

УДК 517.54

MSC2020 30C75, 30C85

© В. Н. Дубинин<sup>1</sup>

## Асимптотическая формула для емкости конденсатора при вырождении всех его пластин

Приводится асимптотическая формула для емкости обобщенного конденсатора с переменными уровнями потенциала, областью задания конденсатора и вырождением всех его пластин.

**Ключевые слова:** асимптотическая формула, конформная емкость конденсатора, функция Неймана.

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202316>

Получение асимптотических формул для емкостей различных видов представляет значительный интерес в связи с многочисленными приложениями этих формул в теории функций и смежных областях математики (см., например, работы [1–12] и библиографию в них). В недавней статье [13] установлена асимптотика емкости обобщенного конденсатора в случае, когда одна из его пластин фиксирована, а все другие стягиваются в наперед заданные точки, при этом уровни потенциала суть переменные величины, а множество, на котором определен конденсатор, стремится к фиксированной области. Настоящая заметка является продолжением этих исследований. Мы получаем аналог формулы (2) [13] в случае, когда вырождаются все пластины конденсатора. Доказательство новой асимптотической формулы следует доказательству Теоремы 2.4 [5] с некоторыми дополнениями и исправлениями. Всюду ниже мы придерживаемся определений и обозначений из книги [5].

**Теорема 1.** Пусть  $D$  — конечносвязная область комплексной сферы  $\overline{\mathbb{C}}$ , ограниченная непрерывно дифференцируемыми жордановыми кривыми, и пусть  $\{D(\varepsilon)\}$  — семейство конечносвязных областей в  $\overline{\mathbb{C}}$ , зависящих от параметра  $\varepsilon > 0$ , ограниченных жордановыми кривыми и такими, что расстояние между границами  $\partial D$  и  $\partial D(\varepsilon)$  (по Хаусдорфу) есть величина  $O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Пусть  $\{z_k\}_{k=1}^n$ ,  $n \geq 2$ , — совокупность различных конечных точек области  $D$ ;

$$\delta_k(\varepsilon) = \delta_k - \alpha_k \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

<sup>1</sup> Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: [dubinini@iam.dvo.ru](mailto:dubinini@iam.dvo.ru)

$\delta_k \neq 0$  и  $\alpha_k$  — вещественные числа,  $k = 1, \dots, n$ . Предположим, что пластины  $E_k(\varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , конденсатора  $C(\varepsilon) = (D(\varepsilon), \{E_k(\varepsilon)\}_{k=1}^n, \{\delta_k(\varepsilon)\}_{k=1}^n)$  ограничены замкнутыми гладкими жордановыми кривыми, на которых выполняется

$$|z - z_k| = \mu_k (\exp(-\nu_k/\varepsilon))(1 + o(1)), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \tag{1}$$

$\mu_k > 0, \nu_k > 0, k = 1, \dots, n, \sum_{k=1}^n \delta_k/\nu_k = 0$ . Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \text{cap } C(\varepsilon) = & 2\pi\varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k} - 2\pi\varepsilon^2 \left\{ \sum_{k=1}^n \left[ 2\frac{\alpha_k \delta_k}{\nu_k} + \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{N(D, z_k, z_n)}{\mu_k} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n-1} \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} n_D(z_k, z_l, z_n) \right\} + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \tag{2} \end{aligned}$$

где

$$n_D(z, z_l, z_n) = H_D(z, z_l, z_n) - \log |z - z_l|$$

означает функцию Неймана области  $D$  с полюсами в точках  $z_l$  и  $z_n$ , а

$$N(D, z_l, z_n) = \exp(H_D(z_l, z_l, z_n)),$$

$$l = 1, \dots, n-1, N(D, z_n, z_n) := 1.$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что формула вида (2) не зависит от выбора конкретных пластин  $E_k(\varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , удовлетворяющих условиям (1) (см. [5, Лемма 2.1]). Ввиду конформной инвариантности емкости достаточно рассмотреть случай, когда область  $D$  ограничена конечным числом аналитических жордановых кривых и точка  $z_n = 0$ . Кроме того, учитывая монотонность емкости конденсатора [5, Теорема 1.15], можем считать, что граничные точки области  $D(\varepsilon)$  получаются сдвигом граничных точек  $D$  вдоль нормали к  $\partial D$  на одну и ту же величину  $O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Введем сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned} n(z, z_k) = n_D(z, z_k, 0), \quad n_\varepsilon(z, z_k) = n_{D(\varepsilon)}(z, z_k, 0); \quad k = 1, \dots, n-1, \\ R_k = N(D, z_k, 0), \quad R_k(\varepsilon) = N(D(\varepsilon), z_k, 0), \quad \lambda_k = \varepsilon/(\varepsilon \log \mu_k - \nu_k), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Следуя [5], при достаточно малом значении параметра  $\varepsilon$  рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(z) = \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k(\varepsilon) \sum_{l=1}^{n-1} \beta_{lk} n_\varepsilon(z, z_l),$$

где

$$\beta_{lk} = \begin{cases} -\lambda_k \lambda_l n_\varepsilon(z_k, z_l), & l \neq k, \\ -\lambda_k [1 + \lambda_k \log R_k(\varepsilon)], & l = k, \end{cases}$$

$k, l = 1, \dots, n-1$ . Функция  $g$  гармоническая в  $\overline{D(\varepsilon)} \setminus \bigcup_{k=1}^n \{z_k\}$ , а на границе  $\partial D(\varepsilon)$  удовлетворяет условию  $\partial g/\partial n = 0$ . В каждой точке  $z_k, k = 1, \dots, n$ , функция  $g$  имеет логарифмическую особенность. Отсюда заключаем, что при любом  $k, 1 \leq k \leq n$ , граница

множества

$$\mathcal{E}_k(\varepsilon) = \left\{ z : |z - z_k| < \mu_k \exp(-\nu_k/(2\varepsilon)), g(z)/\delta_k(\varepsilon) \geq 1 \right\}$$

представляет собой замкнутую аналитическую жордановую кривую.

Для точек  $z \in \partial\mathcal{E}_k(\varepsilon)$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , выполняется

$$\begin{aligned} 1 &= -\lambda_k [1 + \lambda_k \log R_k(\varepsilon)] n_\varepsilon(z, z_k) - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n-1} \lambda_k \lambda_l n_\varepsilon(z_k, z_l) n_\varepsilon(z, z_l) - \\ &- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n-1} \frac{\delta_j(\varepsilon)}{\delta_k(\varepsilon)} \left\{ \lambda_k \lambda_j n_\varepsilon(z_k, z_j) n_\varepsilon(z, z_k) + \lambda_j [1 + \lambda_j \log R_j(\varepsilon)] n_\varepsilon(z, z_j) + \right. \\ &+ \left. \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j, l \neq k}}^{n-1} \lambda_l \lambda_j n_\varepsilon(z_l, z_j) n_\varepsilon(z, z_l) \right\} = -\lambda_k [1 + \lambda_k \log R_k + O(\varepsilon^2)] n(z, z_k) - \\ &- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n-1} \frac{\delta_j(\varepsilon)}{\delta_k(\varepsilon)} \left\{ \lambda_k \lambda_j (n(z_k, z_j) + O(\varepsilon)) n(z, z_k) + \lambda_j n(z_k, z_j) \right\} + O(\varepsilon^2) = \\ &= (\lambda_k \log |z - z_k|) \left[ 1 + \lambda_k \log R_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n-1} \frac{\delta_j(\varepsilon)}{\delta_k(\varepsilon)} \lambda_j n(z_k, z_j) + O(\varepsilon^2) \right] - \\ &- \lambda_k \log R_k - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n-1} \frac{\delta_j(\varepsilon)}{\delta_k(\varepsilon)} \lambda_j n(z_k, z_j) + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Мы воспользуемся тем фактом, что при сделанных выше допущениях, касающихся границ множеств  $D$  и  $D(\varepsilon)$  справедливы равенства

$$\begin{aligned} n_\varepsilon(z, z_k) &= n(z, z_k) + O(\varepsilon), \quad z \in D(\varepsilon) \cap D, \\ \log R_k(\varepsilon) &= \log R_k + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad k = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

После простых вычислений получаем, что на границе множества  $\mathcal{E}_k(\varepsilon)$  выполняется

$$\lambda_k \log |z - z_k| = 1 + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

и, следовательно, справедливо асимптотическое равенство (1).

Рассмотрим теперь строение множества  $\partial\mathcal{E}_n(\varepsilon)$ . Напомним, что согласно определению функции Неймана

$$n_\varepsilon(z, z_l) = \log |z| + o(1) \text{ при } z \rightarrow 0$$

[5, часть 2.1]. Кроме того,  $n_\varepsilon(z, z_l)$  — гармоническая функция в проколотой окрестности начала координат. Отсюда

$$n_\varepsilon(z, z_l) = \log |z| + H(z),$$

где  $H(z)$  — некоторая гармоническая функция в окрестности точки  $z=0$  и  $H(0)=0$ . Поэтому можно записать

$$n_\varepsilon(z, z_l) = \log |z| + O(|z|), \quad z \rightarrow 0, \quad l = 1, \dots, n-1.$$

Учитывая этот факт, получаем, что для точек  $z \in \partial\mathcal{E}_n(\varepsilon)$  выполняется<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\delta_k(\varepsilon)}{\delta_n(\varepsilon)} \sum_{l=1}^{n-1} \beta_{lk} (\log |z| + O(\varepsilon^2)) = (\log |z| + O(\varepsilon^2)) \times \\ &\times \left\{ - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\delta_k(\varepsilon)}{\delta_n(\varepsilon)} \lambda_k [1 + \lambda_k \log R_k(\varepsilon)] - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\delta_k(\varepsilon)}{\delta_n(\varepsilon)} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n-1} \lambda_k \lambda_l n_\varepsilon(z_k, z_l) \right\} = \\ &= \lambda_n \log |z| \left\{ - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k (\delta_k - \alpha_k \varepsilon)}{\lambda_n (\delta_n - \alpha_n \varepsilon)} [1 + \lambda_k \log R_k] - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\delta_k}{\delta_n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n-1} \frac{\lambda_k \lambda_l}{\lambda_n} n(z_k, z_l) + o(\varepsilon) \right\} + O(\varepsilon^3) = \\ &= \lambda_n \log |z| \left\{ 1 + \frac{\varepsilon \nu_n}{\delta_n} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{\delta_k}{\nu_k} \left( \frac{\alpha_k}{\delta_k} - \frac{\alpha_n}{\delta_n} \right) + \frac{\delta_k}{\nu_k^2} \log \frac{R_k \mu_n^{\nu_k/\nu_n}}{\mu_k} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n-1} \frac{\delta_k}{\nu_k \nu_l} n(z_k, z_l) \right] + \right. \\ &\quad \left. + o(\varepsilon) \right\} + O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

При отображении  $z \mapsto az, a > 0$ , емкость конденсатора  $C(\varepsilon)$  не меняется, в то время как следующие величины преобразуются по правилу:

$$\begin{aligned} R_k &\mapsto R_k a^2, \quad n(z_k, z_l) \mapsto n(z_k, z_l) + \log a, \quad k, l = 1, \dots, n-1; \\ \delta_k &\mapsto \delta_k, \quad \alpha_k \mapsto \alpha_k, \quad \mu_k \mapsto \mu_k a, \quad \nu_k \mapsto \nu_k, \quad k, l = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при данном отображении не меняется вид асимптотической формулы (2). Постоянную  $a$  можно подобрать таким образом, чтобы выражение в квадратных скобках в последнем соотношении обратилось в нуль:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{\delta_k}{\nu_k} \left( \frac{\alpha_k}{\delta_k} - \frac{\alpha_n}{\delta_n} \right) + \frac{\delta_k}{\nu_k^2} \log \frac{R_k \mu_n^{\nu_k/\nu_n}}{\mu_k} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n-1} \frac{\delta_k}{\nu_k \nu_l} n(z_k, z_l) = 0. \quad (3)$$

Действительно, после указанной выше замены параметров в (3) к левой части (3) добавится слагаемое

$$- \frac{\delta_n}{\nu_n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\nu_k} \log a,$$

<sup>1</sup>В этой части аналогичного доказательства [5, часть 2.3] допущена неточность, которая не повлияла на результат вычислений.

где множитель перед  $\log a$  отличен от нуля (воспользовались равенством  $\sum_{k=1}^n \delta_k / \nu_k = 0$ ). Таким образом, можно априори считать, что выполняется равенство (3). В этом случае получаем

$$\lambda_n \log |z| = 1 + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

и, следовательно, справедливо равенство (1) при  $k = n$ . Ранее мы показали (1) для  $k = 1, \dots, n-1$ . Поэтому при нахождении формулы для емкости конденсатора  $C(\varepsilon)$  достаточно ограничиться пластинами  $\mathcal{E}_k(\varepsilon)$  вместо  $E_k(\varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

По принципу Дирихле

$$\begin{aligned} \text{cap } C(\varepsilon) &= \iint_{D(\varepsilon) \setminus \bigcup_{k=1}^n \mathcal{E}_k(\varepsilon)} |\nabla g|^2 dx dy = - \sum_{k=1}^n \delta_k(\varepsilon) \int_{\partial \mathcal{E}_k(\varepsilon)} \frac{\partial g}{\partial n} ds = \\ &= 2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k(\varepsilon) \sum_{l=1}^{n-1} \delta_l(\varepsilon) \beta_{kl} - 2\pi \delta_n(\varepsilon) \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k(\varepsilon) \sum_{l=1}^{n-1} \beta_{lk}. \end{aligned}$$

Здесь дифференцирование производится по направлению внешней нормали к границе множеств  $\mathcal{E}_k(\varepsilon)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . С учетом предыдущих выкладок и равенства (3) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \text{cap } C(\varepsilon) &= - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \delta_k^2(\varepsilon) [1 + \lambda_k \log R_k(\varepsilon)] - \\ &- \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n-1} \lambda_k \lambda_l \delta_k(\varepsilon) \delta_l(\varepsilon) n_\varepsilon(z_k, z_l) - \lambda_n \delta_n^2(\varepsilon) (1 + o(\varepsilon)) = \\ &= - \sum_{k=1}^{n-1} \left[ -\frac{\varepsilon}{\nu_k} - \frac{\varepsilon^2 \log \mu_k}{\nu_k^2} + o(\varepsilon^2) \right] [\delta_k^2 - 2\alpha_k \delta_k \varepsilon + o(\varepsilon)] \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{\nu_k} \log R_k + O(\varepsilon^2) \right] - \\ &- \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n-1} \left[ -\frac{\varepsilon}{\nu_k} + O(\varepsilon^2) \right] \left[ -\frac{\varepsilon}{\nu_l} + O(\varepsilon^2) \right] [\delta_k - \alpha_k \varepsilon + o(\varepsilon)] [\delta_l - \alpha_l \varepsilon + o(\varepsilon)] n(z_k, z_l) - \\ &- [\varepsilon / \nu_n - (\varepsilon^2 \log \mu_n) / \nu_n^2 + o(\varepsilon^2)] [\delta_n^2 - 2\alpha_n \delta_n \varepsilon + o(\varepsilon)] (1 + o(\varepsilon)) = \\ &= \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k} - \varepsilon^2 \left\{ \sum_{k=1}^n \left[ 2 \frac{\alpha_k \delta_k}{\nu_k} + \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{R_k}{\mu_k} \right] + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n-1} \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} n(z_k, z_l) \right\} + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

Приведенное доказательство распространяется на случай, когда некоторые пластины конденсатора  $C(\varepsilon)$  стягиваются к граничным точкам области  $D$ , но только при условии, что в окрестности этих точек границы областей  $D$  и  $D(\varepsilon)$  совпадают при любом  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В общем случае вопрос об асимптотике емкости конденсатора остается открытым.

## Список литературы

- [1] В. Н. Дубинин, “Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения”, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **237** (1997), 56–73.
- [2] D. Karp, “Capacity of a condenser whose plates are circular arcs”, *Complex Variables, Theory and Application*, **50**:2 (2005), 103–122.
- [3] D. Karp, E. Prilepkina, “Reduced modules with free boundary and its applications”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **34**:2 (2009), 353–378.
- [4] V. N. Dubinin, M. Vuorinen, “Robin functions and distortion theorems for regular mappings”, *Math. Nachr.*, **283**:11 (2010), 1589–1602.
- [5] V. N. Dubinin, *Condenser Capacities and Symmetrization in Geometric Function Theory*, Springer, Basel, 2014.
- [6] K. A. Gulyaeva, S. I. Kalmykov, E. G. Prilepkina, “Extremal decomposition problems in the Euclidean space”, *Int. J. Math. Anal. (Ruse)*, **9** (2015), 2763–2773.
- [7] С. И. Калмыков, Е. Г. Прилепкина, “О  $p$ -гармоническом радиусе Робена в евклидовом пространстве”, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **449** (2016), 196–213.
- [8] V. N. Dubinin, E. G. Prilepkina, “Optimal Green energy points on the circles in  $d$ -space”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **499**:2 (2021), Article 125055.
- [9] E. G. Prilepkina, A. S. Afanaseva-Grigoreva, “Optimal discrete Neumann energy in a ball and an annulus”, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **19**:1 (2022), 109–119.
- [10] С. Р. Насыров, В. З. Нгуен, “Асимптотика внешнего конформного модуля четырехсторонника при его растяжении”, *Изв. вузов. Матем.*, **5** (2023), 89–95.
- [11] Ф. Г. Авхадиев, И. Р. Каюмов, С. Р. Насыров, “Экстремальные проблемы в геометрической теории функций”, *Успехи математических наук*, **78**:2(470) (2023), 3–70.
- [12] Laura Abatangelo, Corentin L’ena, and Paolo Musolino, “Asymptotic behavior of generalized capacities with applications to eigenvalue perturbations: the higher dimensional case”, 2023, arXiv: 2305.06953 [math.AP].
- [13] В. Н. Дубинин, В. Ю. Ким, “О конденсаторах с переменными пластинами, уровнями потенциала и областью задания”, *Дальневост. матем. журн.*, **22**:1 (2022), 55–60.

Поступила в редакцию  
12 июля 2023 г.

Исследование выполнено за счет гранта  
Российского научного фонда №23-21-00056,  
<https://rscf.ru/project/23-21-00056/>.

---

*Dubinin V. N.* An asymptotic formula for the capacity of a condenser when all its plates are degenerate. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2023. V. 23. No 2. P. 184–189.

<sup>1</sup> Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

## ABSTRACT

An asymptotic formula is given for the capacity of a generalized condenser with variable potential levels, the domain of the condenser and the degeneracy of all its plates.

Key words: *functional asymptotic formula, conformal capacity, condenser, Neumann function.*