Дальневосточный математический журнал. 2023. Т. 23. № 2. С. 246–251

УДК 517.52+512.742.72
MSC2020 11B37+33E05

© М. А. Романов[1]

О коэффициентах и начальных условиях последовательности Сомос-6 ранга 3

В работе выясняются условия, которым удовлетворяют коэффициенты и начальные значения последовательности Сомос-6, являющейся произведением двух последовательностей Сомос-4 и имеющей ранг не больше 3.

Ключевые слова: *последовательности Сомоса, эллиптические функции, последовательности конечного ранга, формулы сложения.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202321

Введение

Пусть k — натуральное число. Последовательностью Сомос-k называется числовая последовательность $\{S_n\}$ $(n\in\mathbb{Z})$, удовлетворяющая рекуррентному соотношению

$$S_{n+k}S_n = \sum_{1\leqslant j\leqslant k/2} \alpha_j S_{n+k-j}S_{n+j} \tag{1}$$

с коэффициентами $\alpha_1,\ldots,\alpha_{[k/2]}$. Для вычисления $\{S_n\}$ необходимо знать k начальных значений $S_0,\ldots,S_{k-1}$. В дальнейшем будем считать, что последовательность $\{S_n\}$ не имеет нулевых элементов.

Напомним, что 0-рангом (см. [1]) последовательности $\{S_n\}$ называется минимально возможное натуральное r, при котором существуют последовательности

$$a_n^{(1)},\ldots,a_n^{(r)};b_n^{(1)},\ldots,b_n^{(r)}$$

такие, что при любых $m,n\in\mathbb{Z}$ выполняется равенство

$$S_{m+n}S_{m-n} = \sum_{i=1}^{r} a_m^{(i)}b_n^{(i)}. \tag{2}$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680038, г. Хабаровск, ул. Серышева, 60. Электронная почта: `romanov@iam.dvo.ru`

Эквивалентное определение заключается в том, что 0-ранг — это наименьшее r, при котором равенство

$$\mathcal{D}_S\begin{pmatrix} m_0,\dots,m_r \\ n_0,\dots,n_r \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} S_{m_0+n_0}S_{m_0-n_0} & \dots & S_{m_0+n_r}S_{m_0-n_r} \\ \dots & S_{m_i+n_j}S_{m_i-n_j} & \dots \\ S_{m_r+n_0}S_{m_r-n_0} & \dots & S_{m_r+n_r}S_{m_r-n_r} \end{pmatrix} = 0$$

выполняется при любых целых $m_0,\dots,m_r,n_0,\dots,n_r$. Раскладывая по первой строке определитель в соотношении

$$\mathcal{D}_S\begin{pmatrix} n,3,4,5 \\ 3,2,1,0 \end{pmatrix} = 0,$$

получаем равенство

$$\mathcal{D}_S\begin{pmatrix} 3,4,5 \\ 2,1,0 \end{pmatrix} S_{n+3}S_{n-3} - \mathcal{D}_S\begin{pmatrix} 3,4,5 \\ 3,1,0 \end{pmatrix} S_{n+2}S_{n-2} + \mathcal{D}_S\begin{pmatrix} 3,4,5 \\ 3,2,0 \end{pmatrix} S_{n+1}S_{n-1} - \\ - \mathcal{D}_S\begin{pmatrix} 3,4,5 \\ 3,2,1 \end{pmatrix} S_n^2 = 0.$$

Из этого соотношения при условии

$$\mathcal{D}_S\begin{pmatrix} 3,4,5 \\ 2,1,0 \end{pmatrix} \neq 0$$

следует, что последовательность $\{S_n\}$ 0-ранга 3 является последовательностью Сомос-6.

Э. Хоун [6] и К. Сворт [8] показали, что в случае $S_n \neq 0$ решение уравнения (1) при $k=4$ и $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$ имеет вид

$$S_n = K_0 K_1^n \frac{\sigma(nz+u)}{\sigma^{n^2}(z)}, \tag{3}$$

где $\sigma(z)=\sigma(z;\mathrm{g}_2,\mathrm{g}_3)$ — сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированная с эллиптической кривой $y^2=4x^3-\mathrm{g}_2x-\mathrm{g}_3$, а параметры $K_0,K_1,z,u,\mathrm{g}_2,\mathrm{g}_3$ определяются по начальным значениям S_0,S_1,S_2,S_3 и коэффициентам рекуррентного соотношения α_1,α_2 (о последовательностях Сомос-4, не представимых в виде (3), см. [2]). Из теоремы сложения для сигма-функции следует, что в общем случае 0-ранг последовательности Сомос-4 равен 2, а из результатов работы [5] следует, что 0-ранг последовательности Сомос-6 не превосходит 4.

Представляет интерес мультипликативный способ построения последовательностей Сомоса. Определим две последовательности Сомос-4

$$A_n = K_0 K_1^n \frac{\sigma(nz+u)}{\sigma^{n^2}(z)}, \qquad B_n = \frac{\sigma(nz+v)}{\sigma^{n^2}(z)}, \tag{4}$$

ассоциированные с одинаковыми эллиптическими кривыми, и положим

$$C_n = A_n B_n. \tag{5}$$

Из работы [3] следует, что в общей ситуации 0-ранг последовательности $\{C_n\}$ равен 3. Поэтому $\{C_n\}$ является последовательностью Сомос-6 (подробнее о последовательностях рангов 1, 2, 3 и 4 см. [4]). Пусть $\{C_n\}$ не содержит нулевых элементов и задается начальными значениями $C_0,\dots,C_5$. Определим вспомогательную последовательность $\{h_n\}$ формулой

$$h_n = \frac{C_{n-1}C_{n+1}}{C_n^2}.$$

В данной заметке мы найдем условия, которым удовлетворяют коэффициенты и начальные значения $h_1\dots,h_4$ последовательности $\{h_n\}$.

1. Предварительные сведения

Рекуррентное соотношение для последовательности Сомос-4 $\{A_n\}$ запишем в виде

$$A_{n-2}A_{n+2} = aA_{n-1}A_{n+1} + bA_n^2, \tag{6}$$

а для последовательности Сомос-6 $\{C_n\}$ — в виде

$$C_{n-3}C_{n+3} = \alpha_1 C_{n-2}C_{n+2} + \alpha_2 C_{n-1}C_{n+1} + \alpha_3 C_n^2. \tag{7}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0$.

Вместе с последовательностью $\{S_n\}$ соотношению (1) удовлетворяет также последовательность $\{K_0K_1^nS_n\}$ $(K_0,K_1\neq 0)$. Поэтому удобно ввести переменные (см. [9])

$$f_n = \frac{A_{n-1}A_{n+1}}{A_n^2}, \quad h_n = \frac{C_{n-1}C_{n+1}}{C_n^2},$$

инвариантные относительно преобразования $S_n \to K_0K_1^nS_n$. В новых переменных соотношение (6) примет более простой вид

$$f_{n-1}f_n^2f_{n+1} = af_n + b, \tag{8}$$

а соотношение (7) запишется в виде

$$h_{n-2}h_{n-1}^2h_n^3h_{n+1}^2h_{n+2} = \alpha_1 h_{n-1}h_n^2h_{n+1} + \alpha_2 h_n + \alpha_3. \tag{9}$$

Положим

$$T(x,y;a,b) = xy + a\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{b}{xy}.$$

У рекуррентного соотношения (8) существует первый интеграл (инвариант) — величина

$$I = T(f_n, f_{n+1}; a, b),$$

не зависящая от n (см. [6] и [8]).

Для последовательности $\{A_n\}$ при любых целых n, m выполняется формула сложения (см. [10])

$$A_{n-m}A_{n+m} = W_m^2A_{n-1}A_{n+1} - W_{m-1}W_{m+1}A_n^2,$$

которая является частным случаем разложения (2). В этом равенстве $W_m = \frac{\sigma(mz)}{\sigma^{m^2}(z)}$ — эллиптическая делимостная последовательность (elliptic divisibility sequence) для $\{A_n\}$ (см. [7, 9]). Она является последовательностью Сомос-4 и определяется рекуррентным соотношением

$$W_{m-2}W_{m+2} = W_2^2 W_{m-1}W_{m+1} - W_3 W_m^2$$

с начальными значениями $W_1 = 1$, W_2, W_3, W_4. Последние выражаются через коэффициенты a, b и инвариант I по формулам (см. [9])

$$W_2 = -\sqrt{a}, \quad W_3 = -b, \quad W_4 = (a^2 + bI)\sqrt{a}. \tag{10}$$

При $m = 3$ из формулы сложения получается равенство

$$A_{n-3}A_{n+3} = W_3^2 A_{n-1}A_{n+1} - W_2 W_4 A_n^2,$$

которое, с учетом (10), в терминах переменных f_n принимает вид

$$f_{n-2}f_{n-1}^2 f_n^3 f_{n+1}^2 f_{n+2} = b^2 f_n + (a^3 + abI).$$

2. Результат

Пусть

$$f_n = \frac{A_{n-1}A_{n+1}}{A_n^2}, \quad \mathrm{g}_n = \frac{B_{n-1}B_{n+1}}{B_n^2}, \quad h_n = \frac{C_{n-1}C_{n+1}}{C_n^2}.$$

Из формулы сложения следует, что последовательности (4) имеют одну и ту же эллиптическую делимостную последовательность W_m. Это, в свою очередь, означает, что $\{f_n\}$ и $\{\mathrm{g}_n\}$ удовлетворяют одинаковым рекуррентным соотношениям

$$f_{n-1}f_n^2 f_{n+1} = af_n + b, \quad \mathrm{g}_{n-1}\mathrm{g}_n^2\mathrm{g}_{n+1} = a\mathrm{g}_n + b \tag{11}$$

и имеют одинаковые инварианты $T(f_n, f_{n+1}; a, b) = T(\mathrm{g}_n, \mathrm{g}_{n+1}; a, b) = I$. Заметим, что

$$h_n = f_n \mathrm{g}_n. \tag{12}$$

Перемножив равенства (11), получим

$$h_{n-1}h_n^2 h_{n+1} = a^2 h_n + b^2 + ab(f_n + \mathrm{g}_n). \tag{13}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Если последовательность* (12) *удовлетворяет рекуррентному соотношению* (9)*, то коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ этого соотношения выражаются через параметры a, b, I по формулам*

$$\alpha_1 = a^2 b + b^2 I, \quad \alpha_2 = b^4 - a^4 b - a^2 b^2 I, \quad \alpha_3 = (a^2 + bI)(a^4 - b^3 + a^2 bI). \tag{14}$$

Доказательство. Имеем

$$f_{n-2}f_{n-1}^2f_n^3f_{n+1}^2f_{n+2}=b^2f_n+(a^3+abI),\quad \mathrm{g}_{n-2}\mathrm{g}_{n-1}^2\mathrm{g}_n^3\mathrm{g}_{n+1}^2\mathrm{g}_{n+2}=b^2\mathrm{g}_n+(a^3+abI).$$

Перемножив эти равенства, получим

$$h_{n-2}h_{n-1}^2h_n^3h_{n+1}^2h_{n+2}=b^4h_n+(a^3+abI)^2+b^2(a^3+abI)(f_n+\mathrm{g}_n).$$

Выразив $f_n+\mathrm{g}_n$ из соотношения (13) и подставив в последнее равенство, после элементарных преобразований получим уравнение

$$\begin{gathered}h_{n-2}h_{n-1}^2h_n^3h_{n+1}^2h_{n+2}=\\=(a^2b+b^2I)h_{n-1}h_n^2h_{n+1}+(b^4-a^4b-a^2b^2I)h_n+(a^2+bI)(a^4-b^3+a^2bI),\end{gathered}$$

из которого следует утверждение леммы. □

Из равенств (12) и (13) следует, что f_n и g_n являются корнями квадратного уравнения

$$abx^2-(h_{n-1}h_n^2h_{n+1}-a^2h_n-b^2)x+abh_n=0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}abf_n&=\varphi_+(h_{n-1},h_n,h_{n+1};a^2,b^2),\\ ab\mathrm{g}_n&=\varphi_-(h_{n-1},h_n,h_{n+1};a^2,b^2),\end{aligned}\tag{15}$$

где

$$\varphi_\pm(x,y,z;u,v)=\frac{1}{2}\left(xy^2z-uy-v\pm\sqrt{(xy^2z-uy-v)^2-4uvy^2}\right)$$

(ветвь корня фиксированна). В первое из соотношений (14) вместо I подставим $T\left(\frac{x}{ab},\frac{y}{ab};a,b\right)$. Получим

$$\begin{gathered}\alpha_1=a^2b+b^2T\left(\frac{x}{ab},\frac{y}{ab};a,b\right)=a^2b+b^2\left(\frac{xy}{a^2b^2}+a^2b\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{a^2b^3}{xy}\right)=\\=\frac{xy}{a^2}+a^2b\left(1+\frac{b^2}{x}\right)\left(1+\frac{b^2}{y}\right).\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\Phi(x,y;a^2,b^2,\alpha_1)=0,$$

где

$$\Phi(x,y;u,v,w)=\left(\frac{xy}{u}-w\right)^2-u^2v\left(1+\frac{v}{x}\right)^2\left(1+\frac{v}{y}\right)^2.$$

Заменяя x на abf_n, а y на abf_{n+1}, получаем

$$\Phi(abf_n,abf_{n+1};a^2,b^2,\alpha_1)=0.$$

Такое же равенство выполняется и для последовательности $\{\mathrm{g}_n\}$:

$$\Phi(ab\mathrm{g}_n,ab\mathrm{g}_{n+1};a^2,b^2,\alpha_1)=0.$$

Воспользовавшись выражениями (15) при $n=2$, получим

$$F_\pm(h_1,h_2,h_3,h_4;a^2,b^2,\alpha_1)=\Phi\big(\varphi_\pm(h_1,h_2,h_3;a^2,b^2),\varphi_\pm(h_2,h_3,h_4;a^2,b^2);a^2\,b^2,\alpha_1\big)=0.$$

Учитывая выражения $a^2=\frac{\alpha_1\alpha_2^2}{\alpha_3^2}-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $b^2=-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}$, найденные из системы уравнений (14), приходим к следующему результату.

Теорема. *Пусть последовательность Сомос-6 имеет вид* (5) *и задана в переменных* h_n *рекуррентным соотношением* (9), *в котором* $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0$. *Тогда коэффициенты* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *и начальные значения* h_1, h_2, h_3, h_4 *удовлетворяют условиям*

$$F_{\pm}\left(h_1, h_2, h_3, h_4;\ \frac{\alpha_1\alpha_2^2}{\alpha_3^2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1},\ -\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3},\ \alpha_1\right) = 0.$$

Список литературы

[1] M. О. Авдеева, В. А. Быковский, “Гиперэллиптические системы последовательностей и функций”, *Дальневосточный математический журнал*, **16**:2 (2016), 115–122.

[2] А.А. Илларионов, “О последовательности Сомос-4”, *ДВМЖ*, **18**:2 (2018), 183–188.

[3] А.А. Илларионов, “Функциональное уравнение и сигма-функция Вейерштрасса”, *Функц. анализ и его приложения*, **50**:4 (2016), 43–54.

[4] А.А. Илларионов, “Гиперэллиптические системы последовательностей ранга 4”, *Матем. сб.*, **210**:9 (2019), 59–88.

[5] Y. N. Fedorov, A. N. W. Hone, “Sigma function solution of the general Somos-6 recurrence via hyperelleptic Prym varieties”, *Journal of Integrable Systems*, **1**:1 (2016), 1–34.

[6] A. N. W. Hone, “Elliptic curves and quadratic recurrence sequences”, *Bull. London Math. Soc.*, **37**:2 (2005), 161–171.

[7] R. Shipsey, *Elliptic Divisibility Sequences*, Goldsmith’s University of London, 2000.

[8] C. S. Swart, *Elliptic curves and related sequences*, Royal Holloway and Bedford New College, University of London, 2003.

[9] C.S. Swart, A. N. W. Hone, “Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 and Somos 5 sequences”, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **145**:1 (2008), 65–85.

[10] Van der Poorten A. J., Swart C. S., “Recurrence relations for elliptic sequences: every Somos 4 is a Somos *k*”, *Bull. London Math. Soc.*, **38**:4 (2006), 546–554.

Поступила в редакцию
20 февраля 2023 г.

Работа выполнена в рамках госзадания ИПМ ДВО РАН (№ 075-01290-23-00).

Romanov M. A. On coefficients and initial conditions of Somos-6 sequence having rank 3. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2023. V. 23. No 2. P. 246–251.

[1] Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

ABSTRACT

In the paper we find the conditions for coefficients and initial values of the Somos-6 sequence, which is the product of two Somos-4 sequences and has a rank of at most 3.

Key words: *Somos sequences, elliptic functions, sequences of finite rank, addition formulae.*