theoretical analysis of magnetic cloaking problems using elliptical metamaterials. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2023. V. 23. No 2. P. 152–160.

¹ Institute of Applied Mathematics Far Eastern Branch Russian Academy of Sciences, Russia

ABSTRACT

The conjugation problem and control problems for the 3D model of magnetostatics are considered. These problems are related to the design of three-dimensional magnetic cloaking shells. An elliptical metamaterial is chosen as a cloaking medium that fills a region which is topologically equivalent to a spherical layer. The solvability of boundary and control problems is proved, an optimality system is derived that describes the necessary conditions for an extremum, some properties of optimal solutions are established.

Key words: *3D model of magnetostatics, conjugation problem, elliptical metamaterial, invisibility, cloaking, control problem, solvability.*